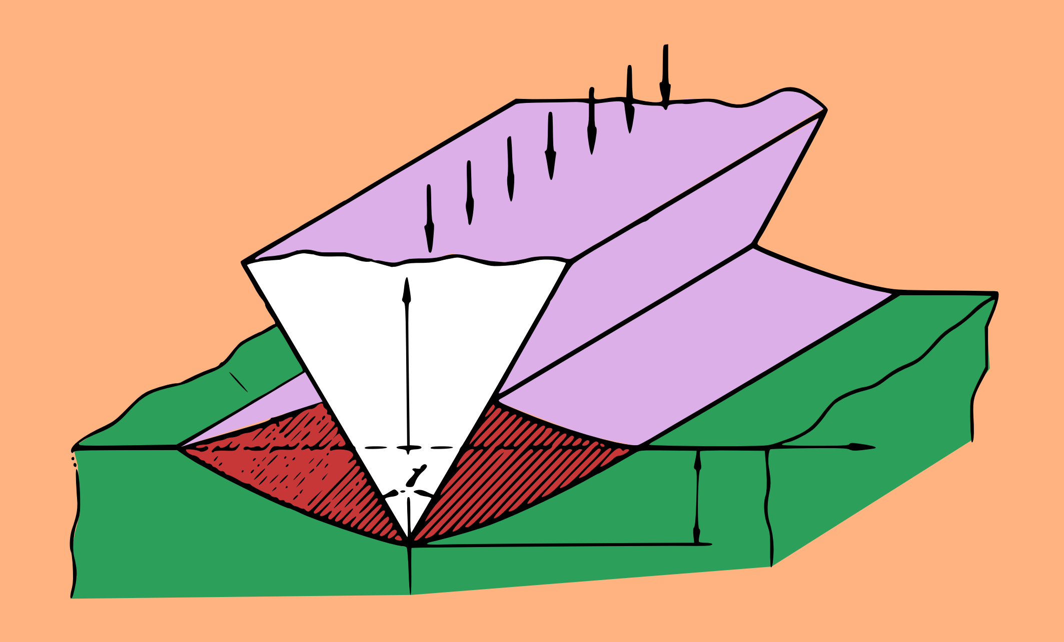
L. Katchanov

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ



Éditions Mir Moscou

Л. М. КАЧАНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · МОСКВА

L. KATCHANOV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
Térenti Ivanov

На французском языке

QUELQUES NOTATIONS

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}; \sigma_{ij}$ — composantes du tenseur des contraintes

$s_x, s_y, s_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}; s_{ij}$ — composantes du déviateur des contraintes

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}; \varepsilon_{ij}$ — composantes du tenseur des déformations

$e_x, e_y, e_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}; e_{ij}$ — composantes du déviateur des déformations

$\xi_x, \xi_y, \xi_z, \frac{1}{2}\eta_{xy}, \frac{1}{2}\eta_{yz}, \frac{1}{2}\eta_{xz}; \xi_{ij}$ — composantes du tenseur des vitesses de déformation

$u_x, u_y, u_z; u_i$ — composantes du déplacement

$v_x, v_y, v_z; v_i$ — composantes de la vitesse

δ_{ij} — symbole de Kronecker

T, Γ, H — intensités respectives des contraintes tangentielles, déformations de cisaillement, vitesses des déformations de cisaillement

σ_s, τ_s — limites d'écoulement à la traction et au cisaillement pur respectivement

INTRODUCTION

1. Théorie de la plasticité. Il est notoire que les solides ne sont élastiques qu'aux petites charges. Sous l'action de forces plus ou moins grandes, ils subissent des déformations plastiques, non élastiques. Les propriétés plastiques sont très variées ; elles dépendent des matériaux envisagés et des conditions ambiantes (température, durée du processus, etc.). Ainsi, à la température normale, les déformations plastiques des métaux résistants (acier, alliages divers, etc.) sont pratiquement indépendantes du temps ; les mêmes métaux travaillant à des températures élevées (pièces de chaudières, de turbines à vapeur ou à gaz) sont soumis à des déformations plastiques qui vont grandissant avec le temps (fluage), c.-à-d. qu'ils coulent grosso modo à la manière d'un liquide visqueux.

Actuellement, on comprend d'habitude sous le nom de théorie de la plasticité la théorie des déformations plastiques indépendantes du temps (plasticité athermique). Le présent ouvrage se propose justement d'examiner les déformations plastiques de ce genre. Quant aux effets de la viscosité proprement dite, ils ne seront examinés que dans le dernier chapitre. L'écoulement plastique qui est fonction du temps est étudié dans la théorie du fluage, dans celle de la viscosité plastique et dans la rhéologie.

L'objectif de la théorie de la plasticité est l'étude mathématique des contraintes et glissements dans les corps sujets aux déformations plastiques (dans le sens indiqué).

La théorie de la plasticité, qui fait partie de la mécanique des corps déformables, est très proche de la théorie de l'élasticité qui étudie les contraintes et les déformations dans les corps élastiques parfaits. La plupart des conceptions essentielles de la théorie de l'élasticité trouvent aussi un usage dans la théorie de la plasticité.

Le problème posé est résolu dans la théorie de la plasticité par un procédé usuel pour la mécanique des corps déformables. Il convient avant tout, sur la base de données expérimentales (et, si possible, de certains raisonnements tirés de la physique théorique), d'établir les lois fondamentales de la déformation plastique. Au moyen de ces lois présentant un caractère phénoménologique on compose un système d'équations pour la théorie de la plasticité. La solution de ces équations, qui permet d'obtenir une image de la déformation plastique des corps dans les différents cas, est un autre problème important de la théorie de la plasticité.

Ci-après, nous nous pencherons sur quelques traits caractéristiques de cette théorie. Tout d'abord, contrairement à la théorie de l'élasticité, celle-ci accorde une place considérable aux problèmes de la définition des lois de la déformation plastique qui se manifestent dans les états de contrainte complexes. Ces problèmes sont difficiles à résoudre et il convient de noter que les lois qui, sous certaines réserves, s accordent de manière satisfaisante avec les données expérimentales, sont établies surtout pour les métaux bien qu'elles puissent être vraisemblablement valables aussi pour nombre d'autres matériaux. La non-linéarité des lois principales et par conséquent des équations fondamentales de la théorie de la plasticité est une autre particularité de cette théorie La solution de ces équations présente de grandes difficultés mathématiques; les méthodes classiques de la physique mathématique sont ici inutilisables. Le développement des méthodes de recherche permettant, d'une manière ou d'une autre, grâce au caractère spécifique des problèmes de la plasticité, de surmonter ces difficultés revêt une importance primordiale dans la théorie de la plasticité. De très bonnes perspectives s'ouvrent également, dans ces conditions, avec l'emploi de nouveaux ordinateurs.

Il convient enfin de souligner le rôle majeur de la recherche expérimentale dans le développement de la théorie de la plasticité.

2. Applications de la théorie de la plasticité. La théorie de la plasticité trouve des applications importantes dans la technique et la physique.

La solution de nombreux problèmes de résistance de diverses machines et constructions est fondée sur les conclusions de la théorie de la plasticité. Cette dernière ouvre des perspectives qui permettent

de mieux utiliser la résistance des corps et mène à une méthode progressive de calcul des pièces de machines et des constructions selon leur portance. Cette méthode se distingue par sa simplicité et permet, la plupart du temps, de déterminer directement la forme optimale de la construction (théorie des constructions mécaniques optimales, cf. [67]).

En général, les processus de la déformation plastique des métaux à froid ou à chaud (laminage, filage, forgeage, matriçage, usinage des métaux, etc.) trouvent une utilisation courante dans l'économie nationale. L'analyse des forces engendrant ces processus et celle de la distribution correspondante des déformations constituent un autre domaine d'application, très important, de la théorie de la plasticité.

La destruction des solides étant précédée en général par une déformation plastique, l'étude de la résistance des matériaux se base en conséquence sur les conclusions de la théorie de la plasticité.

L'analyse du comportement des constructions aux charges de choc instantanées nécessite le développement de la théorie de la plasticité dynamique.

Ces dernières années, la théorie de la plasticité est utilisée avec succès dans les investigations ayant pour objet l'étude des lois régissant la pression des terrains, aux débouchés très intéressants dans l'industrie minière.

Enfin, il y a lieu de mentionner les perspectives de l'application des méthodes de la théorie de la plasticité aux problèmes relatives à la géophysique et à la géologie, et qui sont ébauchées dans une série d'ouvrages.

3. Note historique succincte. Les premiers travaux traitant de la théorie mathématique de la plasticité se rapportent aux années soixante-dix du XIXe siècle et sont liés aux noms de Saint-Venant, qui examina les équations de la déformation plane [187, 188], et de M. Lévy qui, tout en restant fidèle aux idées de Saint-Venant, composa les équations pour le cas tridimensionnel [171]. A ce dernier on doit aussi le procédé de la linéarisation des équations pour le problème élastique plan [172].

Dans les années suivantes, la théorie de la plasticité se développe plus lentement. Le début du XXe siècle est marqué par une certaine recrudescence de la recherche dans ce domaine avec la publication des articles de Haar et Karman en 1909 [152], et de R. von Mises

en 1913 [177]. Dans la première de ces publications, on a essayé, en partant d'un certain principe variationnel, d'obtenir les équations de la théorie de la plasticité. Von Mises formule nettement une nouvelle condition pour l'écoulement (1) (condition de stabilité de l'intensité des contraintes tangentielles).

A partir des années vingt du siècle en cours, la théorie de la plasticité se développe intensivement, tout d'abord essentiellement en Allemagne. Des résultats importants sont obtenus aussi bien pour les équations fondamentales de la théorie de la plasticité que pour la solution du problème plan (G. Henky [153, 155], L. Prandtl [183], R. von Mises [177], etc.). C'est à la même période que se rapportent aussi les premières recherches expérimentales systématiques sur les lois de la déformation plastique aux états de contrainte complexes ainsi que les premières applications encourageantes de la théorie de la plasticité dans le domaine de la technique. Dès les années trente, la théorie de la plasticité attire l'attention d'un grand nombre de savants et d'ingénieurs; des recherches théoriques et expérimentales poussées se développent dans de nombreux pays, y compris l'Union Soviétique. Parallèlement à la mécanique des fluides, la théorie de la plasticité devient une branche de la mécanique des milieux continus qui connaît le développement le plus rapide.

(1) Notons que des conditions analogues ont été formulées bien auparavant quoique sous forme moins manifeste et indépendamment de l'élaboration de la théorie mathématique de la plasticité.

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Dans ce chapitre, nous citerons sommairement les formules essentielles de la théorie des contraintes et des déformations, tout en dégageant les notions les plus intéressantes pour l'élaboration de la théorie de la plasticité.

1. ÉTAT DE CONTRAINTE

1. Etat de contrainte. En un point donné d'un milieu continu, l'état de contrainte est caractérisé par le tenseur symétrique des contraintes:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix}, \qquad (1.1)$$

où σ_x, σ_y, σ_z sont les contraintes normales et τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} les contraintes tangentielles sur des éléments de surface perpendiculaires aux axes de coordonnées x, y, z.

Sur un élément de surface arbitrairement orienté et à normale unitaire $\boldsymbol{n}$ (fig. 1), le vecteur contrainte $\boldsymbol{p}$ est déterminé par les formules de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ p_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ p_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

où n_x, n_y, n_z sont les composantes du vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ égales aux cosinus directeurs $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$.

En projetant le vecteur $\boldsymbol{p}$ sur la direction de la normale, on obtient la contrainte normale σ_n agissant sur l'élément envisagé:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{xz} n_x n_z. \qquad (1.3)$$

La valeur de la contrainte tangentielle τ_n est égale à

$$\tau_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2}. \qquad (1.4)$$

En chaque point du milieu il existe trois éléments de surface, formant un trièdre trirectangle, sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles. Les directions des normales à ces éléments forment les directions principales du tenseur des contraintes, indépendantes du système de coordonnées initial x, y, z. Cela signifie que

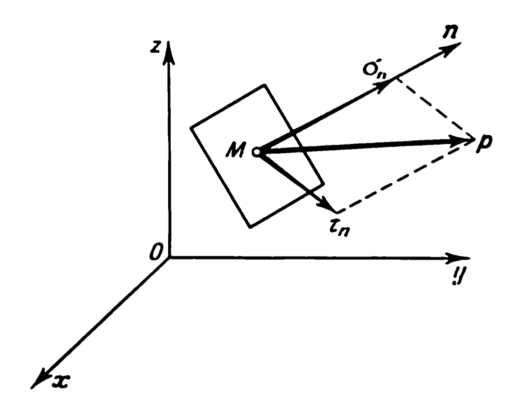


Fig. 1

tout état de contrainte en un point envisagé peut être dû à l'extension de son voisinage suivant trois directions perpendiculaires entre elles. Les contraintes correspondantes sont nommées *contraintes normales principales*. Désignons-les par σ_1, σ_2, σ_3 tout en numérotant les axes principaux de façon que:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \qquad (1.5)$$

Le tenseur des contraintes, rapporté aux axes principaux, prendra alors la forme:

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Vmatrix}.$$

Dans les sections divisant en deux les dièdres entre les plans principaux et passant respectivement par les axes principaux *1*, *2* et *3* (fig. 2), il est facile de trouver à l'aide des formules (1.2) à (1.4) que les valeurs absolues des contraintes tangentielles sont égales à:

$$\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|, \quad \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|.$$

Les contraintes tangentielles, dans ces sections, atteignent leurs valeurs extrémales et sont appelées *contraintes tangentielles principales*. Déterminons ces dernières par les formules:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{1.6}$$

La valeur de la contrainte tangentielle τ_n agissant sur l'élément varie avec son orientation. La valeur maximale de τ_n en un point donné est appelée *contrainte tangentielle maximale* τ_{max}. Si la condition (1.5) est vérifiée, on aura:

$$\tau_{max} = -\tau_2.$$

Il est facile de déterminer d'après la formule (1.3) que les contraintes normales sur les éléments de surface qui sont le siège des contraintes tangentielles principales (1.6) sont respectivement égales aux demi-sommes:

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \tag{1.7}$$

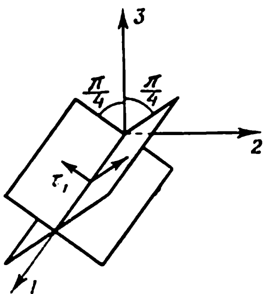


Fig. 2

On pourra se fixer un tenseur des contraintes après avoir indiqué les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 ainsi que les directions principales *1*, *2*, *3*. Ce procédé se distingue par sa clarté mécanique. Les contraintes principales σ_i $(i = 1, 2, 3)$ constituent les racines de l'équation cubique:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0. \tag{1.8}$$

La contrainte normale σ_n sur un élément donné est évidemment indépendante du choix du système de coordonnées; elle ne change qu'à la rotation de l'élément. Valeurs extrémales de la contrainte normale σ_n, les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 sont elles aussi indépendantes du choix d'un système de coordonnées. L'équation (1.8) peut être obtenue comme la condition d'extremum σ_n. Par conséquent, les coefficients de l'équation cubique (1.8) restent invariables lors du passage d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre. Ces coefficients

$$\left.\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \equiv 3\sigma, \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

écrits, dans un but de brièveté, suivant les axes principaux, sont appelés respectivement invariants linéaire, quadratique et cubique du tenseur. On opère aisément avec ces grandeurs qui se trouvent être des fonctions rationnelles entières, et d'ailleurs symétriques, des composantes de la contrainte (c.-à-d. qu'elles ne changent pas lors d'une transposition des arguments).

La quantité

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

est appelée *pression moyenne* (ou hydrostatique) en un point. La signification des autres invariants sera élucidée plus bas.

2. Déviateur des contraintes. Les matériaux présentant, en général, des propriétés mécaniques différentes par rapport au cisaillement et à la compression uniforme régulière, il est rationnel de représenter le tenseur des contraintes sous forme de somme [1]:

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma, \tag{1.10}$$

où $\sigma T_1 = \begin{Vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{Vmatrix}$ est le tenseur sphérique correspondant à la pression moyenne en un point, tandis que

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{Vmatrix} \tag{1.11}$$

est le tenseur caractérisant les contraintes tangentielles en ce point et que l'on appelle *déviateur des contraintes.*

Nous désignerons parfois les composantes normales de ce dernier (c.-à-d. $\sigma_x - \sigma$, $\sigma_y - \sigma$, $\sigma_z - \sigma$) par s_x, s_y, s_z. Les directions principales du déviateur des contraintes D_σ et du tenseur des contraintes T_σ coïncident. Quant aux valeurs principales s_i, elles diffèrent de σ_i par une valeur de la pression moyenne. Elles pourront être évidemment définies par l'équation cubique

$$-\lambda^3 + I_2(D_\sigma)\lambda + I_3(D_\sigma) = 0, \tag{1.12}$$

dont toutes les racines sont aussi réelles.

---

[1] T_1 est le soi-disant tenseur unité

$$T_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

pour lequel n'importe quelle direction est la principale et les éléments diagonaux sont égaux à 1 dans un système arbitraire de coordonnées rectangulaires x, y, z.

Les invariants du déviateur seront facilement obtenus de (1.9) si on remplace σ_1, σ_2, σ_3 par s_1, s_2 et s_3 respectivement :

$$\left.\begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= 0,\\ I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2],\\ I_3(D_\sigma) &= s_1 s_2 s_3. \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Il est évident que le déviateur des contraintes ne se caractérise que par cinq grandeurs indépendantes.

La grandeur non négative

$$T = +\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)} \quad (1.14)$$

est appelée *intensité des contraintes tangentielles* (1).

L'intensité des contraintes tangentielles ne se réduit à zéro que si l'état de contrainte est un état de pression hydrostatique.

Pour le cisaillement pur, nous aurons:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau,$$

où τ est la contrainte de cisaillement. Par conséquent,

$$T = \tau.$$

Dans le cas d'une traction (compression) simple dans la direction de l'axe des x, ces relations prendront la forme suivante:

$$\sigma_x = \sigma_1; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0;$$

alors

$$T = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}. \quad (1.15)$$

L'équation cubique (1.12) ayant des racines réelles sera donc résolue sous forme trigonométrique. En utilisant les formules algébriques connues, on peut exprimer les composantes principales du déviateur en fonction des invariants [32, 33]:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} T\cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right),\\ s_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} T\cos\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right),\\ s_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} T\cos\omega_\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

(1) On envisage parfois la *contrainte réduite* (ou intensité des contraintes) égale à $\sqrt{3}\,T$. Dans le cas d'une traction (compression) simple, la contrainte réduite sera égale à $|\sigma_1|$.

L'angle ω_σ découle de l'équation

$$-\cos 3\omega_\sigma = \frac{3\sqrt{3}\,I_3(D_\sigma)}{2T^3}. \tag{1.17}$$

En se basant sur les relations (1.6) et (1.16), il est facile de trouver les contraintes tangentielles principales:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= -T\sin\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_2 &= -T\sin\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_3 &= T\sin\omega_\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Comme on le sait, l'angle ω_σ varie dans les limites

$$0 \leqslant \omega_\sigma \leqslant \frac{\pi}{3}. \tag{1.19}$$

En effet, puisque $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, nous avons $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_2 \leqslant 0$, $\tau_3 \geqslant 0$, c.-à-d. $\sin\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 0$, $\sin\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$, $\sin\omega_\sigma \geqslant 0$, d'où découle (1.19).

Or, $\tau_{max} = -\tau_2$. D'où, comme conséquence de (1.19), résulte l'inégalité établie d'une autre manière par A. Iliouchine:

$$1 \leqslant \frac{T}{\tau_{max}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{1.20}$$

Ainsi donc, l'intensité des contraintes tangentielles T et la contrainte tangentielle maximale τ_{max} ne diffèrent que très peu l'une de l'autre. En effet,

$$T \approx 1{,}08\,\tau_{max} \tag{1.21}$$

avec une erreur maximale d'environ 7 %.

Comme l'a montré V. Novogilov [117], l'intensité des contraintes tangentielles T est proportionnelle à la valeur quadratique moyenne des contraintes tangentielles calculée sur la surface d'une petite sphère englobant le point du corps envisagé.

3. Notations tensorielles. L'utilisation des notations tensorielles pour l'examen des problèmes généraux de la théorie de la plasticité en simplifie l'exposé et le rend plus clair. Les notations tensorielles trouvent un usage de plus en plus courant dans la littérature scientifique actuelle relative à la théorie de la plasticité. Pour les raisons énoncées, les notations tensorielles seront utilisées aussi dans certaines divisions du présent ouvrage.

Nous désignerons les coordonnées cartésiennes x, y, z par x_1, x_2, x_3 et les écrirons comme x_i, où l'indice i parcourt les valeurs 1, 2, 3. Il va de soi que l'on pourrait, à la place de i, prendre une

autre lettre (par exemple j, $j = 1, 2, 3$; on utilise d'habitude l'alphabet latin). Désignons par n_i (ou disons n_j) les composantes du vecteur unité normal à l'élément de surface. Il est évident que les n_i sont égales aux cosinus directeurs de la normale.

Nous pourrons désigner maintenant les composantes du tenseur des contraintes par σ_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$. Par suite de la propriété de réciprocité des contraintes tangentielles, on a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Les relations entre les notations tensorielles et les désignations « techniques » employées plus haut sont évidentes: $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, etc. Nous conviendrons par la suite, en parlant du tenseur des contraintes, qu'il s'agit du tenseur σ_{ij}.

Les formules de Cauchy (1.2) pourront être maintenant représentées de la façon suivante:

$$p_j = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} n_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

La règle de la sommation, introduite par A. Einstein, est devenue d'un usage très courant. Omettons le signe somme sachant que, pour tous les indices latins répétés deux fois dans un monôme, la sommation portera sur les valeurs 1, 2, 3. Les formules précédentes pourront alors être récrites sous la forme suivante:

$$p_j = \sigma_{ij} n_i. \tag{1.22}$$

L'indice i, qui se répète, est appelé *indice muet* (ou indice de sommation). Il peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre (de caractère latin en général). Le même indice muet ne devra pas être rencontré plus de deux fois dans chaque monôme. L'indice j est parfois appelé *libre*.

Il est facile de voir que la contrainte normale σ_n (1.3) est égale à

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j, \tag{1.23}$$

où nous avons deux indices muets, à savoir i et j. Par conséquent, il s'agit d'une sommation double et il n'y a pas d'indices libres.

La pression moyenne est égale à

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

Le *symbole de Kronecker* (symbole delta) est déterminé par les relations

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = j, \\ 0 \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Dans le système de coordonnées x_i, le tenseur avec une telle composante est appelé *tenseur unitaire* (cf. T_1).

Le déviateur des contraintes a pour composantes

$$s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}. \qquad (1.24)$$

L'invariant linéaire du déviateur est nul, c.-à-d. $s_{ii}=0$. Il est facile de s'apercevoir que l'intensité des contraintes tangentielles, dans leurs nouvelles notations, est égale à

$$T=\left(\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}. \qquad (1.25)$$

La pression moyenne peut être représentée également sous la forme suivante :

$$\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}.$$

4. Interprétation géométrique. Revenons maintenant à l'analyse des grandeurs σ, T, ω_σ, par l'intermédiaire desquelles on calcule les contraintes principales.

Une interprétation géométrique simple peut être donnée pour les grandeurs σ, T, ω_σ. Dans ce but, nous introduirons la notion

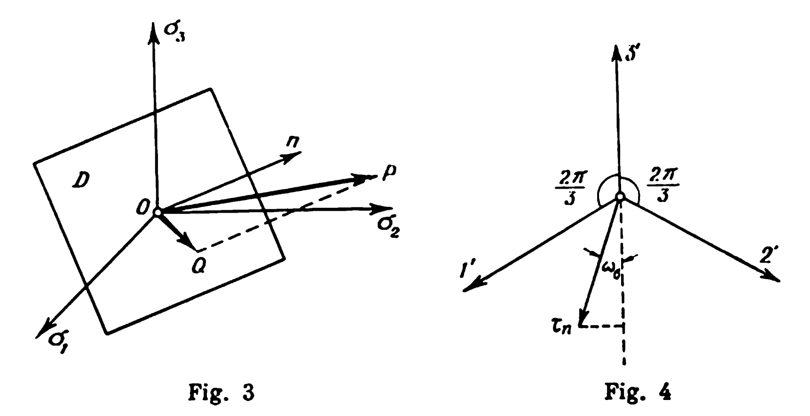


Fig. 3 Fig. 4

de l'espace des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3. Dans l'*espace des contraintes* envisagé, l'état de contrainte en un point donné peut être représenté par le vecteur $\overline{OP}$ dont les composantes sont respectivement égales à σ_1, σ_2, σ_3 (fig. 3). Le plan

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0 \qquad (1.26)$$

qui est incliné uniformément par rapport aux axes passe par l'origine des coordonnées. La somme des carrés des cosinus de la normale n aux axes étant égale à 1, $\cos(n, \sigma_i)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, le

vecteur unité de la normale au plan considéré est égal à

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3),$$

où $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ sont des vecteurs unité suivant les axes σ_1, σ_2, σ_3. La droite

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3,$$

perpendiculaire au plan envisagé, passe par l'origine des coordonnées. Les points de cette ligne, appelée *axe hydrostatique*, répondent aux états de contrainte hydrostatiques.

Représentons le vecteur $\overline{OP}$ sous la forme suivante:

$$\overline{OP}=\sigma_1\boldsymbol{i}_1+\sigma_2\boldsymbol{i}_2+\sigma_3\boldsymbol{i}_3.$$

La projection de $\overline{OP}$ sur la normale est proportionnelle à la pression moyenne

$$(\overline{OP},\ \boldsymbol{n})=\sqrt{3}\sigma.$$

Opérons maintenant avec le vecteur

$$\overline{OQ}=s_1\boldsymbol{i}_1+s_2\boldsymbol{i}_2+s_3\boldsymbol{i}_3,$$

sous lequel figure le déviateur D_σ. Il est alors facile de voir que $\overline{OP}=\overline{OQ}+\sqrt{3}\sigma\boldsymbol{n}$.

Notons que

$$(\overline{OQ},\ \boldsymbol{n})=0,$$

c.-à-d. que le vecteur $\overline{OQ}$ se trouve dans le plan (1.26) que nous conviendrons d'appeler *plan du déviateur*.

La longueur du vecteur $\overline{OQ}$ est proportionnelle à l'intensité des contraintes tangentielles

$$|\overline{OQ}|=\sqrt{2}T. \tag{1.27}$$

L'angle ω_σ définit la position du vecteur $\overline{OQ}$ sur le plan du déviateur. En effet, admettons que les axes *1'*, *2'*, *3'* soient les projections des axes σ_1, σ_2, σ_3 sur le plan D (fig. 4). Calculons la projection du vecteur $\overline{OQ}$ sur l'axe *3'*. Puisque

$$\cos(\sigma_3,\ 3')=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \cos(\sigma_1,\ 3')=\cos(\sigma_2,\ 3')=-\frac{1}{\sqrt{6}},$$

nous avons

$$\text{pr. }\overline{OQ}=\sum_{i=1}^{3}s_i\cos(\sigma_i,\ 3')=-\sqrt{2}T\cos\omega_\sigma.$$

Ainsi, ω_σ est l'angle compris entre le vecteur $\overline{OQ}$ et l'axe négatif *3'*. Cet angle ne peut être supérieur à 60°.

Nous examinerons maintenant, en un point donné du milieu, un élément de surface qui soit uniformément incliné vers les axes principaux. Nous conviendrons d'appeler un tel élément, *élément octaédrique* (celui-ci étant la face d'un octaèdre régulier, fig. 5). D'après les formules de Cauchy (1.2), les projections du vecteur contrainte **p** (cf. fig. 3), agissant sur un élément de surface octaédrique, sont respectivement égales à: $\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, la contrainte normale sur cet élément sera:

$$\sigma_n = \sigma,$$

c.-à-d. qu'elle sera égale à la pression moyenne. Quant à la contrainte tangentielle τ_n, elle sera proportionnelle à T:

$$\tau_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\,T.$$

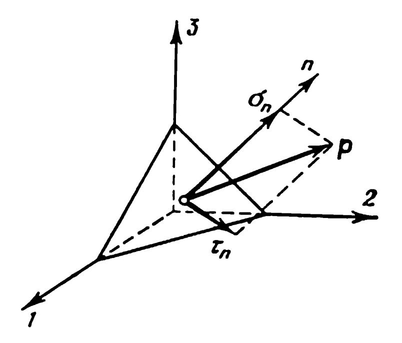


Fig. 5

5. Cercles de Mohr. Le diagramme de Mohr est une représentation concrète des contraintes dans diverses sections passant par un point donné. Admettons que les directions des axes de coordonnées et les directions principales coïncident en ce point; nous avons alors conformément aux formules (1.3) et (1.2):

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2,$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2,$$

donc

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

A partir de ce système d'équations on trouve les carrés des cosinus directeurs:

$$\left.\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ n_2^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ n_3^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.28)$$

Etant donné que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, alors que les premiers membres de ces égalités sont non négatifs, on devra donc avoir:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geqslant 0,$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leqslant 0,$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geqslant 0,$$

c.-à-d. que les contraintes σ_n, τ_n se trouvent à l'intérieur d'une aire limitée par des demi-cercles et hachurée sur la fig. 6 ; aux points d'un cercle quelconque répondent des éléments de surface contenant les axes principaux correspondants. Les cosinus directeurs de l'élément avec les valeurs données de σ_n, τ_n sont calculés suivant les

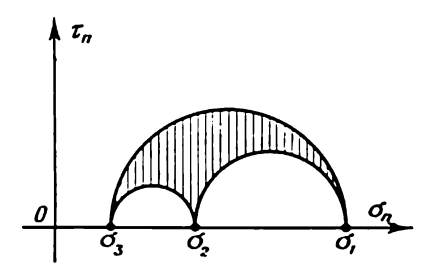


Fig. 6

formules (1.28). Les rayons des cercles restent évidemment invariables lorsque le corps est soumis à une pression complémentaire uniformément répartie, et l'ensemble de la figure ne subit qu'un déplacement le long de l'axe horizontal σ_n.

Les corrélations des valeurs principales du tenseur des contraintes peuvent être évaluées moyennant le coefficient proposé par Lodé et Nadaï :

$$\mu_\sigma = 2\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \tag{1.29}$$

et qui caractérise la position du point σ_2 sur le diagramme de Mohr. Ce coefficient n'a pas de sens seulement dans le cas de pression hydrostatique.

Les diagrammes de Mohr sont similaires pour les mêmes grandeurs μ_σ. Il est évident que pour une valeur fixée de μ_σ la nature de l'état de contrainte est déterminée à un facteur commun et à une pression hydrostatique additive près. Dans ce sens μ_σ peut être considéré comme une forme du tenseur (ou du déviateur) des contraintes, comme la caractéristique du « genre de l'état de contrainte ». Quant au facteur commun, qui caractérise l'« échelle » de la construction, il est proportionnel à l'intensité T, comme cela découle de (1.16).

Le paramètre μ_σ varie de -1 à $+1$; ainsi on a pour la traction pure ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) :

$$\mu_\sigma = -1,$$

pour la compression pure ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$)

$$\mu_\sigma = +1,$$

pour le cisaillement pur ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$)

$$\mu_\sigma = 0.$$

Le paramètre μ_σ est une fonction des invariants $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$ et présente une liaison simple avec l'angle ω_σ. En effet, il résulte de (1.29) et de (1.16) que

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right). \tag{1.30}$$

L'angle ω_σ est parfois appelé angle du genre de l'état de contrainte. Notons que pour la traction $\omega_\sigma = \frac{\pi}{3}$, pour le cisaillement $\omega_\sigma = \frac{\pi}{6}$ et pour la compression $\omega_\sigma = 0$.

2. DÉFORMATION

1. Tenseur des déformations. Soit u le déplacement que subissent les points du milieu lors de sa déformation. Ses composantes seront désignées par u_x, u_y, u_z. La déformation du milieu est caractérisée par le *tenseur des déformations* symétrique:

$$T_\varepsilon = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{matrix} \right\|,$$

dont les composantes sont égales à

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right], \ldots, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right], \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Comme tout tenseur symétrique, le tenseur des déformations est réduit aux axes principaux:

$$T_\varepsilon = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{matrix} \right\|,$$

ε_1, ε_2, ε_3 étant appelés *allongements principaux*. Cela signifie que toute déformation peut être réalisée par des tractions simples dans trois directions orthogonales (directions principales).

Les différences

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \tag{2.2}$$

sont appelées *glissements principaux*. Le glissement à valeur maximale en un point donné sera nommé *glissement maximal* γ_{max}.

2. Petite déformation. S'il s'agit d'une petite déformation, les composantes ε_x, ε_y, . . ., γ_{xz} sont petites en module par rapport à l'unité. Si, en outre, les angles de rotation des éléments d'un corps l'un par rapport à l'autre s'avèrent suffisamment petits (ce problème est analysé dans le cours de V. Novogilov [19], consacré à la théorie de l'élasticité), on peut alors, dans les formules (2.1), négliger les produits $\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2$, $\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}$, . . ., par conséquent

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

Ici ε_x, ε_y, ε_z représentent les allongements relatifs dans les directions des axes des x, y, z respectivement, tandis que γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} sont des glissements relatifs (où γ_{xy} est un changement d'angle entre les axes des x, y, etc.). La variation relative de volume sera égale à

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.4)$$

Ces formules simples sont inapplicables quand il s'agit de décrire des changements de forme appréciables pour des corps massifs. La valeur des composantes du tenseur des déformations étant comparable à l'unité, il faut alors se baser sur les formules fondamentales (2.1). Soulignons aussi que, même aux allongements et glissements de petite valeur, les relations linéaires (2.3) s'avèrent souvent insuffisantes pour résoudre les problèmes de déformation et de stabilité des corps souples (barres, plaques, voiles) en raison des translations et rotations importantes auxquelles sont soumis les éléments du corps. Par la suite, sous la notion de petite déformation on comprendra une déformation pour laquelle les formules (2.3) sont applicables.

Plus bas, nous utiliserons souvent les notations tensorielles des composantes de la déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (2.5)$$

où x_i sont les coordonnées cartésiennes et u_i les composantes du vecteur translation. Il est facile de voir que

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}.$$

3. Invariants. Les invariants du tenseur des déformations, qui se forment de la même façon que pour le tenseur des contraintes,

ont la forme suivante dans les axes principaux:

$$\left.\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2(T_\varepsilon) &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1), \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Pour des raisons de commodité, le tenseur des déformations peut être représenté sous forme d'une somme:

$$T_\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon T_1 + D_\varepsilon, \quad (2.7)$$

où $\frac{1}{3}\varepsilon T_1$ est le tenseur sphérique correspondant à la dilatation cubique, tandis que le *déviateur des déformations*

$$D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{1}{3}\varepsilon \end{Vmatrix}$$

caractérise le changement de la forme d'un élément du système, dû aux glissements. Les invariants du déviateur des déformations sont égaux à

$$\left.\begin{aligned} I_1(D_\varepsilon) &= 0, \\ I_2(D_\varepsilon) &= \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right], \\ I_3(D_\varepsilon) &= \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)\left(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\varepsilon\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

L'invariant quadratique $I_2(D_\varepsilon)$, que l'on peut considérer comme étant une caractéristique sommaire de la distorsion d'un élément du milieu, joue un rôle important dans la théorie de la plasticité. La grandeur non négative

$$\Gamma = +2\sqrt{I_2(D_\varepsilon)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \quad (2.9)$$

est appelée *intensité de la déformation de cisaillement* [1].

Dans le cas de cisaillement pur, nous avons:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0, \qquad \gamma_{xy} = \gamma.$$

---

[1] On envisage parfois la *déformation réduite* (ou l'intensité de la déformation) égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma$. Dans le cas d'une traction (compression) simple appliquée à une barre en matériau incompressible, la déformation réduite est égale à $|\varepsilon_1|$.

En introduisant ces valeurs dans (2.1), on trouve:

$$\Gamma = |\gamma|.$$

Le facteur numérique qui se trouve devant la racine dans (2.9) est choisi de façon que, lors du cisaillement pur, l'intensité Γ soit égale à la valeur du cisaillement γ.

La relation (2.7) peut être écrite aussi sous la forme:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} + e_{ij}, \tag{2.10}$$

où e_{ij} sont les composantes du déviateur des déformations. La première égalité de (2.8), dans ces notations, a la forme de $e_{ii} = 0$, et l'intensité de la déformation de cisaillement est égale à

$$\Gamma = (2e_{ij}e_{ij})^{1/2}. \tag{2.11}$$

4. **Interprétations géométriques.** Des interprétations géométriques analogues à celles du tenseur des contraintes envisagées plus haut peuvent être développées pour tout tenseur symétrique, et pour le tenseur des déformations en particulier.

Tout comme précédemment, on obtiendra:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma\cos\left(\omega_\varepsilon - \frac{\pi}{3}\right), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma\cos\left(\omega_\varepsilon' + \frac{\pi}{3}\right), \\ e_3 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma\cos\omega_\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

donc

$$-\cos 3\omega_\varepsilon = \frac{12\sqrt{3}\,I_3(D_\varepsilon)}{\Gamma^3}. \tag{2.13}$$

Tout comme auparavant

$$0 \leqslant \omega_\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{3},$$

et il existe une relation approximative:

$$\Gamma \approx 1{,}08\cdot\gamma_{\max}. \tag{2.14}$$

Le diagramme de Mohr reste valable si l'on porte en abscisses l'allongement relatif ε_n suivant la direction donné n et en ordonnées la moitié de la valeur absolue du cisaillement γ_n dans le plan perpendiculaire à n.

Tout comme pour le paramètre μ_σ, on introduit le paramètre

$$\mu_\varepsilon = 2\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1,$$

qui est lié à l'angle du genre de déformation ω_ε par la relation

$$\mu_\varepsilon = \sqrt{3}\operatorname{cotg}\left(\omega_\varepsilon + \frac{\pi}{3}\right). \tag{2.15}$$

5. Conditions de compatibilité des déformations. Les composantes du tenseur des déformations doivent satisfaire aux six relations identiques de Saint-Venant, à savoir:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y}; \ \ldots, \\ &2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right); \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Les autres relations seront déduites de celles décrites par permutation circulaire des indices.

6. Composantes du tenseur des déformations en coordonnées cylindriques et sphériques. Les expressions des composantes du tenseur des déformations en coordonnées cylindriques et sphériques nous étant nécessaires par la suite, nous les donnons ici sans démonstration [15, 37].

Coordonnées cylindriques r, φ, z. Soient les composantes du vecteur déplacement u_r, u_φ, u_z indépendantes de φ; les cisaillements et allongements relatifs auront alors la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, && \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, && \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ &\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, && \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, && \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Coordonnées sphériques r, φ, χ. Dans le cas de symétrie centrale qui nous intéresse, les composantes du vecteur déplacement $u_\varphi = u_\chi = 0$, et

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = \frac{u_r}{r}; \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi\chi} = \gamma_{r\chi} = 0. \tag{2.18}$$

3. VITESSE DE LA DÉFORMATION

1. Tenseur des vitesses de déformation. Soit v la vitesse avec laquelle se déplacent les éléments du milieu et dont les composantes sont:

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Durant un intervalle de temps infiniment petit dt, le milieu subit une déformation infiniment petite qui est définie par les déplacements $v_x\,dt$, $v_y\,dt$ et $v_z\,dt$. Les composantes de cette déformation trouvées d'après (2.3) ont le facteur commun dt. En les divisant par celui-ci, on obtient les composantes du *tenseur des*

vitesses de déformation symétrique :

$$T_\xi = \left\| \begin{matrix} \xi_x & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{xz} & \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_z \end{matrix} \right\|,$$

où

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \xi_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \xi_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \eta_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \eta_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

Les grandeurs ξ_x, ξ_y, ξ_z définissent les *vitesses des allongements relatifs* de volume élémentaire dans les directions des axes de coordonnées ; quant à η_{xy}, η_{yz}, η_{xz}, ils définissent les *vitesses angulaires de distorsion* des angles initialement droits. La *vitesse de la dilatation cubique relative* est égale à

$$\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z = \operatorname{div} v. \quad (3.2)$$

Outre la vitesse de déformation pure, caractérisée par le tenseur T_ξ, l'élément de volume subit un déplacement rigide défini par la vitesse de translation v et par la rotation à vitesse angulaire

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v.$$

L'*accélération d'un élément du milieu en mouvement* est définie par la dérivée totale de la vitesse :

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \ \ldots \quad (3.3)$$

Le premier terme de cette équation caractérise les transformations locales, les autres représentent la partie de translation qui tient compte des transformations dues au transfert de l'élément dans un point voisin de l'espace.

En notations tensorielles, les composantes de la vitesse de déformation sont égales à

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

où v_i sont les composantes du vecteur vitesse.

2. Invariants du tenseur des vitesses de déformation. On peut obtenir les invariants du tenseur T_ξ et du déviateur D_ξ à partir des for-

mules (2.6) et (2.8) en remplaçant $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xz}$ par $\xi_x, \ldots, \eta_{xz}$. Ecrivons seulement l'expression d'*intensité des vitesses de déformation du cisaillement*:

$$H = +2\sqrt{I_2(D_\xi)} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_x-\xi_y)^2+(\xi_y-\xi_z)^2+(\xi_z-\xi_x)^2+\frac{3}{2}(\eta_{xy}^2+\eta_{yz}^2+\eta_{xz}^2)}. \tag{3.4}$$

Le diagramme de Mohr et le coefficient μ_ξ gardent également leur signification lorsqu'ils sont appliqués aux vitesses de déformation.

On introduit identiquement la quantité ω_ξ et les formules correspondantes pour les valeurs principales du déviateur D_ξ.

3. Déformation et vitesse de déformation. Les vitesses étant les dérivées totales des déplacements par rapport au temps

$$v_i = \frac{du_i}{dt},$$

on obtient

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{du_j}{dt}\right). \tag{3.5}$$

Il est évident que

$$\xi_{ij} \neq \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij}.$$

Dans le cas de petite déformation, il existe des relations simples entre les composantes de la déformation et celles de la vitesse de déformation. En effet, étant donné que

$$v_i = \frac{\partial}{\partial t} u_i,$$

il s'ensuit

$$\xi_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ij}. \tag{3.6}$$

Les accélérations sont décrites par les formules

$$w_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{3.7}$$

La partie de translation est négligée dans l'expression de la dérivée totale, en se basant sur le fait que, lors de petites déformations, les dérivées du déplacement et des vitesses suivant les coordonnées peuvent être considérées d'habitude comme étant petites.

Il convient enfin de noter que $\xi_i \neq \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_i$ puisque, en général, les axes principaux du tenseur des déformations et de celui des vitesses de déformation ne coïncident pas.

4. Accroissements des composantes de la déformation. Comme on le verra plus bas, dans des conditions de déformation plastique relativement lente et à température relativement peu élevée, les propriétés mécaniques des métaux ne dépendent pratiquement pas de la vitesse de déformation. Dans ce cas, ce ne sont pas en somme les vitesses de déformation qui présentent un intérêt, mais les accroissements infiniment petits de $\xi_{ij}\, dt$ (que l'on désigne conventionnellement par $d\varepsilon_{ij}$, ayant en vue que ces quantités, à proprement parler, ne constituent pas les différentielles des composantes de la déformation) qui, conformément à (3.5), s'expriment par les formules:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\, du_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\, du_j\right), \tag{3.8}$$

constituent le tenseur $T_{d\varepsilon}$ et ont une signification physique simple. Les relations (3.8) sont applicables pour la description des grandes déformations que l'on peut obtenir par sommation des transformations infinitésimales (3.8).

Dans les formules (3.8), les accroissements des composantes de la déformation sont calculés par rapport à l'état instantané; le système de coordonnées x_i est supposé « gelé » dans l'élément de volume donné.

Envisageons, par exemple, la traction homogène d'un cylindre le long de nos axe coïncidant avec l'axe des x_1; nous avons alors:

$$d\varepsilon_1 = \frac{dl}{l},$$

où l est la longueur courante du cylindre, dl sa transformation infiniment petite. La sommation nous conduit à l'allongement dit *allongement naturel*

$$\int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0},$$

où l_0 est la longueur initiale.

Si, au cours de la déformation, les axes principaux ne tournent pas, les intégrales $\int d\varepsilon_i$ ont une signification physique simple et sont égales aux allongements naturels correspondants $\ln \frac{l_i}{l_{i0}}$. Il est évident que la loi valable dans ce cas est celle de l'addition directe des déformations: la somme des allongements naturels successifs est égale à l'allongement naturel sommaire.

Dans le cas général, les intégrales $\int d\varepsilon_{ij}$ ne se calculent pas et n'ont pas de signification physique concrète. On peut obtenir ces intégrales si l'on connaît la voie de la déformation, c.-à-d. si

l'on connaît les composantes $d\varepsilon_{ij}$ en fonction d'un certain paramètre (charge, par exemple). Cela limite l'application des allongements naturels en tant que mesure de déformation au cas des directions principales fixées.

Nous désignerons les invariants du tenseur $T_{d\varepsilon}$ (déviateur $D_{d\varepsilon}$), que l'on obtient à partir des invariants correspondants du tenseur T_ε par transition aux composantes $d\varepsilon_{ij}$, par:

$$d\varepsilon, \ \overline{d\Gamma}, \ \mu_{d\varepsilon}, \ \omega_{d\varepsilon}.$$

Soulignons une fois de plus que l'on ne doit pas considérer les quantités $d\varepsilon_{ij}$ comme étant les différentielles des composantes de la déformation ε_{ij}. Mais cela ne sera vrai que pour les petites déformations pour lesquelles sont applicables les formules (2.3). Il s'agit dans ce cas d'une simple superposition des déformations et les intégrales $\int d\varepsilon_{ij}$ représentent les composantes de la déformation.

5. Conditions de compatibilité des vitesses de déformation. On ne peut pas prendre arbitrairement les composantes de la vitesse de déformation tout comme celles de la déformation proprement dite (cf. paragraphe 2). Elles doivent satisfaire aux six conditions de compatibilité, tout à fait analogues aux conditions de compatibilité de Saint-Venant (2.16):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 \eta_{xy}}{\partial x\,\partial y}; \ \ldots, \\ 2\,\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y\,\partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \eta_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \eta_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \eta_{xy}}{\partial z}\right); \ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

6. Cas de milieu incompressible. Pour le milieu incompressible $\xi = 0$, c.-à-d.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0. \qquad (3.10)$$

Sous cette condition, les composantes ξ_{ij} sont les composantes du déviateur des vitesses de déformation et l'*intensité des vitesses de déformation du glissement* est égale à

$$H=(2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}. \qquad (3.11)$$

4. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

1. Equations différentielles du mouvement. Désignons par ρ la densité du milieu, par F_x, F_y, F_z, les composantes de la force de masse et par w_x, w_y, w_z, les composantes de l'accélération de l'élément du milieu. Le mouvement de ce dernier sera défini par les

forces qui lui sont appliquées. En calculant ces forces, nous obtiendrons les équations différentielles du mouvement du milieu continu dues à Cauchy:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\rho\,(F_x-w_x)=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho\,(F_y-w_y)=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho\,(F_z-w_z)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Soulignons que ces équations décrivent le mouvement d'un élément du milieu identifié à une particule d'un solide.

En notations tensorielles, ces équations s'écrivent sous la forme:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho\,(F_j-w_j)=0. \tag{4.2}$$

Tenant compte du fait que par la suite nous aurons besoin d'opérer avec des équations différentielles d'équilibre en coordonnées cylindriques et sphériques, nous donnons ces équations sans les déduire (cf. [37, 51]).

2. Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques. En coordonnées cylindriques r, φ, z, les équations d'équilibre ont la forme:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}+\rho F_r=0,\\
&\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\varphi}}{r}+\rho F_\varphi=0,\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\rho F_z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

3. Equations d'équilibre en coordonnées sphériques. Soient r le rayon, φ la longitude, χ la latitude en coordonnées sphériques; dans le cas de symétrie centrale, l'équation d'équilibre a la forme

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\varphi)+\rho F_r=0, \tag{4.4}$$

or

$$\sigma_\varphi=\sigma_\chi,\quad \tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi\chi}=\tau_{r\chi}=0.$$

4. Conditions aux limites. Outre les équations citées ci-dessus, nous disposons encore des *conditions aux limites* qui peuvent avoir un caractère très varié.

Des charges p_x, p_y, p_z peuvent être données à la frontière S du corps. Dans ce cas, pour S doivent être vérifiées les équations

(1.2) qui sont les conditions d'équilibre d'un tétraèdre élémentaire attenant à la frontière sous l'effet des efforts intérieurs et extérieurs.

On peut donner les déplacements (ou les vitesses) des points de la frontière du corps.

Enfin, on rencontre sur la frontière des conditions aux limites composées dans lesquelles nous aurons, en partie, des charges et, en partie, également des déplacements (ou des vitesses).

5. Conditions initiales. Il est nécessaire de déterminer l'état du corps au moment initial si le processus de déformation est non stationnaire et qu'il se décrive par des équations contenant les dérivées par rapport au temps (ou les dérivées par rapport au paramètre de la charge).

5. ÉQUATIONS MÉCANIQUES DE L'ÉTAT DU CORPS

1. Equations mécaniques de l'état. Les grandeurs examinées plus haut (forces, contraintes, translation, rotation, déformation, vitesse de déformation, etc.) sont nécessaires pour décrire les états dynamique et cinématique de l'élément du milieu. Elles peuvent être appelées variables mécaniques. Comme nous l'avons déjà vu, elles ne sont liées que par trois équations du mouvement (4.1). Il faut aussi connaître la liaison existant entre les états dynamique et cinématique de l'élément du corps pour pouvoir construire la théorie phénoménologique fermée du mouvement d'un milieu continu. L'ensemble de ces rapports peut être nommé « équations mécaniques de l'état ». Il importe de les distinguer des équations du mouvement (4.1) qui sont les conséquences du principe de d'Alembert et qui décrivent la mécanique du déplacement et de la rotation d'un élément du milieu, celle-ci étant d'une importance secondaire pour l'état de la matière.

Les propriétés mécaniques des corps réels sont très complexes. Néanmoins, il n'est nullement nécessaire de vouloir formuler les équations de l'état décrivant *tous* les détails du comportement mécanique des corps sous l'effet des charges. Par contre, il convient de choisir le modèle mécanique le plus simple qui puisse être en mesure de refléter seulement les propriétés les plus essentielles. Il sera alors possible de développer une théorie mathématique suffisamment complète et représentative. Les modèles simples de ce genre constituent la base des précisions suivantes. Cela explique le rôle important que jouent dans la mécanique et dans ses applications les modèles du corps élastique parfait et du fluide parfait.

2. Corps élastique, fluide parfait et fluide visqueux. La mécanique du continuum étudie depuis longtemps le mouvement des fluides parfait et visqueux ainsi que les déformations d'un corps élastique parfait. Pour ce dernier, on adopte en qualité d'équation de l'état

la *loi de Hooke généralisée*:

$$\varepsilon = 3k\sigma, \tag{5.1}$$

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon, \tag{5.2}$$

où k et G sont les constantes du matériau [1].

Sous sa forme écrite ci-dessus on souligne dans cette loi la différence qui existe entre la résistance du corps élastique au changement de volume et sa résistance au changement de forme (glissement). Les constantes k et G peuvent être considérées comme indépendantes.

Pour le *fluide parfait* on a l'équation caractéristique suivante:

$$f(\sigma, \rho) = 0 \tag{5.3}$$

et la condition d'absence de frottement interne:

$$D_\sigma = 0.$$

Pour le *fluide visqueux*, on adopte en plus de l'équation caractéristique (5.3) la loi de Newton généralisée:

$$D_\sigma = 2\mu' D_\xi, \tag{5.4}$$

où $\mu' = \text{const}$ est le coefficient de frottement.

3. Considérations finales. Les exemples cités caractérisent les propriétés mécaniques les plus simples de corps réels. En particulier, aux solides envisagés nous n'attribuerons que la propriété d'élasticité parfaite, alors qu'en réalité ces solides ne peuvent être considérés comme élastiques que dans des limites plus ou moins étroites et il convient de considérer le problème important de la déformation plastique des solides. A cet effet, il y a lieu d'établir avant tout les équations de l'état plastique. En principe, on pourrait se proposer de déduire ces équations à partir des notions théoriques de la physique du solide. Cependant le processus de la déformation plastique est fort compliqué étant donné qu'il est lié avant tout à différents défauts du réseau cristallin. Si, en outre, on tient compte aussi de la complexité de la structure de divers alliages en usage de nos jours, la difficulté du problème posé nous apparaîtra nettement. Il nous reste une autre solution qui consiste à établir les équations de la plasticité en se basant sur des données expérimentales. C'est de manière que furent introduits et examinés dans le paragraphe précédent les modèles du corps élastique, du fluide parfait et du

[1] $k = \dfrac{1-2\nu}{E}$ est le coefficient de compression volumique. Dans cette relation, E est le module d'Young, ν, le coefficient de Poisson; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de glissement.

fluide visqueux. Ce n'est que bien après que l'on a réussi à obtenir ces mêmes équations en partant de notions physiques.

Enfin, nous noterons l'importance que revêt dans le fondement des équations de l'état plastique l'application de l'analyse thermodynamique, en particulier, de la thermodynamique des phénomènes irréversibles développée avec succès ces dernières années [31, 63, 78, 89].

Exercices du chapitre I

1. Montrer que les directions principales du tenseur et du déviateur coïncident.

2. Démontrer qu'il découle de la relation

$$D_\varepsilon = \psi D_\sigma,$$

où ψ est un scalaire, que les directions principales sont les mêmes pour les déviateurs D_ε et D_σ, tandis que $\mu_\varepsilon = \mu_\sigma$.

3. Montrer par le passage direct d'un système de coordonnées x, y, z à un autre système rectangulaire ξ, η, ζ, que la pression moyenne et l'intensité des contraintes tangentielles demeurent invariantes:

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_\xi+\sigma_\eta+\sigma_\zeta,$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+\ldots+6(\tau_{xy}^2+\ldots)=(\sigma_\xi-\sigma_\eta)^2+\ldots+6(\tau_{\xi\eta}^2+\ldots).$$

4. En cas de déformation à symétrie centrale, trouver le déplacement radial à condition que le milieu soit incompressible. Calculer les déformations naturelles.

5. Trouver le déplacement radial dans le cas d'une petite déformation axiale symétrique d'un milieu incompressible ; considérer le déplacement u_z dans la direction de l'axe des z comme étant égal à zéro.

Comment changeront les résultats si u_z est constant?

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DE L'ÉTAT PLASTIQUE

6. PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES SOLIDES

1. Changement de forme et de masse volumique du solide. Il est d'une pratique courante de distinguer les solides et les fluides quoique, du point de vue de la physique, cette distinction semble plus ou moins conventionnelle. Les corps solides et liquides se distinguent notamment par leur différente résistance au changement de forme, dont ils font preuve lorsqu'ils sont sollicités par des forces extérieures. Ainsi, l'eau ne résiste presque pas au chagement de forme, tandis qu'il faut appliquer de gros efforts à une pièce d'acier pour que celle-ci parvienne à se déformer. Les essais de Bridgman et d'autres chercheurs ont montré que la compression triaxiale des liquides et solides (non poreux) est une déformation élastique, la dépendance entre le changement de volume relatif et la pression étant quasi linéaire [44, 52]. De la sorte, *le changement de la masse volumique du corps est une déformation élastique définie par la pression moyenne.* On peut d'habitude négliger des changements insignifiants de la masse volumique causés par la déformation plastique (« foisonnement »).

Le changement de forme d'un corps est dû à la déformation de glissement. Sous des pressions modérées, la déformation de glissement des matériaux isotropes dépend peu de la pression. Selon les essais de Bridgman, l'accroissement du module de glissement (module d'élasticité transversale) sous une pression de 10^5 atm est de $+2{,}2$ % pour l'acier à ressort et de $+1{,}8$ % pour le nickel par rapport à sa valeur mesurée à une pression nulle. L'effet de la pression peut être notable lorsqu'il s'agit des roches se trouvant à de grandes profondeurs.

Il convient de noter, par contre, que la déformation de glissement des matériaux anisotropes dépend de la pression. Celle-ci, en outre, joue un rôle appréciable dans les questions de l'équilibre limite des massifs pulvérulents.

2. Déformations élastique et plastique. La résistance du solide à la déformation peut être illustrée par les essais de traction des éprouvettes cylindriques soumises à des efforts P augmentant

progressivement. La courbe d'allongement de l'acier doux et du cuivre à température ambiante est représentée dans la partie supérieure de la fig. 7.

Sur l'axe vertical, on porte la contrainte P/F_0, où F_0 est la section initiale de l'éprouvette, et sur l'axe horizontal, l'allongement relatif $\Delta l/l_0$, où l_0 est sa longueur initiale. Le point A, qui se trouve un peu plus bas que la limite élastique B, correspond à une limite dite *limite de proportionnalité*. Au-delà du point B on voit apparaître

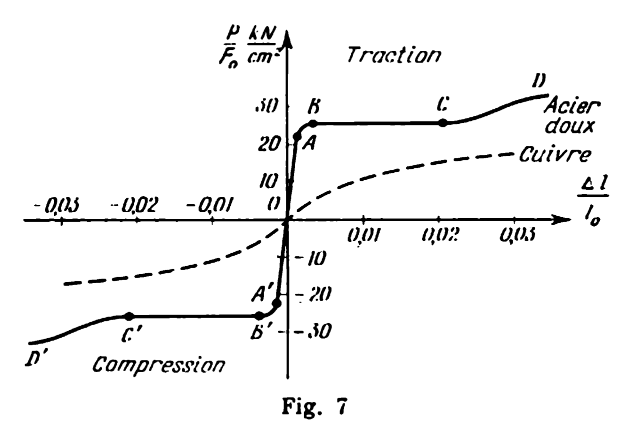


Fig. 7

les déformations résiduelles ou permanentes et les allongements grandissent rapidement. Un *palier d'écoulement BC* apparaît sur la courbe; au-delà de ce palier les contraintes recommencent à augmenter. La partie CD de la courbe répond à l'état de l'écrouissage du matériau. Pour les matériaux envisagés la courbe de compression est en général similaire à la courbe de traction, bien que les contraintes correspondant aux points A', B', C', D' aient une valeur un peu plus élevée que les contraintes correspondant aux points A, B, C, D. Le passage au palier d'écoulement est parfois marqué par un pic aigu. Nous conviendrons d'appeler *limite d'écoulement* la contrainte caractérisant la partie BC de la courbe ([1]).

Pour certains métaux, comme, par exemple, le cuivre recuit, l'aluminium, les aciers hautement alliés etc., la courbe de traction est dépourvue de palier d'écoulement et, parfois, ne présente pratiquement pas de partie rectiligne.

Si l'on diminue la charge, la courbe de retour ABC (fig. 8) sera en principe proche de la ligne droite, cette dernière ayant une pente identique à celle de la ligne du domaine élastique, et la valeur de la déformation résiduelle sera mesurée par la longueur du segment OC.

([1]) Notons que cette définition ne coïncide pas avec la notion courante dans la technique de limite d'écoulement conventionnelle en tant que contrainte correspondant à la déformation résiduelle de 0,2 %.

Les essais de cisaillement pur (torsion d'un tube) se traduisent par des courbes de la déformation tout à fait analogues à celles de la traction.

Les courbes de déformation sont d'habitude schématisées dans la théorie de la plasticité. Un tel schéma de dépendance entre la

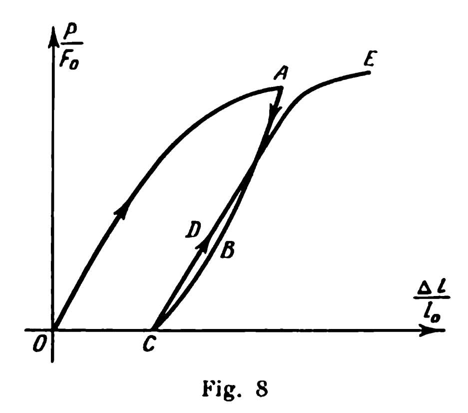


Fig. 8

déformation du cisaillement γ et la contrainte tangentielle τ est montré sur la fig. 9 pour les essais du cisaillement pur. Au début,

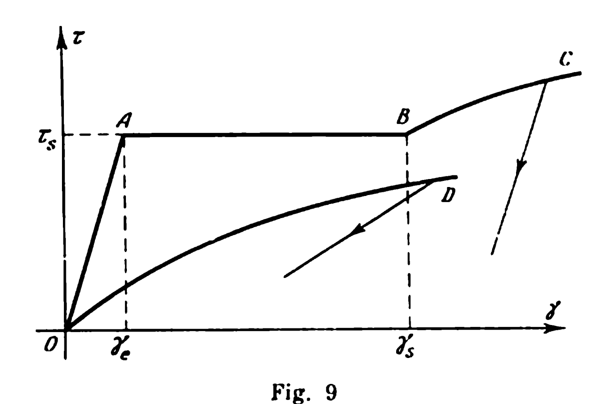


Fig. 9

lorsque $\tau < \tau_s$, le matériau satisfait à la loi de Hooke:

$$\tau = G\gamma. \qquad (6.1)$$

Ensuite, vient la phase d'écoulement AB qui se caractérise par une déformation de cisaillement croissante, la contrainte tangentielle étant constante:

$$\tau = \text{const} = \tau_s. \qquad (6.2)$$

Cet état se prolonge jusqu'à ce que γ n'atteigne la valeur de γ_s que nous conviendrons d'appeler limite de cisaillement à l'écoulement. A partir de cet instant, le matériau passe dans le domaine *BC* de l'écrouissage, où le rapport entre τ et γ peut être représenté sous la forme

$$\tau = g(\gamma)\,\gamma. \tag{6.3}$$

La fonction $g(\gamma)$ est parfois appelée *module de plasticité*; d'après les données expérimentales $0 \leqslant g(\gamma) \leqslant G$. En l'absence de palier d'écoulement, la phase *BC* de l'écrouissage vient immédiatement après la partie *OA* exprimant l'élasticité linéaire.

3. Ecrouissage. Lorsqu'on décharge les éprouvettes métalliques, la courbe de retour *ABC* (fig. 8) est sensiblement rectiligne. Si l'on recharge l'éprouvette, la courbe de charge *CDE* différera très peu de la ligne *ABC*. Ainsi, par suite d'un étirage initial, le métal se comporte comme s'il avait acquis des propriétés élastiques et une limite élastique plus élevée tout en perdant, il est vrai, une partie notable de sa capacité de déformation plastique. Ce phénomène s'appelle *écrouissage.*

Avec le temps, on constate une disparition partielle de l'écrouissage. Ce phénomène, appelé *repos du matériau*, devient de plus en plus apparent lorsque la température augmente. L'écrouissage acquis disparaît sous l'effet d'une température élevée (*recuit du matériau*).

4. Anisotropie de déformation. L'écrouissage est en général orienté. C'est pourquoi, par suite d'une déformation plastique, le matériau acquiert ce que l'on appelle *anisotropie de déformation.* Une des manifestations de ce phénomène est l'*effet de Bauschinger* qui consiste en ce que la déformation plastique préalable d'un signe diminue la résistance du matériau par rapport à la déformation plastique suivante du signe opposé. Ainsi, la traction plastique d'une barre conduit à une diminution notable de la limite d'écoulement de la même barre lors de sa compression ultérieure.

5. Influence de la vitesse de déformation. Si les essais ont lieu dans des intervalles de temps ordinaires et à température ambiante, les propriétés mécaniques de l'acier et des métaux réfractaires en général ne dépendent presque pas de la vitesse de déformation. Sur la fig. 10 sont donnés les résultats des expériences de Siebel et de Pump aux vitesses suivantes de la compression relative: $A \sim 1{,}25\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $B \sim 0{,}2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $C \sim 0{,}025\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, $D \sim$ près de zéro. Cependant, la vitesse des essais revêt une grande importance lorsqu'on a affaire à des métaux très ductiles (plomb, étain, etc.), au cours des essais prolongés de l'acier, du cuivre et d'autres métaux dans des conditions de température élevée et, enfin, pour les grandes vitesses de déformation. L'effet de la vitesse dépend pour beaucoup de la température. En effet, il tombe lorsque baisse la température et, vraisem-

blablement, disparaît tout à fait aux températures suffisamment basses. L'influence de la vitesse proprement dite se traduit par une résistance accrue à la déformation avec l'augmentation de la vitesse de déformation.

Ces faits témoignent que, dans les conditions « ordinaires », la déformation plastique des métaux « rigides » est pratiquement

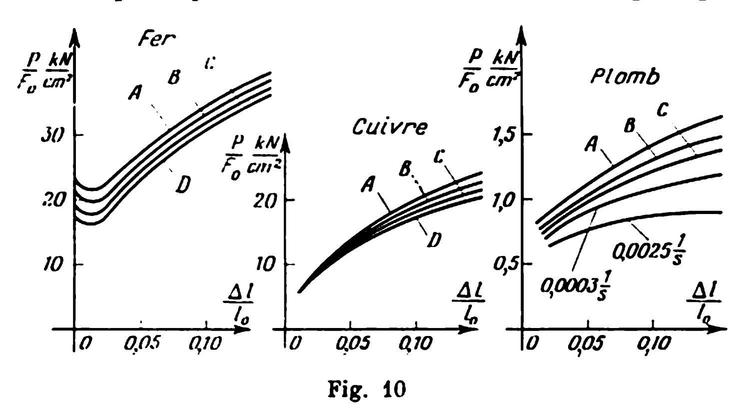


Fig. 10

indépendante du mouvement thermique des atomes (plasticité athermique).

6. Fluage. Aux températures suffisamment élevées, on constate que la déformation plastique croît avec le temps sous l'effet des contraintes les plus insignifiantes. Ce phénomène est appelé *fluage*; il se traduit dans certains cas par des déformations croissantes avec le temps, la charge étant constante, et, dans d'autres, par une décroissance continue des contraintes, la déformation étant constante (*relaxation*). Le fluage détermine la résistance et la durée de vie des machines soumises à des hautes températures. Il convient de noter à ce propos le développement rapide de la *théorie du fluage*.

7. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES DÉFORMATIONS PLASTIQUES AUX ÉTATS DE CONTRAINTE COMPLEXES. MISES EN CHARGE SIMPLE ET COMPLEXE

1. Etudes expérimentales. Un grand nombre d'ouvrages, apparus essentiellement ces dernières décennies, sont consacrés à l'étude des conditions de l'écoulement et de l'écrouissage aux états de contrainte complexes. Les essais de la plupart des chercheurs ont pour objet les tubes à parois minces (fig. 11). On peut, en exerçant une traction, une torsion et une pression intérieure combinées, engendrer un état de contrainte plan (ou plutôt « presque plan ») arbitraire dans les parois du tube. Ainsi, sous l'effet de la poussée axiale P

et du moment de torsion M, nous avons les contraintes (essais $P+M$):

$$\sigma_\varphi \approx 0, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi a h}, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M}{2\pi a^2 h},$$

où a est le rayon moyen du tube et h son épaisseur.

Sous l'effet de la poussée axiale P et de la pression intérieure p (essais $P+p$), nous avons:

$$\sigma_\varphi \approx p\frac{a}{h}, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi a h}, \quad \tau_{\varphi z} \approx 0.$$

La contrainte σ_r, dont l'ordre de grandeur est p, est d'une valeur négligeable par rapport aux contraintes σ_φ, σ_z, puisque $\frac{a}{h} \gg 1$.

On peut juger des lois de la déformation plastique en mesurant les déformations du tube (changements du diamètre, de la longueur

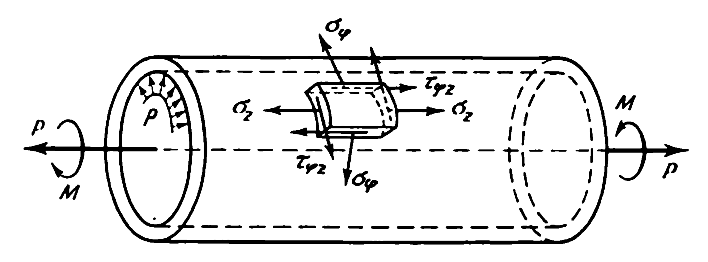


Fig. 11

du tube, de son angle de torsion) et en les comparant aux états de contrainte connus.

Ces dernières années, des essais furent entrepris visant à charger le tube d'une certaine pression extérieure q en plus de la pression intérieure p exercée. On est arrivé à cette occasion à suivre le comportement du matériau lors d'un état de contrainte triaxial. Cet apport de pression extérieure complique notablement les essais.

Des essais ont été faits aussi pour étudier la traction et la torsion des cylindres pleins, subissant une pression latérale. Les essais de ce genre sont faciles à exécuter, mais ils sont moins représentatifs, car la distribution des contraintes dans un cylindre plein est irrégulière et ne peut être calculée directement à partir des charges mesurées.

2. Mises en charge simple et complexe. La mise en charge simple se caractérise par le fait que les composantes de la contrainte augmentent au cours de chaque essai proportionnellement à un paramètre. Il est évident que, lors des essais sur les tubes à parois minces, les charges extérieures augmentent alors aussi proportionnellement à

ce même paramètre. Par conséquent, la forme du tenseur des contraintes et les directions principales de ce dernier restent toujours invariables.

Par contre, lors des mises en charge complexes, les directions des axes principaux et les relations mutuelles des contraintes principales peuvent varier.

Examinons en qualité d'exemple les essais $P + M$. En coordonnées P, M, la mise en charge sera représentée par une certaine courbe OC (fig. 12). La simple mise en charge correspond à un certain rayon, par exemple OO_1. Toutes les autres voies de la mise en charge répondent à la mise en charge complexe.

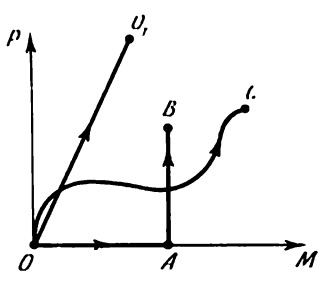


Fig. 12

Il est plus facile de réaliser les essais de mise en charge simple, car dans ce cas la machine d'essai utilisée est plus simple et il suffit d'une seule source de forces (presse hydraulique par exemple).

Nous citerons un exemple de mise en charge complexe. Le cylindre à parois minces est tout d'abord soumis à une torsion et ensuite, à moment M constant, à un effort de traction. Sur la fig. 12, ce cas est représenté par la ligne brisée OAB. Les mises en charge de ce type sont parfois appelées *échelonnées*.

N o t e. Comme il a été constaté plus haut, la pression hydrostatique exerce une influence insignifiante sur le processus de la déformation plastique. Les critères de la mise en charge simple peuvent donc être énoncés sous une forme un peu plus triviale : *lorsque la mise en charge est simple, les composantes du déviateur des contraintes varient proportionnellement au paramètre croissant t*:

$$s_{ij} = s^0_{ij} t,$$

où s^0_{ij} est un déviateur constant.

Dans ce cas, les axes principaux du déviateur des contraintes et le coefficient de Lodé et de Nadaï μ_σ (forme du tenseur des contraintes) restent invariables; la pression moyenne σ peut changer arbitrairement.

8. CONDITIONS D'ÉCOULEMENT. SURFACES ET COURBES D'ÉCOULEMENT

Les courbes de déformation présentées plus haut se rapportaient à l'état de contrainte uniaxial, mais il est important de connaître le comportement du matériau aux *états de contrainte complexes*. Notamment, il convient d'avoir une idée des conditions caractérisant le passage du matériau de l'état élastique à l'état d'écoulement

(palier AB, fig. 9). Ainsi $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_s$ pour la traction simple à l'état d'écoulement et $\tau = \text{const} = \tau_s$ pour le cisaillement pur.

Une question se pose de savoir la forme éventuelle que revêtrait la condition caractérisant le passage au-delà de la limite d'élasticité lors de l'état de contrainte complexe. Cette condition, satisfaisant à l'état d'écoulement, est appelée *condition d'écoulement* (ou de plasticité). Pour les corps isotropes, cette condition sera la fonction symétrique des contraintes principales:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const} = K,$$

où K est la constante du matériau, qui est liée à la limite d'écoulement. Les invariants étant les fonctions symétriques principales des composantes de la contrainte, cette dernière condition peut être représentée aussi sous la forme:

$$f[\sigma, I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K.$$

Nous avons noté plus haut que, dans la plupart des cas, l'influence de la pression moyenne sur le changement de la forme est tellement insignifiante qu'elle peut être négligée. La condition d'écoulement prendra alors la forme:

$$f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = K, \qquad (8.1)$$

c.-à-d. qu'elle ne dépend, en principe, que de la *différence* des contraintes principales. Il est à noter que la condition d'écoulement s'écrit souvent sous une forme plus condensée:

$$f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0,$$

dans laquelle on sous-entend la présence du paramètre K dit « limite d'écoulement ».

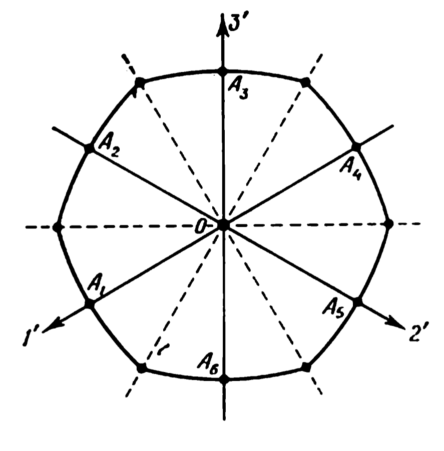


Fig. 13

Si nous profitons de l'interprétation géométrique de l'état de contrainte développée plus haut, l'équation (8.1) sera l'équation d'un cylindre dont l'axe est la droite $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ qui est perpendiculaire au plan du déviateur puisque la pression moyenne n'est pas comprise dans (8.1). Il suffit d'examiner la trace de ce cylindre sur le plan du déviateur. Elle constituera la courbe C symétrique par rapport aux axes *1'*, *2'*, *3'* et que l'on appelle *courbe d'écoulement* (fig. 13).

La courbe d'écoulement C possède les propriétés suivantes:

1) La courbe C ne passe pas par l'origine des coordonnées O, car l'état d'écoulement a lieu lorsque les contraintes tangentielles sont considérables.

2) Admettons que les propriétés du matériau restent les mêmes à la compression et à la traction. La courbe C sera alors symétrique par rapport aux droites perpendiculaires aux axes *1'*, *2'*, *3'*, car l'état d'écoulement a lieu aussi lorsque le signe des contraintes sera inversé.

3) La courbe d'écoulement doit être *convexe*, c.-à-d. qu'elle doit se trouver d'un côté de la tangente (ou de la ligne de base si la courbe C comporte des tronçons rectilignes).

Cette restriction découle de la condition de non-négativité des accroissements du travail de la déformation plastique (*postulat de Drucker*, cf. paragraphe 18).

Les directions principales dans un corps isotrope étant équivalentes et les limites d'écoulement à la traction égales à celles à la compression, la courbe d'écoulement passera alors par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ appartenant aux axes *1'*, *2'*, *3'*, qui sont équidistants de l'origine des coordonnées (fig. 13).

Il en résulte que la courbe d'écoulement se compose de douze arcs identiques. Ainsi, il suffit donc de suivre le comportement du matériau sur un de ces arcs pour l'étude expérimentale des conditions d'écoulement.

Nous examinerons plus bas (au paragraphe 16) certaines généralisations se rapportant aux conditions de plasticité.

9. CONDITIONS DE CONSTANCE POUR LA CONTRAINTE TANGENTIELLE MAXIMALE (PRINCIPE DE TRESCA — SAINT-VENANT)

Se basant sur les résultats de ses essais portant sur l'écoulement des métaux par des orifices, l'ingénieur français H. Tresca avança l'hypothèse suivant laquelle la contrainte tangentielle maximale a la même valeur pour un matériau donné en état d'écoulement dans tous les points du milieu. Cette valeur, comme il en résulte de l'examen de la traction simple, est égale à $\frac{\sigma_s}{2}$. Un peu plus tard, Saint-Venant proposa la formule mathématique de cette condition pour la déformation plane.

Dans le cas triaxial, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2-\sigma_3|\leqslant\sigma_s,\\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3-\sigma_1|\leqslant\sigma_s,\\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1-\sigma_2|\leqslant\sigma_s,\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

où d'ailleurs (ainsi que dans le paragraphe suivant) les conditions $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ peuvent ne pas être respectées (sinon nous aurons toujours $2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3$).

Dans l'*état élastique*, toutes les conditions (9.1) sont vérifiées avec un signe d'inégalité.

Dans l'*état d'écoulement*, il doit y avoir une égalité pour une ou deux de ces conditions. Puisque $\sigma_s > 0$, il ne peut pas y avoir en même temps une égalité pour les trois contraintes tangentielles principales de la constante σ_s, comme on ne peut pas réduire à zéro la somme d'un nombre impair de termes à module égal, alors que $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

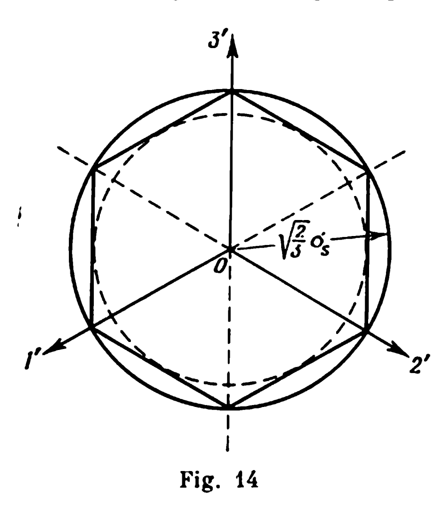


Fig. 14

La relation suivante entre la limite d'écoulement σ_s à la traction et la limite d'écoulement τ_s au cisaillement pur découle de (9.1) (rappelons que dans ce cas $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, c.-à-d. $\tau_{max} = \tau$):

$$\sigma_s = 2\tau_s. \qquad (9.2)$$

Les conditions (9.1) définissent un prisme hexagonal régulier dont l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ est perpendiculaire au plan du déviateur. (Il est facile de voir, par exemple, que l'équation $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_s$ représente un couple de plans parallèles au plan qui renferme l'axe des σ_1 et la ligne $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.) La projection du prisme sur le plan du déviateur est un hexagone régulier (fig. 14). Il est géométriquement évident qu'il est impossible de satisfaire à la fois aux trois signes d'égalité dans (9.1).

Les plans mentionnés découpent sur les axes σ_1, σ_2, σ_3 les segments de longueur σ_s. Il est facile de voir que le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone est égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ puisque $\cos(\sigma_3, 3') = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Notons encore le fait que la contrainte tangentielle maximale est égale à la demi-différence des contraintes principales maximale et minimale et que la *contrainte principale intermédiaire n'a pas d'effet sur l'état d'écoulement*.

La condition de Tresca — Saint-Venant caractérise en gros de manière satisfaisante l'état d'écoulement du matériau et s'accorde avec les observations sur les lignes de Lüders. Des recherches expérimentales plus minutieuses font apparaître des écarts systématiques insignifiants du comportement des métaux malléables dans l'état

d'écoulement de la condition de Tresca — Saint-Venant. En particulier les données expérimentales témoignent du fait que la contrainte principale intermédiaire exerce une certaine influence sur l'état d'écoulement.

10. CONDITIONS DE CONSTANCE POUR L'INTENSITÉ DES CONTRAINTES TANGENTIELLES (PRINCIPE DE VON MISES)

Les conditions d'écoulement de Tresca — Saint-Venant, exprimées par des inégalités, sont applicables avec certaines difficultés mathématiques aux problèmes tridimensionnels. Ceci a suggéré à von Mises [1] l'idée de remplacer le prisme hexagonal par le cylindre circulaire circonscrit :

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2. \qquad (10.1)$$

L'intersection de ce cylindre par le plan du déviateur est un cercle circonscrit à un hexagone (fig. 14).

Le principe de von Mises peut être écrit sous la forme :

$$T=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \qquad (10.2)$$

Dans le cas du cisaillement pur $T=\tau$ et on tire de la relation (10.2) :

$$\tau_s=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}=0{,}577\sigma_s. \qquad (10.3)$$

Von Mises considérait que la condition de Sait-Venant était exacte et que l'équation (10.1) était approchée. Néanmoins, il a été démontré par de nombreuses expériences que le principe de von Mises satisfait un peu mieux à l'état d'écoulement des matériaux polycristallins que la condition de constance de la contrainte tangentielle maximale. En particulier, la relation (10.3) s'accorde mieux que (9.2) avec les données expérimentales sur les métaux malléables. De la sorte, la condition de von Mises acquit une importance indépendante. Par contre, il convient de noter que, dans certains cas, la condition de Tresca — Saint-Venant satisfait mieux aux données expérimentales. Nous pouvons donc considérer les conditions de von Mises et de Tresca — Saint-Venant comme des énoncés équivalents de la condition d'écoulement.

Notons que le premier membre de l'équation (10.1) correspond à l'énergie de la déformation élastique au facteur constant près. Ainsi, pour en *arriver* à l'état d'écoulement, il faut une certaine énergie constante de déformation élastique (réversible).

---

[1] On apprit plus tard qu'une condition proche de (10.1) avait été proposée déjà en 1904 par Huber.

Il a déjà été noté au paragraphe 1 que les grandeurs T et τ_{max} étaient proches l'une de l'autre. Il en résulte que la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant ne diffère que très peu de celle de von Mises. On peut réduire davantage cette différence en prenant un cercle se trouvant à mi-chemin entre les cercles circonscrit et inscrit (fig. 14), ce qui correspond à la formule approchée $T \approx \approx 1{,}08\tau_{max}$, envisagée au paragraphe 1.

11. CONDITIONS DE L'ÉCROUISSAGE. SURFACE DE CHARGE

1. Mise en charge et décharge. La déformation plastique conduit à l'écrouissage du métal dont la limite élastique augmente (dans le sens de la déformation). Lors de la traction simple (fig. 15, *a*), la limite élastique est égale à σ_{1M} pour l'état obtenu M ; le domaine des valeurs de O à σ_{1M} peut être appelé élastique. Il ne s'agit que d'une déformation élastique si la contrainte varie dans les limites

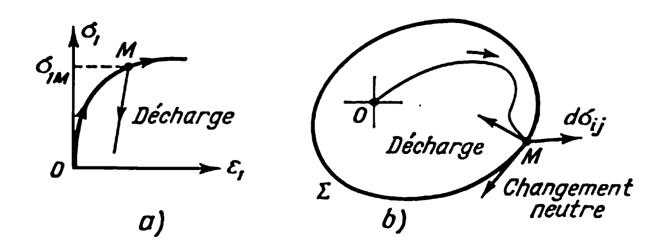


Fig. 15

indiquées. La déformation plastique continuera si l'on poursuit la mise en charge au-delà du point M. Ainsi, la contrainte σ_{1M} serait en quelque sorte la limite élastique à un moment donné dépendant de la déformation plastique antérieure et permettant de distinguer la mise en charge (accompagnée d'une déformation plastique) et la décharge (qui est purement élastique).

Il est bien plus difficile de différencier ces deux notions pour les états de contrainte complexes. Par exemple, des états divers de contrainte et de déformation peuvent répondre aux mêmes valeurs des intensités T et Γ.

Il en découle la question suivante. Soit un corps se trouvant dans l'état plastique caractérisé au moment donné par les contraintes σ_{ij} auxquelles on communique des accroissements infiniment petits $d\sigma_{ij}$ (*charge complémentaire*). Cette charge complémentaire peut-elle conduire à une déformation plastique supplémentaire?

La complexité des phénomènes physiques se déroulant lors de la déformation plastique et l'insuffisance des données expérimentales ne permettent pas de répondre d'une manière exhaustive à cette

question. Toutefois, le critère recherché peut être indiqué pour un ensemble suffisamment grand des conditions de charge.

2. Surface de charge. Lorsque l'on passe à l'état de contrainte complexe, on introduit la notion de *surface de charge* Σ (appelée moins souvent surface d'écoulement). Dans l'espace des contraintes σ_{ij}, cette surface, à l'état donné du milieu, sépare le domaine de la déformation élastique de celui de la déformation plastique (fig. 15, *b*). L'origine des coordonnées O correspond aux contraintes nulles. La charge complémentaire $d\sigma_{ij}$ conduit soit à la déformation élastique (décharge, si le vecteur $d\sigma_{ij}$ est dirigé à l'intérieur de Σ), soit à la poursuite de la déformation plastique (mise en charge, si le vecteur $d\sigma_{ij}$ est dirigé à l'extérieur de Σ). L'accroissement $d\sigma_{ij}$, qui se trouve dans le plan tangent à la surface de charge (*changement neutre* [1])), ne se traduit que par une déformation élastique (*condition de continuité*, paragraphe 17).

La surface de charge n'étant pas fixée (comme dans le cas de la plasticité parfaite), elle se dilate d'une manière quelconque et se déplace au fur et à mesure du développement de l'écrouissage. En principe, la forme et la position de la surface de charge Σ dépendent non seulement de l'état de contrainte à un moment donné, mais sont aussi héréditaires de l'évolution précédente de la déformation. La surface de charge est convexe (paragraphe 18).

Nous nous bornerons ici à examiner la variante la plus simple de la surface de charge. Les questions relatives à l'élaboration des surfaces de charge plus générales, et qui tiennent compte de l'évolution de l'anisotropie de déformation, seront exposées au paragraphe 17.

Soit Σ la surface de charge d'un matériau soumis à une déformation plastique, qui se dilate uniformément (de manière *isotrope*); son équation pourra alors être de la forme

$$f\,[I_2\,(D_\sigma),\ I_3\,(D_\sigma)] = F\,(q), \tag{11.1}$$

où F est la fonction croissante d'un certain paramètre q caractérisant la déformation plastique précédente. La condition d'écoulement (8.1) résulte de (11.1) lorsque $F\,(q) = \text{const} = K$.

3. Décharge. La déformation d'un élément qui se produit lorsqu'on supprime la charge est due à l'énergie potentielle élastique accumulée par cet élément ; il va de soi que l'on ne peut en juger que d'après les données expérimentales.

Sur la base de ces données, nous pouvons admettre que les composantes de la déformation élastique sont indépendantes de la

---

[1] Citons l'exemple de la charge neutre : une barre, soumise à une traction jusqu'à l'état de contrainte σ_z, reçoit la charge complémentaire d'une petite torsion. Nous aurons alors $\sigma_z \neq 0$, $d\sigma_z = 0$, $\tau = 0$, $d\tau \neq 0$ et, vraisemblablement, $dT \sim \sigma_z d\sigma_z + \tau d\tau = 0$, cf. paragraphe 12.

déformation plastique (étant donné que la pente de la branche AC, fig. 8, est à peu près égale à celle de la zone élastique). Nous pouvons donc admettre que les composantes de la déformation totale ε_{ij} (si cette dernière est suffisamment petite) représentent la somme des composantes de la déformation élastique ε^e_{ij} et de la déformation plastique ε^p_{ij}:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}. \qquad (11.2)$$

Les composantes de la déformation élastique sont liées à celles de la contrainte par la loi de Hooke généralisée; les valeurs des constantes élastiques peuvent être considéreés invariables. Les seuls changements apparaissant à la décharge sont ceux qui affectent les composantes de la déformation élastique, c.-à-d.

$$\varepsilon^r_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ij}\right). \qquad (11.3)$$

Les composantes de la déformation totale à la décharge se définissent [1] conformément à (11.2); les composantes ε^p_{ij} restent alors invariables et sont égales aux déformations plastiques correspondantes constatées à l'instant initial de la décharge. On trouve les composantes ε^e_{ij} d'après les équations (11.3), où σ_{ij} sont les contraintes correspondant à la *fin de la décharge*.

12. CONDITIONS D'ÉCROUISSAGE ISOTROPE

1. Variante simple de la condition d'écrouissage isotrope. L'expression simplifiée de la condition d'écrouissage isotrope (11.1) ne contient que l'invariant quadratique du déviateur des contraintes. Dans ce cas, la condition (11.1) peut être écrite sous la forme:

$$T = f(q). \qquad (12.1)$$

La surface de charge est une surface cylindrique circulaire dont l'axe coïncide avec l'axe hydrostatique (cf. paragraphe 1). En déformation plastique, le rayon de la surface cylindrique augmente. On obtient différentes conditions d'écrouissage en fonction du choix de son paramètre q.

Notons que, tout comme pour la condition d'écoulement, on peut, dans les conditions d'écrouissage, passer à une grandeur voisine qui est la contrainte tangentielle maximale τ_{max} [l'influence de $I_3(D_\sigma)$ est alors ressentie].

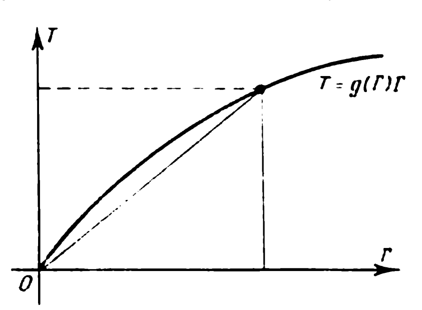
2. Hypothèse d'une « courbe unique ». Si, en qualité de mesure d'écrouissage, on prend la valeur atteinte par l'intensité de défor-

[1] On écrira la relation (11.2) en accroissements, cf. (13.2), si les déformations ne sont pas petites.

mation du cisaillement Γ, on obtiendra la relation de la forme:

$$T = g(\Gamma)\,\Gamma, \tag{12.2}$$

où $g(\Gamma)$ est une fonction positive quelconque caractéristique du matériau donné. Si la courbe (12.2) est construite dans le système des coordonnées T, Γ, on obtiendra toujours la même courbe (« unique ») pour divers états de contrainte. Son allure ne dépendant pas de l'état de contrainte, on peut définir $g(\Gamma)$, par exemple, à partir d'un essai de traction simple ou de cisaillement pur (cf. paragraphe 6).



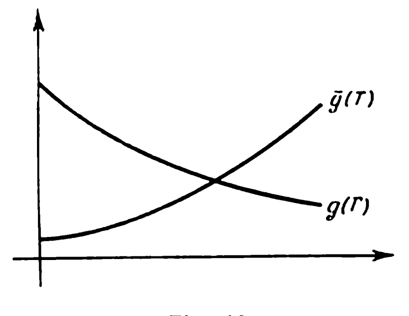


Fig. 16

En principe, l'équation (12.2) peut être considérée comme étant une condition générale englobant les différentes phases de la déformation. Ainsi, supposant que

$$g(\Gamma) = \frac{\tau_s}{\Gamma},$$

nous obtiendrons la condition d'écoulement de von Mises: $T = \tau_s$; posant

$$g(\Gamma) = G,$$

on en vient au cas du milieu élastique de Hooke, et alors $T = G\Gamma$.

La fonction $g(\Gamma)$ est parfois appelée *module de plasticité* (cf. paragraphe 6); pour les matériaux usuels $\frac{dT}{d\Gamma} \geqslant 0$, le signe d'égalité ayant lieu seulement dans l'état d'écoulement. En écrouissage, la concavité de la courbe de déformation est dirigée vers le bas (fig. 16). En conséquence, le coefficient angulaire de la tangente est plus petit que celui de la sécante, c.-à-d.

$$\frac{dT}{d\Gamma} - \frac{T}{\Gamma} = g'(\Gamma)\,\Gamma < 0.$$

Ainsi, $g'(\Gamma) < 0$ et $g(\Gamma)$ est la fonction décroissante de Γ, avec $0 < g(\Gamma) \leqslant G$; il existe une fonction inverse:

$$\Gamma = \bar{g}(T)\,T, \tag{12.3}$$

il est alors facile de constater que

$$\bar{g}(T) \geqslant \frac{1}{G}, \quad \bar{g}'(T) > 0, \quad g(\Gamma)\,\bar{g}(T) = 1.$$

La condition d'écrouissage (12.2) est vérifiée avec une précision pratiquement suffisante pour la *mise en charge simple* d'un matériau isotrope.

Il convient de souligner aussi que la relation (12.2) est souvent appliquée lorsqu'il y a un pivotement des axes de contrainte principaux et une distorsion de l'homothétie de l'état de contrainte. La cause en réside dans le fait que les expériences confirment également la condition d'écrouissage (12.2) pour des mises en charge un peu plus complexes que les mises en charge simples.

L'écrouissage se développe et l'intensité T des contraintes tangentielles augmente avec l'accroissement de l'intensité des déformations de cisaillement Γ. Par conséquent, pour la mise en charge $dT > 0$, pour la décharge $dT \leqslant 0$, des changements neutres se produisant pour $dT = 0$.

3. Condition énergétique de l'écrouissage. La mesure d'écrouissage q peut être exprimée par le travail de la déformation plastique:

$$A_p = \int \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}^p. \tag{12.4}$$

La condition d'écrouissage (12.1) prendra alors la forme:

$$T = f(A_p). \tag{12.5}$$

La fonction f peut être déterminée, par exemple, d'après la courbe de traction; alors $T = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}$, et le travail A_p est la fonction de l'allongement relatif ε_1. La condition d'écrouissage (12.5) peut être écrite aussi sous la forme:

$$A_p = \Phi(T),$$

où $\Phi(T)$ est la fonction caractéristique du matériau donné, indépendante de la nature de l'état de contrainte.

Le travail de la déformation plastique étant positif, il vient $\Phi(T) > 0$. Pour une déformation plastique qui se développe, le travail A_p augmente et la surface de charge devient plus importante, c.-à-d. que l'intensité T s'accroît. Par conséquent, $\Phi'(T) > 0$. Pour la mise en charge on a $dA_p = \Phi'(T)\, dT > 0$ et

$$dT > 0. \tag{12.6}$$

Le corps se décharge selon une loi élastique lorsque $dT < 0$. L'accroissement du travail de la déformation plastique se réduit à zéro dans le cas $dT = 0$. Les changements neutres $dT = 0$ mènent à la déformation élastique.

La condition énergétique de l'écrouissage est plus générale que la condition précédente (12.2) et est confirmée par les essais portant sur une classe un peu plus vaste de charges. Toutefois il ne faut pas oublier que la condition (12.5) ne tient pas compte de l'anisotropie de déformation et qu'elle ne peut être appliquée que

pour des voies de charge relativement simples (sans brusques zigzags et en l'absence de changements notables dans la direction de la trajectoire de la charge). Il faut aussi retenir que les déplacements notables sur la surface de charge sont accompagnés des déformations plastiques.

4. Condition d'Odqvist. On peut considérer comme unité d'écrouissage q le paramètre

$$q = \int \overline{d\Gamma_p} = \int \sqrt{2\, d\varepsilon_{ij}^p\, d\varepsilon_{ij}^p}, \tag{12.7}$$

caractérisant la « longueur de la voie» que suit la déformation plastique.

13. THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT PLASTIQUE

1. Relations générales. La déformation plastique est un processus irréversible, la plus grande partie du travail de déformation se transforme en chaleur. Les contraintes à l'état final d'un système dépendent du trajet de la déformation. Par conséquent, les équations décrivant la déformation plastique, en principe, ne peuvent pas être considérées comme des relations finies liant les composantes de la contrainte à celles de la déformation (de façon analogue aux relations de la loi de Hooke), mais elles doivent être des relations différentielles (et d'ailleurs non intégrables).

Les équations de la théorie de l'écoulement plastique établissent une liaison entre les accroissements infiniment petits des déformations et des contraintes, les contraintes elles-mêmes et certains paramètres de l'état plastique.

Examinons les données de base de cette théorie:

1) *Le corps est isotrope.*

2) *Le changement relatif de volume est petit et représente une déformation élastique proportionnelle à la pression moyenne*:

$$\varepsilon = 3k\sigma,$$

ou (13.1)

$$d\varepsilon = 3k\,d\sigma.$$

3) *Les accroissements totaux des composantes $d\varepsilon_{ij}$ de la déformation sont représentés par la somme des accroissements des composantes $d\varepsilon_{ij}^e$ de la déformation élastique et de celles de la déformation plastique $d\varepsilon_{ij}^p$*

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \tag{13.2}$$

Les accroissements des composantes de la déformation élastique sont liés à ceux des composantes de la contrainte par la loi de Hooke

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G}\left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\,d\sigma\right). \tag{13.3}$$

4) *Le déviateur des contraintes D_σ et le déviateur des accroissements de la déformation plastique $D^p_{d\varepsilon}$ sont proportionnels,* c.-à-d

$$D^p_{d\varepsilon} = d\lambda \cdot D_\sigma, \tag{13.4}$$

où $d\lambda$ est un facteur scalaire quelconque infiniment petit. Ce principe généralise les résultats des expériences sur la mise en charge complexe au cours desquelles variaient les directions des axes principaux et les relations des contraintes principales. Conformément à ces résultats, les accroissements des composantes de la déformation plastique (« vitesses de la déformation plastique ») sont proportionnels aux contraintes à l'instant donné. Autrement dit, l'état de contrainte définit les accroissements instantanés des composantes de la déformation plastique.

On obtient de (13.4) les relations (puisque $d\varepsilon^p = 0$):

$$d\varepsilon^p_{ij} = d\lambda \cdot s_{ij}. \tag{13.5}$$

Procédant au calcul de l'accroissement du travail de la déformation plastique, on trouve:

$$dA_p = \sigma_{ij}\, d\varepsilon^p_{ij} = d\lambda \cdot \sigma_{ij} s_{ij} = 2d\lambda \cdot T^2. \tag{13.6}$$

Ainsi, le facteur $d\lambda$ est lié à la valeur de l'accroissement du travail de la déformation plastique; comme $dA_p \geqslant 0$, on a également $d\lambda \geqslant 0$. Conformément à la relation (13.2), on obtient les accroissements totaux des composantes de la déformation:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\lambda \cdot s_{ij}, \tag{13.7}$$

où les accroissements des composantes de la déformation élastique seront pris d'après la loi de Hooke (13.3).

Par la suite, il est facile de trouver que l'accroissement du travail de la déformation est égal à

$$dA = dA_e + dA_p, \tag{13.8}$$

où dA_p est donné par la formule (13.6), tandis que l'accroissement du travail de la déformation élastique est égal à $dA_e = d\Pi$, où le potentiel élastique se présente comme suit:

$$\Pi = \frac{3}{2} k\sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2. \tag{13.9}$$

Si $d\lambda = 0$ les équations (13.7) correspondent alors à la loi de Hooke écrite sous une forme différentielle. Dans le cas général, les équations (13.7) sont incomplètes puisqu'elles contiennent un facteur inconnu et pour la définition de ce facteur il faut disposer d'une relation complémentaire.

2. Etat d'écoulement, équations de Prandtl—Reuss. Prenons en qualité de relation complémentaire la condition d'écoulement de

von Mises:

$$T = \tau_s.$$

Alors

$$d\lambda = \frac{dA_p}{2\tau_s^2}, \tag{13.10}$$

c.-à-d. que le facteur $d\lambda$ est proportionnel à l'accroissement du travail de la déformation plastique; cet accroissement étant défini par la formule $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$, il n'y a pas de rapport univoque entre les accroissements des composantes de la déformation et les composantes de la contrainte et leurs accroissements dans l'état d'écoulement considéré (¹).

Si la condition de von Mises est vérifiée, alors $dT = 0$ et il y a déformation plastique. Par contre si $dT < 0$, le milieu sort de l'état d'écoulement et la décharge se produit selon la loi de Hooke.

Les équations (13.7) pour la condition d'écoulement de von Mises ont été proposées par Reuss [28] en 1930; pour le problème plan, ces équations ont été élaborées par Prandtl en 1924.

3. Théorie de la plasticité de Saint-Venant — von Mises. Si, dans les équations de Prandtl — Reuss, on néglige les composantes de la déformation élastique (ce qui est admissible pour une déformation plastique avancée), on obtiendra *les équations de la théorie de la plasticité de Saint-Venant — von Mises*:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \cdot s_{ij},$$

écrites d'habitude après division par dt sous la forme:

$$\xi_{ij} = \lambda' s_{ij}, \tag{13.11}$$

où le facteur

$$\lambda' = \frac{1}{2\tau_s^2} \frac{dA_p}{dt} = \frac{1}{2\tau_s^2} \sigma_{ij}\xi_{ij} = \frac{1}{2\tau_s^2} s_{ij}\xi_{ij}$$

est proportionnel à la puissance de la déformation plastique, c.-à-d. qu'il caractérise la dissipation. Eliminant dans la dernière relation les composantes de la contrainte à l'aide de (13.11), on trouve aisément:

$$\lambda' = \frac{H}{2\tau_s}.$$

Par conséquent, les équations (13.11) peuvent être représentées encore comme suit:

$$\frac{\xi_{ij}}{H} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s}. \tag{13.12}$$

(¹) Cette propriété peut être considérée comme la définition d'un corps plastique parfait; dans ce cas la condition d'écoulement en sera la conséquence, cf. [61].

Les équations (13.11) pour le cas de la déformation plane sous la condition d'écoulement τ_{max} = const ont été déduites par Saint-Venant [187] en 1871. Dans le cas général, ces équations ont été établies par M. Levy [171] et R. von Mises [177].

Il est évident que les vitesses de déformation ξ_{ij} ne sont pas définies de façon univoque dans le cas des contraintes. Par contre, s'il s'agit des vitesses de déformation ξ_{ij}, les composantes du déviateur des contraintes s_{ij} le seront. Il est facile de se convaincre que *les composantes s_{ij} définies par les formules* (13.12) *satisfont identiquement à la condition d'écoulement de von Mises.* Notons aussi que dans l'état d'écoulement (c.-à-d. si la condition d'écoulement de von Mises est vérifiée) l'indétermination des composantes de la vitesse de déformation, liée à celle du facteur λ', est nécessaire pour pouvoir réaliser les conditions de compatibilité de la déformation.

Les équations de Saint-Venant — von Mises sont d'un usage très courant dans la théorie mathématique de la plasticité et dans ses diverses applications.

4. Etat d'écrouissage. Prenons en qualité de relation complémentaire la condition de l'écrouissage isotrope (12.5) suivant laquelle

$$dA_p = \Phi'(T)\, dT.$$

Introduisant cette expression dans (13.6) et désignant

$$\frac{\Phi'(T)}{2T^2} = F(T),$$

on obtient:

$$d\lambda = F(T)\, dT. \qquad (13.13)$$

Ainsi,

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^{e}_{ij} + F(T)\, dT \cdot s_{ij}. \qquad (13.14)$$

Ces relations sont valables pour

$$dT \geqslant 0.$$

Si $dT = 0$, on a des variations neutres de l'état de contrainte et les accroissements des composantes de la déformation doivent être liés par la loi de Hooke aux accroissements des composantes de la contrainte puisque les variations neutres se déroulent de façon élastique (cf. paragraphe 12). Les équations (13.14) sont en accord avec ces conclusions.

Une décharge se produit pour $dT < 0$, ce qui est conforme à la loi de Hooke (13.3).

Notons que *dans le cas de l'écrouissage les relations obtenues définissent le rapport univoque entre les accroissements des composantes de la déformation et les contraintes et leurs accroissements.*

Dans l'état d'écrouissage, il n'existe pas de condition pouvant lier les composantes de la contrainte (comme dans le cas de la plasticité parfaite), et le facteur $d\lambda$ est bien déterminé.

Ensuite, lors de la transition de la mise en charge aux variations neutres et à la décharge, les accroissements des composantes de la déformation varient de façon continue, ce qui ne se produit pas pour les équations de la théorie des déformations plastiques (cf. paragraphe 14).

5. Considérations finales. Les équations de Prandtl — Reuss (13.7) dans le cas de la plasticité parfaite et les équations (13.14) dans le cas de l'écrouissage relient les composantes de la contrainte avec les accroissements infiniment petits des composantes de la contrainte et de la déformation, ce qui revient à dire qu'elles ne sont pas des relations finies (à la différence des équations de la théorie des déformations plastiques, paragraphe 14). Les relations (13.7) et (13.14), à proprement parler, ne sont pas intégrables, autrement dit, elles ne se réduisent pas aux relations finies entre les composantes de la contrainte et celles de la déformation. Cette propriété mathématique reflète la dépendance des résultats de l'histoire de la déformation. Si, par exemple, dans l'espace des contraintes nous passons d'un certain point initial O (fig. 17), caractérisé par des contraintes nulles, au point O_1 (aux contraintes $\sigma_{ij}^{(1)}$) par les deux voies I et II, les composantes de la déformation en O_1, d'après les équations de la théorie d'écoulement plastique, seront différentes.

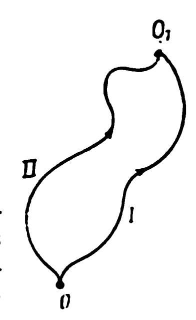


Fig. 17

Les équations (13.7) et (13.14) ne comprennent pas le paramètre temps; cependant, on peut en principe passer des accroissements $d\varepsilon_{ij}$ aux vitesses de déformation ξ_{ij} après avoir divisé ces équations par dt. Les équations évoqueront alors apparemment les équations de l'écoulement du fluide visqueux. Cette analogie justifie dans une certaine mesure l'appellation de la théorie d'écoulement plastique. Il convient de souligner qu'on entend ici par variable t le temps ou le paramètre de la charge, croissant de façon monotone, ou bien enfin une autre grandeur quelconque croissant de la même façon (par exemple, la dimension caractéristique de la zone plastique). Le passage aux « vitesses de déformation » est parfois commode, car il permet d'utiliser la terminologie concrète de l'hydrodynamique. Quant aux équations de la théorie d'écoulement plastique, elles diffèrent essentiellement des équations de l'écoulement visqueux. Contrairement à ces dernières, on peut toujours, dans les équations de l'écoulement plastique, négliger dt et en revenir aux formules (13.7), (13.14) où le paramètre de temps est absent.

Par la suite, pour être plus bref, on parlera de la *théorie d'écoulement* (au lieu de la théorie d'écoulement plastique). Evidemment, cette expression n'est pas très heureuse, mais elle a le mérite d'être

concise, et d'ailleurs elle est d'un usage courant en Union Soviétique et dans d'autres pays (flow theory).

Dans le cas de l'écrouissage, les déformations peuvent être calculées si l'on connaît les voies de charge, c.-à-d. si l'on pose $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$, où t est un paramètre quelconque (par exemple, le temps); on peut aussi en principe trouver les contraintes si l'on connaît la voie de déformation, c.-à-d. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$.

Les équations de la théorie de la plasticité de Saint-Venant — von Mises ont une structure beaucoup plus simple et représentent les relations finies entre les composantes de la contrainte et celles de la vitesse de déformation. Il convient de souligner que, dans ces équations également, le paramètre temps n'est pas obligatoire et peut être éliminé (division par dt) ou remplacé par un paramètre quelconque convenable à variation monotone.

14. THÉORIE DES DÉFORMATIONS PLASTIQUES

1. Généralités. Envisageons la traction lente d'une barre (fig. 18, *a*). La mise en charge se produit le long du tronçon de la courbe OAB et à la décharge correspond la ligne BC. L'aire $OABC$ représente le travail perdu de la déformation. Comme le montrent

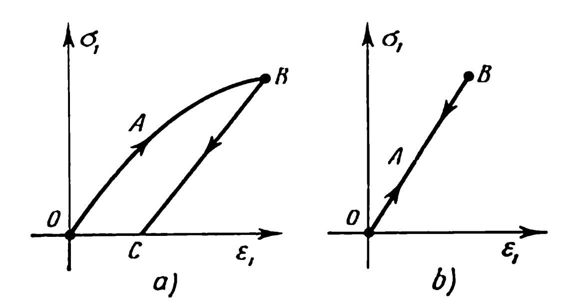


Fig. 18

les résultats des études expérimentales, la plus grande partie de ce travail se transforme en chaleur mais, en l'absence d'échange thermique, elle provoque un faible échauffement de l'éprouvette (pour une déformation $\varepsilon_1 = 4\ \%$, cet échauffement sera d'environ 2 °C). C'est pourquoi, pour l'accroissement monotone de la charge extérieure, il est indifférent de savoir où se perd le travail de la déformation: qu'il se dissipe en chaleur ou qu'il s'accumule sous forme d'énergie potentielle élastique de la barre, car l'allure de la courbe OAB restera inchangée. Par contre, dans le cas de la décharge où la déformation d'un milieu est due à l'énergie élastique accumulée dans ce milieu, la dissipation de l'énergie qui se produit acquiert

une importance primordiale, et plus cette dissipation est grande, plus la ligne de retour BC déviera de la ligne de charge OAB. Ainsi, l'équation $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ décrivant la courbe de charge OAB peut représenter aussi bien la déformation plastique que la déformation élastique non linéaire d'une barre. Partant de cette remarque, on peut tenter de construire les équations de la déformation plastique sous forme de relations finies entre les contraintes et les déformations. Les équations de ce genre seraient sensiblement plus simples que les équations décrivant la théorie d'écoulement plastique. Suivant cette idée, nous envisagerons les équations de la déformation plastique comme une certaine généralisation de la loi de Hooke. Adoptons les conditions initiales suivantes:

1) *Le corps est isotrope.*

2) *La variation relative du volume s'exerce dans le cadre de la déformation élastique proportionnelle à la pression moyenne*:

$$\varepsilon = 3k\sigma. \tag{14.1}$$

Cette hypothèse, comme nous l'avons déjà noté, est bien confirmée par des études expérimentales.

3) *Les déviateurs des déformations et des contraintes sont proportionnels*:

$$D_\varepsilon = \psi D_\sigma. \tag{14.2}$$

Ainsi, les éléments du déviateur des déformations sont égaux aux éléments correspondants du déviateur des contraintes multipliés par le scalaire ψ, ce dernier étant une certaine fonction, non encore déterminée, des invariants des tenseurs des contraintes et des déformations. Il est évident que les déviateurs des déformations et des contraintes sont coaxiaux (c.-à-d. qu'ils ont les mêmes directions principales), et que leurs valeurs principales sont respectivement proportionnelles, à savoir:

$$e_i = \psi s_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14.3}$$

Il en résulte immédiatement que les glissements principaux sont proportionnels aux contraintes tangentielles principales ou, autrement dit, que les diagrammes de Mohr pour les états de contrainte et de déformation sont homothétiques, c.-à-d.

$$\mu_\varepsilon = \mu_\sigma.$$

Supposons que $\psi = \text{const} = \frac{1}{2G}$, nous en venons à la loi de Hooke (5.2). Ainsi, l'équation (14.2) représente une généralisation simple et naturelle de cette loi.

Posant ensuite que $\psi = \frac{1}{2G} + \varphi$, nous présenterons les composantes de la déformation sous la forme d'une somme des composantes

des déformations élastique ε^e_{ij} et plastique:

$$\varepsilon^p_{ij} = e^p_{ij} = \varphi s_{ij}. \quad (14.4)$$

La troisième condition doit être interprétée comme une certaine idéalisation des résultats des études expérimentales.

Ecrivons l'équation (14.2) en composantes:

$$e_{ij} = \psi s_{ij}. \quad (14.5)$$

Eliminant la dilatation cubique de la relation obtenue à l'aide de (14.1), il est aisé de trouver les relations de Hencky [155]:

$$\varepsilon_{ij} = k\sigma\delta_{ij} + \psi s_{ij}. \quad (14.6)$$

Il n'est pas difficile non plus de résoudre la relation (14.5) par rapport aux contraintes:

$$\sigma_{ij} = \frac{\varepsilon}{3k}\delta_{ij} + \frac{1}{\psi} e_{ij}. \quad (14.7)$$

Calculant à l'aide de (14.5) l'intensité des déformations de glissement, on obtient la relation importante:

$$\Gamma = 2\psi T. \quad (14.8)$$

Calculons maintenant à l'aide de (14.6) l'accroissement du travail de déformation:

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\,(U + \psi T^2) + T^2\, d\psi, \quad (14.9)$$

où U est l'énergie élastique de la compression volumique:

$$U = \frac{3}{2} k\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{6k}. \quad (14.10)$$

Eliminant la fonction ψ dans (14.9), on trouve:

$$dA = \sigma\, d\varepsilon + T\, d\Gamma. \quad (14.11)$$

Le premier terme est ici l'accroissement de l'*énergie élastique de la compression volumique*, le second est l'*accroissement du travail de déformation de la géométrie du corps.*

Les équations obtenues ne sont pas complètes, car elles contiennent une fonction ψ inconnue dont la définition nécessite une relation complémentaire de la forme

$$\psi = \psi\,(T,\ \Gamma,\ \mu_\sigma). \quad (14.12)$$

Les invariants σ, ε ne figurent pas dans cette relation puisque l'on peut négliger l'influence de la pression moyenne sur le processus du changement de forme; notons que, en principe, la relation (14.12) peut contenir aussi des variables plus complexes, par exemple le travail de la déformation plastique A_p.

2. Etat d'élasticité linéaire (loi de Hooke). Soit

$$\psi = \text{const} = \frac{1}{2G}.$$

Dans ce cas on arrive à la loi de Hooke

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ij}\right). \tag{14.13}$$

Après avoir résolu ces relations par rapport aux composantes de la contrainte, on obtient une autre forme de cette loi:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{14.14}$$

où λ et $\mu = G$ sont les constantes élastiques de Lamé.

L'intensité des contraintes tangentielles est ici proportionnelle à l'intensité des déformations de glissement:

$$T = G\Gamma. \tag{14.15}$$

L'accroissement du travail de déformation est la différentielle totale du potentiel élastique:

$$\Pi = \Pi(\varepsilon_{ij}) = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{G}{2}\Gamma^2. \tag{14.16}$$

Comparant la formule pour $d\Pi$ à la formule (14.9), nous en venons à la conclusion qu'il existe les relations

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{14.17}$$

exprimant en somme la loi de Hooke sous sa forme (14.14).

3. Etat d'écoulement. Prenons en qualité de relation complémentaire la condition d'écoulement de von Mises:

$$T = \tau_s.$$

Conformément à (14.8), nous aurons dans ce cas:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\tau_s}, \tag{14.18}$$

ce qui revient à dire que dans l'état d'écoulement la fonction ψ exprime l'intensité des glissements. Ici, également, il existe un *potentiel du travail de déformation*:

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s\Gamma, \tag{14.19}$$

qui est égal à la somme de l'énergie de la *compression volumique élastique et du travail de changement de forme* $\tau_s\Gamma$.

Bien que la valeur $\psi = \frac{\Gamma}{2\tau_s}$ puisse être introduite dans la relation de Hencky (14.6), cela ne nous permettra quand même pas de déterminer de façon univoque les composantes de la déformation

au moyen des composantes de la contrainte, ce qui est tout à fait naturel si l'on se souvient qu'il n'y a pas de liaison biunivoque entre la contrainte et la déformation sur le palier d'écoulement (fig. 9).

Plus loin, on trouve de (14.7):

$$\sigma_{ij}=\frac{\varepsilon}{3k}\delta_{ij}+\frac{2\tau_s}{\Gamma}e_{ij}. \tag{14.20}$$

Notons que les contraintes exprimées par ces formules sont des *fonctions univoques des composantes de la déformation et qu'elles satisfont identiquement à la condition d'écoulement de von Mises.*

Dans le cas d'un milieu incompressible ($k = 0$), les contraintes sont définies par les déformations à une pression hydrostatique près:

$$\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}=\frac{2\tau_s}{\Gamma}\varepsilon_{ij}. \tag{14.21}$$

Les formules (14.17), valables aussi pour l'état d'écoulement, conduisent ici aux relations (14.20).

4. Etat d'écrouissage. Prenons la condition d'écrouissage (12.2) en qualité de relation complémentaire:

$$\Gamma=\bar{g}(T)\,T.$$

En vertu de (14.8) on obtient:

$$\psi=\frac{1}{2}\bar{g}(T). \tag{14.22}$$

Conformément à (14.6) on a:

$$\varepsilon_{ij}=k\sigma\delta_{ij}+\frac{1}{2}\bar{g}(T)\,s_{ij}, \tag{14.23}$$

d'où il est facile de trouver les relations inverses:

$$\sigma_{ij}=\frac{\varepsilon}{3k}\delta_{ij}+2g(\Gamma)\,e_{ij} \tag{14.24}$$

Si $\frac{dT}{d\Gamma}\neq 0$, les relations obtenues définissent une *dépendance biunivoque entre les composantes de la contrainte et celles de la déformation.*

Grâce à (14.22), l'accroissement du travail de déformation (14.9) dans l'état d'écrouissage est la différentielle totale d'une certaine fonction $\Pi = \Pi(\varepsilon_{ij})$ qui représente le potentiel du travail de déformation. Il est aisé de voir que

$$\Pi=\frac{\varepsilon^2}{6k}+\int g(\Gamma)\,\Gamma\,d\Gamma. \tag{14.25}$$

Le deuxième terme caractérise le travail de changement de forme d'un élément de corps.

Les formules (14.17) sont évidemment applicables aussi à l'état d'écrouissage considéré.

Notons que si pour $g(\Gamma) = G$ nous obtenons le milieu élastique de Hooke, on arrive à l'état d'écoulement pour $g(\Gamma) = \frac{\tau_s}{\Gamma}$.

Dans le paragraphe 12, il était question aussi d'une autre condition d'écrouissage (12.5). Il n'est pas difficile de s'apercevoir que nous en serions venus au même résultat en utilisant dans notre schéma la deuxième condition d'écrouissage. En effet, le travail de la déformation plastique est égal à

$$A_p = \int T\,d\Gamma - \frac{1}{2G}\,T^2.$$

En vertu de (12.3), Γ est une fonction univoque de l'intensité T; par conséquent, A_p ne dépend que de l'intensité des contraintes tangentielles, ce qui s'accorde avec la condition (12.5).

5. Avantages et inconvénients des équations obtenues. Les équations de la théorie des déformations plastiques obtenues plus haut ont été formulées en 1924 par Hencky [155] pour l'état d'écoulement; un peu plus tard ces équations furent généralisées pour le cas de l'écrouissage.

Bien que les équations de cette théorie soient non linéaires, elles ont trouvé néanmoins, grâce à leur simplicité relative, un usage très varié, ceci en dépit de certains défauts de principe.

Les équations de la théorie des déformations plastiques décrivent pleinement la déformation plastique dans le cas de la simple mise en charge (cf. paragraphe 12), où les composantes du déviateur des contraintes croissent proportionnellement à un seul paramètre. Ces équations sont également vraies pour les cas présentant une certaine déviation par rapport à la mise en charge simple.

Dans l'état d'écrouissage, lorsque l'on envisage les mises en charge complexes, il peut y avoir des déformations pour lesquelles la valeur de T (ou de Γ) reste la même, tandis que les composantes du tenseur des contraintes (ou des déformations) varient. Il convient de considérer l'écrouissage comme étant unique « pour toutes les directions » d'après le schéma de la courbe unique (12.2) dans la mesure où, pour $dT = 0$, toutes les déformations sont censées être élastiques.

A ce propos, diverses critiques pourraient être formulées à l'égard de la théorie des déformations plastiques.

Envisageons, par exemple, deux voies de mise en charge jusqu'à un certain état $T_\sigma^{(2)}$ caractérisé par la valeur de l'intensité T_0. Une de ces voies consiste dans la mise en charge jusqu'à l'état $T_\sigma^{(1)}$ avec la même intensité T_0 suivie du passage à $T_\sigma^{(2)}$ avec une intensité constante T_0. A la fin de cette voie nous obtiendrons alors les déformations plastiques correspondant à $T_\sigma^{(1)}$. L'autre voie, qui tout d'abord suit la première, dévie un peu avant d'en arriver à l'état $T_\sigma^{(1)}$ pour

se diriger vers l'état $T_\sigma^{(2)}$ avec une intensité T toujours croissante et s'approchant de T_0. Cette voie pouvant être autant que possible proche de la première, il est naturel de s'attendre à ce que les déformations plastiques elles aussi soient les mêmes dans l'état $T_\sigma^{(2)}$. Cependant, la mise en charge étant ininterrompue, d'après les équations de la théorie des déformations on obtiendra des valeurs différentes de la déformation plastique, correspondant à $T_\sigma^{(2)}$.

La question se pose de savoir ce que représentent au juste les équations de la théorie des déformations plastiques.

Nous montrerons plus bas que les *équations considérées sont les équations du corps à élasticité non linéaire.* Il est naturel que l'application de ces équations pour la description des déformations plastiques dans les cas des voies de mise en charge complexes en zigzag peut aboutir à des résultats peu satisfaisants.

On peut considérer que les équations de la théorie des déformations plastiques sont valables pour les déformations plastiques évoluant dans une direction déterminée. Nous reviendrons à ce problème un peu plus tard, dans le paragraphe 15.

Pour des raisons de brièveté, nous utiliserons généralement par la suite le terme de *théorie de déformation* (deformation theory).

Démontrons maintenant que les équations de la théorie de déformation ne sont rien autre que des équations d'un corps à élasticité non linéaire.

Adressons-nous à l'exemple d'une barre sollicitée par un effort de traction lentement variable (fig. 18). Supposons qu'à la valeur fixée de la contrainte σ_1 correspond une certaine déformation ε_1 invariable dans le temps et, inversement, à la valeur fixée de ε_1 correspond la contrainte σ_1 invariable dans le temps. Chacun de ces états de la barre sera un *état d'équilibre*. Le processus de déformation qui se compose d'une suite d'états d'équilibre s'appelle *déformation stabilisée*.

Représentons-nous le lent retour en arrière (décharge) qui se produit le long de la même courbe BAO (fig. 18, *a*) en passant tous les états déjà obtenus lors de la mise en charge exercée suivant OAB. La déformation est appelée *réversible* si, en retournant au point initial O, on n'arrive à trouver aucun changement. Cela pourra être obtenu avec un corps élastique parfait, par exemple le milieu élastique de Hooke (fig. 18, *b*). On parlera d'un *corps à élasticité non linéaire* dans le cas où les contraintes ne sont pas proportionnelles aux déformations.

La déformation élasto-plastique $OABC$ (fig. 18, *a*) peut servir d'exemple de phénomène irréversible; à toute diminution de la contrainte, même infiniment petite, la déformation, au retour, ne suivra pas la courbe BAO mais prendra la voie de la ligne de décharge BC. Soulignons que, dans notre cas, les déformations tant réversibles que non réversibles sont des déformations stabilisées.

En déformation élastique isothermique, il existe une correspondance univoque entre la contrainte et la déformation: $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$.

Envisageons maintenant le phénomène de la déformation *irréversible* stabilisée où la contrainte n'est plus la fonction des seules valeurs instantanées de la déformation. En outre, le phénomène de la déformation dépendra aussi de la direction du mouvement suivant la courbe de la déformation, c.-à-d. de la nature du phénomène qui se produit: mise en charge ou décharge.

Nous examinons le phénomène de la déformation irréversible *stabilisée*, par conséquent, la relation cherchée ne renfermera pas le temps (et

en conséquence la vitesse de déformation); il suffira d'indiquer le comportement du matériau lors de la mise en charge et de la décharge.

Ainsi, *le phénomène de la traction irréversible stabilisée d'une barre peut être décrit par une équation d'état d'un corps parfait quelconque à élasticité non linéaire pour chaque intervalle de mise en charge ou de décharge.*

Les hypothèses thermodynamiques développées plus haut se rapportent aussi à la déformation des corps dans l'état de contrainte complexe; ici, de même, on peut proposer d'exprimer la déformation plastique stabilisée par les équations d'état des corps à élasticité non linéaire. Ceci impose la nécessité d'établir les formes possibles que pourraient prendre les équations d'état des corps à élasticité non linéaire. Il faut caractériser les propriétés du milieu considéré pour procéder à l'analyse thermodynamique correspondante.

Nous admettrons que l'état du corps peut être complètement défini par six paramètres indépendants de l'état (coordonnées généralisées de l'état) pouvant être représentés par les composantes de la déformation ε_{ij}, soit par les composantes de la contrainte σ_{ij}.

Nous nous arrêterons sur l'ensemble des paramètres ε_{ij} (1) en conservant les conditions initiales 1, 2, 3 (paragraphe 14.1) d'où découlent les relations (14.6) à (14.9).

Par la suite, néanmoins, au lieu de nous baser sur les données expérimentales des conditions d'écoulement et d'écrouissage, nous utiliserons les conditions de la réversibilité de la déformation que subit le milieu élastique parfait envisagé; ces conditions seront établies par l'analyse thermodynamique.

Envisageons le parallélépipède élémentaire imaginaire $dx_1dx_2dx_3$ dégagé du milieu. Ses faces seront sollicitées par les contraintes σ_{ij}. L'accroissement de l'énergie interne de l'élément $d\mathscr{E}dx_1dx_2dx_3$ comprend l'accroissement du travail de la déformation $dA\,dx_1dx_2dx_3$ et l'accroissement de la quantité de chaleur $dQdx_1dx_2dx_3$ absorbée par l'élément considéré, c.-à-d.

$$d\mathscr{E} = dA + dQ,$$

où dA est obtenu de (14.9) et les composantes de la contrainte dépendent généralement des paramètres d'état ε_{ij}.

Conformément au premier principe de la thermodynamique, l'énergie interne $\mathscr{E}$ est entièrement définie par l'état instantané du système (2), $d\mathscr{E}$ sera par conséquent une différentielle totale.

L'existence d'une énergie interne $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\varepsilon_{ij})$, qui découle du principe de la conservation de l'énergie, a lieu pour tout phénomène. Le deuxième principe de la thermodynamique permet de distinguer les *phénomènes réversibles* pour lesquels la relation $\frac{dQ}{\Theta}$, où Θ est la température absolue, représente la différentielle totale de la fonction d'état ou entropie J:

$$\frac{dQ}{\Theta} = dJ.$$

Etant donné que $\Theta = \text{const}$ pour les phénomènes isothermiques, dQ est donc une différentielle totale. Mais alors dA sera aussi une différentielle totale. De la formule de dA déjà obtenue (14.9), il découle maintenant que pour les

(1) Par souci de simplicité, le phénomène envisagé est supposé être un phénomène isothermique; cette restriction étant négligeable, il est donc possible de faire une analyse thermodynamique analogue lorsque la température varie [104].

(2) C'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du chemin parcouru par un corps passant d'un état à l'autre; sinon il serait possible de réaliser un « perpetuum mobile » de premier ordre équivalent à une énergie apparaissant du néant.

corps à élasticité non linéaire ne sont possibles que les états suivants:

$$1)\ \psi=\mathrm{const},\ 2)\ T=\mathrm{const},\ 3)\ \psi=\frac{1}{2}f(T),$$

où $f(T)$ est une fonction quelconque.

Ces états coïncident respectivement avec l'état d'élasticité linéaire (loi de Hooke), l'état d'écoulement et l'état d'écrouissage, examinés plus haut sur la base de données expérimentales. L'analyse thermodynamique non seulement nous dispense de ces hypothèses complémentaires en nous menant aux conditions d'écoulement et d'écrouissage, mais, ce qui est plus important, nous éclaircit la nature des équations de la théorie des déformations plastiques et des possibilités d'application des équations du corps à élasticité non linéaire(1) dans la théorie de la plasticité. Enfin, la conception développée rend compréhensible l'existence d'un potentiel des déformations.

15. RELATION ENTRE LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT ET LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS

1. La simple mise en charge. Dans le cas de la simple mise en charge (paragraphe 7), les composantes du déviateur des contraintes varient proportionnellement au paramètre croissant t, c.-à-d.

$$s_i=ts_i^0 \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

où s_i^0 sont certaines valeurs principales fixées du déviateur D_σ. Les théories de la plasticité envisagées plus haut coïncident alors dans les *conditions de petite déformation* (2) [9].

En effet, les axes principaux du déviateur des contraintes étant immobiles et les rapports de ses valeurs principales invariables (μ_σ = const), on a alors conformément aux équations de la théorie de l'écoulement (13.5):

$$d\varepsilon_i^p=d\lambda\cdot ts_i^0. \tag{15.1}$$

S'il n'y a pas d'écrouissage, il découle immédiatement de la condition d'écoulement de von Mises que t = const, c.-à-d. que les contraintes $s_i = ts_i^0$ sont constantes. La grandeur $d\lambda$ est proportionnelle à l'accroissement du travail de la déformation plastique dA_p, à savoir: $d\lambda = dA_p/2\tau_s^2$. Nous obtiendrons les composantes de la déformation plastique ε_i^p en faisant la somme des accroissements des composantes de la déformation plastique $d\varepsilon_i^p$. La sommation des travaux élémentaires dA_p conduit au travail plastique A_p. Ce dernier est une fonction scalaire que nous désignerons par $2\tau_s^2\varphi$.

(1) Soulignons que, dans le schéma d'un corps à élasticité non linéaire, même l'« état d'écoulement » est une forme particulière de l'état élastique. Le modèle d'un corps à élasticité non linéaire sera un ressort à caractéristique non linéaire. On peut établir une certaine analogie entre l'« état d'écoulement » (T = const) et le potentiel du champ de gravité (la force de pesanteur est constante).

(2) L. Sédov [128] a montré que la simple mise en charge est en général irréalisable pour des déformations finies des corps.

Les relations (15.1) prennent alors la forme

$$\varepsilon_i^p = \varphi s_i,$$

qui est une équation de la théorie des déformations plastiques (si l'on soustrait les termes se rapportant au domaine élastique de la déformation et répondant à la loi de Hooke). Ce fait fut constaté par Prager et Hoenemzer [28] en 1932.

S'il y a écrouissage, on a alors conformément à (13.13) $d\lambda = F(T_0 t)\, T_0\, dt$, où T_0 est l'intensité des contraintes tangentielles pour l'état s_i^0. En introduisant la nouvelle variable $T_0 t = \tau$ et en faisant la somme des accroissements des composantes de la déformation plastique $d\varepsilon_i^p$ dans les relations (15.1), nous obtiendrons dans le premier membre les composantes ε_i^p elles-mêmes. Dans les seconds membres (après le dégagement du facteur s_i^0/T_0), la sommation conduira à une certaine fonction τ. Retournant à la variable initiale, on obtient :

$$\varepsilon_i^p = F_*(T_0 t)\, s_i,$$

où F_* est une fonction quelconque, c.-à-d. les équations de la théorie des déformations plastiques dans le cas de l'écrouissage.

Par contre, si l'on exige que les deux théories soient équivalentes en égalant à cet effet les accroissements des composantes de la déformation plastique (13.5) aux accroissements des composantes de la déformation plastique calculés conformément aux équations de la théorie des déformations (14.4), on obtient :

$$d\lambda s_{ij} = s_{ij}\, d\varphi + \varphi\, ds_{ij}.$$

Il en découle que

$$\frac{d\lambda - d\varphi}{\varphi} = \frac{ds_{ij}}{s_{ij}}.$$

Dans les premiers membres de ces équations, il y a un accroissement infiniment petit d'une certaine grandeur scalaire. En intégrant on trouve que les contraintes s_{ij} ont la structure

$$s_{ij} = s_{ij}^0 \Psi,$$

correspondant à la simple mise en charge (Ψ étant un scalaire).

Ainsi, *ces deux théories ne coïncident que dans le cas de la simple mise en charge.*

Dans le cas de chargement complexe, la théorie des déformations et la théorie de l'écoulement aboutissent à des résultats différents. Anticipant quelque peu, notons que ces résultats se rapprochent dans un cas de déformation très important pour les applications. Dans l'espace des déformations, la voie suivie par la déformation est représentée sous la forme d'une certaine ligne (fig. 19). Soit la voie de déformation qui, à partir d'un moment quelconque, s'approche de la droite (en pointillé) ; on dira alors que la déformation

se développe dans une direction déterminée. *Si ce cas est réalisé, les états de contrainte calculés suivant les deux théories se rapprochent.* Par ailleurs, l'influence de l'histoire complexe de la déformation diminue rapidement et on obtient un état de contrainte invariable qui est déterminé par les vitesses de déformation fixées caractéristiques du tronçon rectiligne (voir ci-dessous).

Il est intéressant de noter aussi que, si l'on part de notions plus générales sur les surfaces de charge ayant des singularités (cf. paragraphe 17), les équations de la théorie de l'écoulement pour certaines

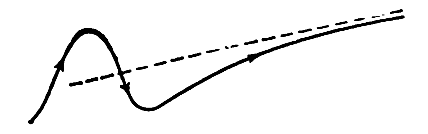


Fig. 19

voies de charge se réduisent aux équations de la théorie des déformations (cf. travaux de B. Budiansky [141], V. Kliouchnikov [111], Y. Rabotnov [23].

2. Exemple. Torsion et traction simultanées d'un tube à paroi mince. En guise d'exemple, illustrant les propriétés des équations de la plasticité que l'on vient d'introduire, nous examinerons la déformation symétrique d'un tube cylindrique à paroi mince soumis à l'action simultanée d'un moment de torsion et d'une traction axiale. Ce cas correspond aux essais dits de $P + M$ (paragraphe 7).

Comme il a été indiqué, on peut considérer ici que les composantes des contraintes σ_z et $\tau_{\varphi z}$ (dans un système de coordonnées cylindriques r, φ, z) ne sont pas nulles. Négligeons les composantes de la contrainte σ_r, σ_φ, $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz}, comme étant petites par rapport aux composantes σ_z, $\tau_{\varphi z}$. Les composantes de la déformation $\gamma_{r\varphi}$, γ_{rz} sont faibles par rapport à $\gamma_{\varphi z}$. Pour simplifier les calculs, nous admettons que le matériau soit incompressible, ce qui apportera des changements insignifiants dans le tableau général de la déformation. Il résulte alors de cette condition d'incompressibilité et des équations de la théorie des déformations (14.23) que $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{2}\varepsilon_z$. Si l'on part des équations de la théorie de l'écoulement (13.7), on obtient de façon analogue que $d\varepsilon_r = d\varepsilon_\varphi = -\frac{1}{2}d\varepsilon_z$. Nous conviendrons de n'envisager que le cas de la plasticité parfaite et introduirons les grandeurs sans dimensions suivantes:

$$q = \frac{\sigma_z}{\sigma_s}, \quad \tau = \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s}, \quad \zeta = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_s}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{\varphi z}}{\gamma_s},$$

où $E\varepsilon_s = \sigma_s$, $G\gamma_s = \tau_s$.

Solution découlant de la théorie des déformations. On obtient facilement en partant de (14.20):

$$q = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\gamma^2}}, \tag{15.2}$$

avec la condition d'écoulement:

$$q^2 + \tau^2 = 1. \tag{15.3}$$

Posant successivement

$$\left.\begin{aligned} q &= \sin v \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{v}{2} &= w \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant w \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

on trouve:

$$w = -\frac{\gamma}{\zeta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\zeta}\right)^2 + 1}, \tag{15.5}$$

les grandeurs γ, ζ étant considérées comme positives (l'effet de Bauschinger, ignoré par les théories, prend de l'importance pour la mise en charge complexe à signes variables).

Solution découlant de la théorie de l'écoulement. On obtient à l'aide des équations (13.7):

$$d\zeta = dq + d\Lambda \cdot q, \quad d\gamma = d\tau + d\Lambda \cdot \tau, \tag{15.6}$$

où, conformément à (13.6) et à la condition d'écoulement (15.3):

$$d\Lambda = \frac{2}{3} E\, d\lambda = q\, d\zeta + \tau\, d\gamma. \tag{15.7}$$

Il convient d'y ajouter la condition d'écoulement (15.3) à l'aide de laquelle on trouve à partir de (15.6) et (15.7) l'équation différentielle

$$\frac{dq}{d\zeta} = \sqrt{1-q^2}\left(\sqrt{1-q^2} - q\frac{d\gamma}{d\zeta}\right).$$

Soulignons que, pour déterminer q à partir de cette équation, il faut poser la voie de la déformation $\gamma = \gamma(\zeta)$. Cette exigence n'a pas lieu si l'on s'inspire de la théorie des déformations [cf. (15.2)].

Nous admettons que la voie de déformation imposée $\gamma = \gamma(\zeta)$ possède partout une tangente et qu'elle vérifie la condition de mise en charge $d\Lambda > 0$. Après avoir fait les substitutions (15.4), transformons cette équation en équation de Riccati

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{2}w^2 - w\gamma'(\zeta) + \frac{1}{2}. \tag{15.8}$$

Cas particuliers. Il est facile, pour certaines fonctions choisies $\gamma(\zeta)$, d'obtenir des *solutions particulières* de cette équation

qui sont intéressantes pour l'analyse des équations de la théorie de l'écoulement plastique et pour les essais. Nous nous arrêtons sur quelques cas d'intégration qui se distinguent par leur simplicité.

La voie de déformation linéaire. Soit

$$\gamma(\zeta) = A + B\zeta;$$

si $\gamma = \gamma_0$ pour $\zeta = \zeta_0$ et $\gamma = \gamma_1$ pour $\zeta = \zeta_1$, on a

$$A = \frac{\gamma_0\zeta_1 - \gamma_1\zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0}, \quad B = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\zeta_1 - \zeta_0}.$$

L'équation différentielle prend la forme

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{2}(w^2 + 2Bw - 1).$$

C'est une équation à variables séparables; son intégrale satisfait à la condition

$$w = w_0 \text{ pour } \zeta = \zeta_0,$$

et prend la forme

$$w = \frac{Zw_2 \mp w_1}{Z \mp 1}. \tag{15.9}$$

Ici on introduit les notations

$$Z = \left|\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2}\right| \exp\left[-\sqrt{B^2+1}\,(\zeta - \zeta_0)\right],$$

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = -B \pm \sqrt{B^2 - 1} \quad \begin{matrix} >0 \\ <0. \end{matrix}$$

Il faut prendre le signe — dans (15.9) pour $w > w_1$ et le signe + pour $w < w_1$.

La voie par paliers. Dans les expériences, on utilise souvent la mise en charge par paliers (fig. 20). Sur chaque palier, les valeurs

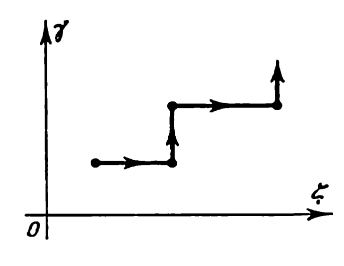


Fig. 20

constantes seront soit ζ, soit γ. Il est aisé d'obtenir les solutions correspondantes en partant des équations (15.6), (15.7).

Ainsi, soit $\zeta = \text{const}$, alors $d\zeta = 0$ et

$$d\gamma = \frac{d\tau}{1-\tau^2}.$$

Intégrant et vérifiant la condition $\tau = \tau_1$ pour $\gamma = \gamma_1$ on trouve:

$$\tau = \frac{G(\gamma)-1}{G(\gamma)+1}, \quad q = \sqrt{1-\tau^2}, \tag{15.10}$$

où

$$G(\gamma) = \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1} \exp[2(\gamma-\gamma_1)]. \tag{15.11}$$

Soit $\gamma = \text{const}$ sur un autre palier, on obtient alors de la même manière:

$$q = \frac{Z(\zeta)-1}{Z(\zeta)+1}, \quad \tau = \sqrt{1-q^2},$$

avec $q = q_1$ pour $\zeta = \zeta_1$, et

$$Z(\zeta) = \frac{1+q_1}{1-q_1} \exp[2(\zeta-\zeta_1)].$$

3. Rapprochement des résultats lors du développement des déformations dans une direction déterminée. Les différentes voies de

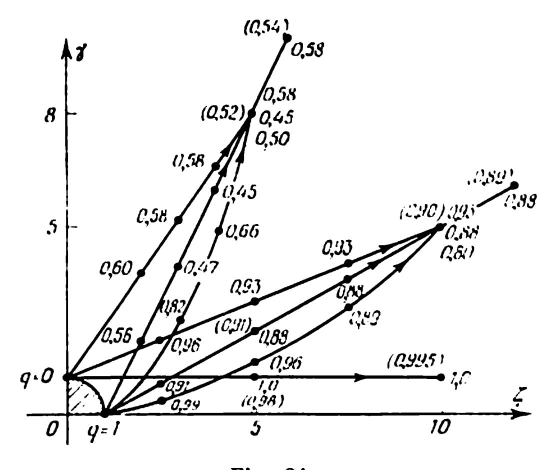


Fig. 21

déformation représentées sur le plan ζ, γ (fig. 21) correspondent à certains cas envisagés. Les chiffres donnent la valeur de q d'après la théorie de l'écoulement, les chiffres entre parenthèses donnent la valeur de q d'après la théorie des déformations. Le cercle de rayon unitaire limite le domaine hachuré des déformations élastiques.

Ces données permettent dans une certaine mesure de juger des différences existant entre les états de contrainte (valeurs de q) suivant

la théorie de l'écoulement pour diverses voies de passage au même état de déformation. Il est aisé de découvrir aussi que les états de contrainte calculés suivant la théorie de l'écoulement ont tendance à se rapprocher des états de contrainte évalués d'après la théorie des déformations, à mesure que les déformations se développent dans une direction déterminée.

On peut démontrer rigoureusement la convergence asymptotique des résultats préconisés par les théories de l'écoulement et des déformations si la voie de la déformation tend vers une certaine voie linéaire (fig. 19).

En effet, admettons que, à partir d'un certain instant, la voie de déformation s'approche de la droite $\gamma = A + B\zeta$ avec l'accroissement de ζ; alors on a $\gamma'(\zeta) \to B$ pour $B > 0$.

D'après la théorie des déformations, lorsque ζ croît, la solution w tend conformément à (15.5) vers la valeur

$$\bar{w} = -B + \sqrt{B^2 + 1}.$$

D'après la théorie de l'écoulement, w est défini par l'équation (15.8); introduisons une nouvelle inconnue

$$u = w - \bar{w}.$$

L'équation différentielle (15.8) se transformera alors comme suit:

$$\frac{du}{d\zeta} = -[\bar{w} + \gamma'(\zeta)]\, u - \frac{1}{2} u^2 - [B - \gamma'(\zeta)]\, \bar{w}. \qquad (15.12)$$

Il est facile de s'assurer que les coefficients de cette équation satisfont aux conditions du théorème d'Ascoli selon lequel une solution de l'équation différentielle (15.12) existe et tend vers zéro pour $\zeta \to \infty$. Par conséquent

$$w \to \bar{w}.$$

Un résultat analogue découle de l'analyse de la déformation d'un tube sous l'effet d'une pression intérieure et d'une force axiale.

On peut montrer [108] que dans le cas général de l'état de contrainte tridimensionnel, les contraintes calculées suivant diverses théories de plasticité se rapprochent également si la déformation se développe dans une direction déterminée (ce qui représente en fait un cas proche de la simple mise en charge).

4. Mise en charge simple et accroissement proportionnel des charges. Les résultats cités ci-dessus caractérisent une grande importance que présente la classe des simples mises en charge (et des mises en charge voisines). Dans ce cas on peut recourir aux équations relativement simples de la théorie des déformations. Les conditions de la simple mise en charge

$$\sigma_{ij} = t\sigma'_{ij}, \qquad (15.13)$$

où σ'_{ij} ne sont que des fonctions de coordonnées et t est un paramètre quelconque, doivent être vérifiées pour tout élément du corps.

Le corps est d'habitude sollicité par des charges p_i de surface (nous négligerons les forces de volume pour des raisons de simplicité), les contraintes σ_{ij} s'exerçant sur les éléments du corps n'étant pas connues d'avance. Il va de soi qu'il ne peut être question de chargement simple sur les éléments d'un corps si les charges de surface sont assujetties à des variations arbitraires. Admettons, cependant, que des charges croissent proportionnellement à un paramètre quelconque

$$p_i = tp_i', \tag{15.14}$$

où p_i' sont les fonctions données ne dépendant que des coordonnées des points de la surface du corps.

D'après A. Iliouchine, on montre sans peine que la mise en charge sera simple si pour les petites déformations

1) le matériau est incompressible ($\varepsilon = 0$);

2) les intensités des contraintes et les déformations T, Γ sont liées par la fonction puissance monôme:

$$T = A\Gamma^{\alpha}, \tag{15.15}$$

où A, $\alpha > 0$ sont des constantes.

En effet, soit des contraintes σ_{ij}' et des déformations ε_{ij}' s'exerçant sur le corps pour $t = 1$. Ces grandeurs satisfont donc aux équations différentielles de l'équilibre (4.2) pour $F_j = 0$, $w_j = 0$, aux conditions aux limites (1.22), aux conditions de compatibilité de Saint-Venant (2.16) et aux équations de la théorie des déformations (14.24) pour la loi de la puissance (15.15).

Si on attribue au paramètre une valeur arbitraire t, il est aisé de voir que les contraintes $\sigma_{ij} = t\sigma_{ij}'$ et les déformations $\varepsilon_{ij} = t^{1/\alpha}\varepsilon_{ij}'$ représenteront la solution cherchée du problème. En effet, les équations différentielles de l'équilibre, les conditions aux limites et les conditions de compatibilité de Saint-Venant sont homogènes (respectivement par rapport aux contraintes, aux forces extérieures et aux déformations) et, de ce fait, sont satisfaites par les nouvelles valeurs des contraintes (15.13), des forces extérieures (15.14) et des déformations. Les relations de la théorie des déformations (14.24) sont elles aussi satisfaites puisque leurs seconds membres sont des fonctions homogènes des composantes de déformation de puissance α.

Si l'on revient maintenant aux restrictions initiales, nous noterons avant tout que l'on peut généralement négliger la compressibilité lorsque les déformations plastiques sont suffisamment développées (bien que petites). L'approximation puissance (15.15) exprime une restriction beaucoup plus rigoureuse. Dans certains cas (par exemple, pour une plasticité parfaite), cette dépendance conduit à une approximation insuffisante. La loi de la puissance (15.15) conduit à une approximation plus ou moins acceptable pour des déformations plastiques évoluées et un écrouissage notable du matériau.

Partant de ce qui précède, on peut considérer, dans les cas de déformations plastiques évoluées et d'écrouissage notable, qu'il y a approximativement la simple mise en charge lorsque les charges croissent proportionnellement. Dans d'autres cas, la simple mise en charge (ou voisine de cette dernière) n'est pas en général obtenue (cf. également [128]).

5. Données expérimentales. La confirmation expérimentale de la théorie de l'écoulement plastique est beaucoup plus ample que celle

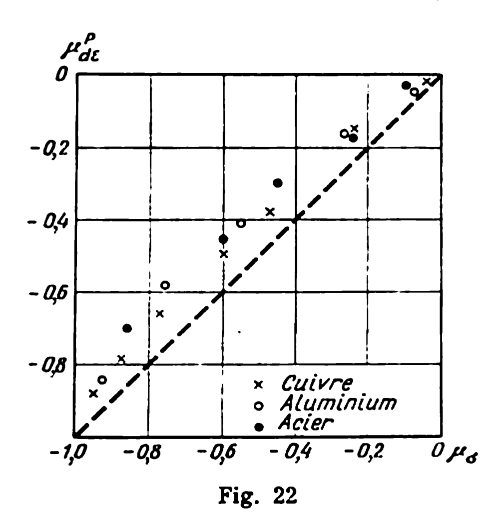


Fig. 22

de la théorie des déformations. De la relation (13.5) on obtient la condition de similitude des formes du tenseur des accroissements de la déformation plastique et du tenseur des contraintes

$$\mu^p_{d\varepsilon} = \mu_\sigma.$$

Des écarts insignifiants mais systématiques de la condition de similitude sont constatés au cours des expériences. Les résultats de certains essais sont représentés sur la fig. 22; on porte μ_σ sur l'axe horizontal et $\mu^p_{d\varepsilon}$ sur l'axe vertical, la ligne en pointillé correspondant à la condition de similitude. Ces écarts témoignent des perturbations négligeables par rapport à l'équation tensorielle linéaire (13.4). On pourrait bien obtenir une concordance avec les données expérimentales montrées sur la figure 22 en se basant sur la relation tensorielle non linéaire, mais cela compliquerait notablement les équations initiales.

Les données expérimentales prouvent aussi que les directions des axes principaux du tenseur des contraintes et du tenseur des accroissements de la déformation plastique coïncident.

Il y a lieu de noter cependant qu'une influence notable de l'anisotropie du matériau, que celui-ci acquiert au cours de la déformation plastique, est constatée dans les mises en charge complexes (« en zigzag »), surtout lorsqu'il y a des décharges intermédiaires.

On rencontre des difficultés pour décrire les phénomènes de la déformation anisotrope, ce qui est dû à une connaissance insuffisante de ces phénomènes. Leur description éventuelle nécessiterait un développement notable de la théorie.

16. GÉNÉRALISATIONS DANS LE CAS DE LA PLASTICITÉ PARFAITE. LOI ASSOCIATIVE DE L'ÉCOULEMENT

Nous envisagerons quelques généralisations de la théorie de l'écoulement pour le cas de la plasticité parfaite. Comme auparavant, les accroissements de la déformation totale sont obtenus par l'addition des accroissements de la déformation élastique et de ceux de la déformation plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij}. \tag{16.1}$$

Les accroissements des composantes de la déformation élastique $d\varepsilon^e_{ij}$ sont liés par la loi de Hooke (13.3) aux accroissements des composantes de la contrainte. Par la suite, il n'y aura pas de changement plastique du volume, c.-à-d.

$$d\varepsilon^p_{ii} = 0. \tag{16.2}$$

1. Fonction d'écoulement et potentiel plastique. Il y a une *surface d'écoulement*

$$f(\sigma_{ij}) = K \quad (K > 0), \tag{16.3}$$

pour le milieu parfaitement plastique dans l'espace des contraintes σ_{ij}. Cette surface limite le domaine des déformations élastiques pour lesquelles $f < K$. A l'écoulement plastique correspondent les états de contrainte appartenant aux points de la surface d'écoulement.

Ainsi, pour la condition d'écoulement de von Mises

$$f(\sigma_{ij}) = T^2; \quad K = \tau_s^2. \tag{16.4}$$

Le matériau se trouve dans un état élastique si $T < \tau_s$; il sera dans un état plastique si $T = \tau_s$. Dans l'espace des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3, cette équation définit la surface d'un cylindre de révolution dont l'axe est $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (axe hydrostatique, paragraphe 1).

La surface d'écoulement (16.3) est convexe (cf. plus bas, paragraphe 18), c.-à-d. qu'elle se trouve d'un côté du plan tangent (ou du plan de référence s'il y a des aires planes).

Outre la fonction d'écoulement, on introduit parfois le potentiel plastique Φ (σ_{ij}) de façon que les équations de l'écoulement plastique soient de la forme

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad (16.5)$$

où $d\lambda \geqslant 0$ est un certain facteur scalaire infiniment petit indéterminé. D'après la condition d'incompressibilité (16.2), on doit avoir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ii}} = 0. \qquad (16.6)$$

On peut représenter les relations (16.5) sous une forme plus évidente si l'on passe à la représentation des tenseurs $d\varepsilon_{ij}^{p}$, σ_{ij} à l'aide des vecteurs dans un espace des contraintes σ_{ij} à neuf dimensions. Cette représentation n'est pas, bien entendu, complète et n'est possible que dans un certain sens. Pour analyser les équations de l'état plastique, on n'utilise d'habitude que les opérations les plus simples sur les tenseurs et il est possible d'établir une correspondance entre ces opérations et celles qui ont pour objet les vecteurs qui les représentent. La représentation vectorielle est plus illustrative et facilite l'interprétation des données expérimentales. Elle est d'un usage courant pour l'analyse des équations de l'état plastique.

Ces opérations simples mentionnées sur les tenseurs sont:

1. *Le produit du tenseur par le scalaire* φ; lors de cette opération chaque composante du tenseur est multipliée par le scalaire φ, c.-à-d. que si le tenseur T_a a pour composantes a_{ij}, le tenseur φT_a aura les composantes φa_{ij}.

2. *L'addition des tenseurs* au cours de laquelle on additionne les composantes aux indices identiques, c.-à-d. que le tenseur $T_a + T_b$ a pour composantes $a_{ij} + b_{ij}$.

3. *La formation d'une convolution de deux tenseurs* suivant les deux indices; on appelle ainsi la somme $a_{ij}b_{ij}$. L'accroissement du travail de la déformation plastique $dA_p = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{p}$ sera un exemple d'une telle convolution.

Introduisons les vecteurs $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, dont les composantes dans l'espace à neuf dimensions sont a_{ij}, b_{ij}. A la première opération correspond alors la multiplication d'un vecteur par un scalaire, soit un vecteur $\varphi\boldsymbol{A}$. A la seconde opération répondra l'addition des vecteurs $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. Enfin, à la convolution des tenseurs correspond un produit scalaire des vecteurs

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = a_{ij}b_{ij}.$$

R e m a r q u e. Par suite de symétrie, les tenseurs des contraintes T_σ et des déformations T_ε n'ont que six composantes différentes. Néanmoins, il est plus aisé de représenter ces tenseurs au moyen des vecteurs dans un espace à neuf dimensions, car dans ce cas le produit scalaire des vecteurs σ_{ij} et ε_{ij} sera directement égal à la convolution mentionnée des tenseurs. Cela tient à ce

que les composantes du tenseur des déformations ne sont pas les glissements eux-mêmes mais leurs moitiés. Naturellement, on peut envisager un espace à six dimensions et, à titre de composantes du vecteur contrainte, prendre six composantes du tenseur des contraintes multipliées par des nombres arbitraires, ces derniers étant choisis de façon que le produit scalaire des vecteurs corresponde à la convolution des tenseurs. Toutefois, il est plus aisé d'envisager les vecteurs avec les mêmes composantes que pour les tenseurs, mais dans un espace à neuf dimensions.

Si les directions principales du tenseur T_a sont fixées, on peut alors, ayant en vue les opérations susmentionnées, représenter le tenseur T_a par le vecteur A ayant les composantes a_1, a_2, a_3 dans l'espace tridimensionnel a_i. Une telle interprétation a déjà été évoquée au paragraphe 1.

Ainsi, on peut représenter l'état de contrainte, dans l'espace des contraintes à neuf dimensions, par le vecteur σ_{ij}. On peut représenter également, dans ce même espace, les accroissements de la déformation plastique $d\varepsilon_{ij}^p$ par un certain vecteur si l'on multiplie $d\varepsilon_{ij}^p$ par une grandeur constante de dimension appropriée. L'équation $\Phi(\sigma_{ij}) = \text{const}$ définit la surface (hypersurface) du potentiel plastique. Les cosinus directeurs de la normale à cette surface étant proportionnels à $\partial\Phi/\partial\sigma_{ij}$, les relations (16.5) signifient que le vecteur de l'écoulement plastique $d\varepsilon_{ij}^p$ est dirigé suivant la normale à la surface du potentiel plastique.

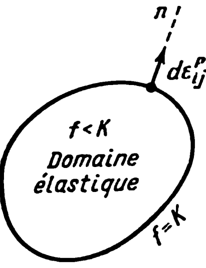


Fig. 23

2. Loi associative de l'écoulement. Nous aurons le cas le plus simple, et le plus important, lorsque la fonction d'écoulement coïncide avec le potentiel plastique:

$$f = \Phi.$$

Dans ce cas, outre sa simplicité, on établit facilement le théorème d'unicité et les principes d'extremum, ce qui confère à la théorie le caractère fini.

Ainsi,

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{16.7}$$

et l'écoulement plastique se développe suivant la normale à la surface d'écoulement (fig. 23).

L'accroissement du travail de la déformation plastique est égal à

$$dA_p = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\cdot\sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{16.8}$$

Si f est une fonction homogène des contraintes de puissance m, on a:

$$dA_p = d\lambda\cdot mf = d\lambda\cdot mK,$$

c.-à-d. que le facteur $d\lambda$ est proportionnel à l'accroissement du travail de la déformation plastique

$$d\lambda = \frac{dA_p}{mK}. \tag{16.9}$$

Pour la théorie de l'écoulement (paragraphe 13), il en découle la formule (13.10) obtenue précédemment.

Notons que le schéma (16.7) englobe aussi bien les équations de la théorie de l'écoulement plastique (13.7) que les équations de la théorie de plasticité de Saint-Venant — von Mises (13.11) respectivement. En effet, dans ce cas il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij},$$

et les équations (16.7) prennent la forme $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$. Il est évident que la condition d'incompressibilité (16.2) est vérifiée.

Les relations (16.7) sont appelées *loi associative de l'écoulement plastique* puisque cette dernière est liée (s'associe) à la condition de l'écoulement. Cette loi permet d'introduire facilement diverses généralisations des équations de la plasticité en examinant les surfaces d'écoulement de forme plus complexe.

Si l'on envisage l'écoulement dans l'espace des contraintes principales (ce qui est commode pour les directions principales fixées, par exemple dans les problèmes de symétrie axiale), il est plus pratique d'utiliser à la place de (16.7) les relations

$$d\varepsilon_i^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{16.10}$$

3. Surfaces d'écoulement lisses par morceaux. Pour satisfaire à la loi associative de l'écoulement exprimée par (16.7), la surface d'écoulement doit être lisse, c.-à-d. qu'elle doit présenter un plan tangent à rotation continue, ce qui permettra aussi de déterminer la normale à cette surface. Cependant, on ne peut pas éliminer de cette analyse les surfaces d'écoulement singulières (possédant des sommets et des arêtes). Ainsi, la condition de l'écoulement de Tresca—Saint-Venant décrit la surface d'un prisme hexagonal (paragraphe 9); la normale suivant les arêtes de ce prisme n'est pas définie. Par la suite, nous verrons que l'application de la condition de l'écoulement de Tresca — Saint-Venant à la place de celle de von Mises conduit souvent à des simplifications mathématiques notables (par exemple, dans les problèmes de l'état de contrainte plan). Les relations (16.7), qui sont valables dans les points ordinaires de la surface d'écoulement, devront donc être complétées d'une certaine manière afin de pouvoir définir également l'écoulement plastique correspondant aux arêtes et aux sommets de la surface d'écoulement. Pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons à l'exa-

men d'une arête sur la surface d'écoulement, ce qui est le plus souvent rencontré dans les applications; le cas du sommet est analysé de manière analogue.

Supposons, d'après Prager [56] et Koiter [168], que l'écoulement sur l'arête est une combinaison linéaire des écoulements existant à gauche et à droite de l'arête (fig. 24)

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{16.11}$$

où $f_1 = \text{const}$, $f_2 = \text{const}$ sont les équations de la surface d'écoulement des deux côtés de l'arête. Les facteurs indéterminés $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ étant non négatifs, l'écoulement se développera dans la direction qui se trouve à l'intérieur de l'angle formé par les normales à deux faces contiguës.

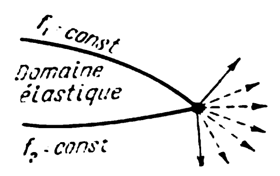


Fig. 24

En un point ordinaire de la surface d'écoulement, l'écoulement plastique est déterminé en direction et indéterminé en grandeur. Le facteur $d\lambda$ est exprimé par l'accroissement du travail de la déformation plastique et peut être trouvé lors de la solution de chaque problème particulier.

Sur une arête, l'écoulement plastique est indéterminé aussi bien en direction qu'en grandeur. Les facteurs $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ sont déterminés aussi lorsque l'on résout chaque problème particulier. « Deux conditions d'écoulement » ($f_1 = \text{const}$ et $f_2 = \text{const}$) étant vérifiées le long de l'arête, on est donc obligé d'introduire deux facteurs arbitraires afin d'éviter la contradiction avec les conditions de compatibilité des déformations.

Si l'écoulement est envisagé dans l'espace des contraintes principales, à la place de (16.11) on aura:

$$d\varepsilon_i^{p} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_i} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i}. \tag{16.12}$$

4. Exemple d'écoulement sur l'arête du prisme de Tresca — Saint-Venant. Envisageons d'après le schéma énoncé un écoulement correspondant aux états de contrainte pour des points sur l'arête du prisme hexagonal de Tresca — Saint-Venant. Pour être précis, supposons une arête formée par l'intersection des plans (cf. paragraphe 9):

$$f_1 \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s; \quad f_2 \equiv \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s.$$

Les traces de ces plans sur le plan du déviateur sont montrées sur figure 25 par des lignes pleines. L'écoulement pour le premier plan peut être écrit conformément à (16.10) sous la forme (on passe aux vitesses de déformation ξ_i^p, et on néglige l'indice p; $d\lambda_1 = \lambda_1' \, dt$,

$d\lambda_2 = \lambda_2' \, dt$):

$$\frac{\dot{\xi}_1}{1} = \frac{\dot{\xi}_2}{-1} = \frac{\dot{\xi}_3}{0} = \lambda_1'.$$

Pour le deuxième plan l'écoulement sera défini par les relations

$$\frac{\dot{\xi}_1}{1} = \frac{\dot{\xi}_2}{0} = \frac{\dot{\xi}_3}{-1} = \lambda_2'.$$

D'après la loi énoncée (16.12) pour les points sur l'arête on a:

$$\xi_1 = \lambda_1' + \lambda_2'; \quad \xi_2 = -\lambda_1'; \quad \xi_3 = -\lambda_2'.$$

La puissance de la déformation plastique (dissipation) pour les points sur l'arête envisagée est égale à

$$\dot{A}_p = \sigma_i \xi_i = \sigma_s (\lambda_1' + \lambda_2').$$

Dans cette relation $\lambda_1' + \lambda_2' = \xi_1$ est la plus grande des vitesses principales de l'allongement.

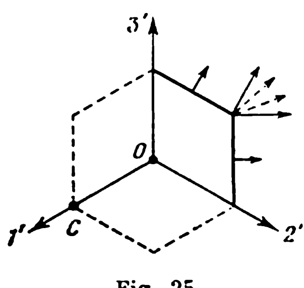


Fig. 25

Analysant de façon identique l'écoulement sur les autres arêtes, il est facile d'établir que, dans tous les cas, la dissipation est exprimée par la formule simple

$$\dot{A}_p = \sigma_s \xi_{max}, \qquad (16.13)$$

où ξ_{max} est la valeur numérique absolue de la plus grande vitesse principale de la déformation.

L'interprétation physique de l'écoulement sur l'arête déterminé de la sorte présente certaines difficultés qui apparaissent déjà dans le cas de la traction simple correspondant, par exemple, au point anguleux C (fig. 25) de l'hexagone de Tresca — Saint-Venant. L'écoulement y est exprimé par les relations

$$\xi_1 = \lambda_1' + \lambda_2'; \quad \xi_2 = -\lambda_1'; \quad \xi_3 = -\lambda_2',$$

où la première direction principale est orientée suivant l'axe de la barre. Les déformations transversales étant donc arbitraires, seule la condition d'incompressibilité sera satisfaite. Cette image ne s'accorde pas avec les idées habituelles sur la traction d'une barre isotrope (ainsi, conformément aux relations présentées, une barre ronde peut devenir elliptique à la traction). Cependant, de tels résultats paradoxaux ne se manifestent que dans les cas extrêmes et se rapportent principalement au champ des vitesses. Quant aux charges limites que l'on obtient sur la base de ce schéma, elles représentent une approximation suffisante.

Le schéma de Prager — Koiter doit être considéré comme une approximation idéalisée qui est souvent commode. Il est peu probable qu'il soit vraiment nécessaire de chercher l'expression physique des déductions paradoxales isolées.

5. Milieu anisotrope. Partant des idées exposées dans ce qui précède on peut obtenir les équations d'écoulement plastique pour un corps anisotrope. Il importe seulement d'introduire la fonction d'écoulement anisotrope. Sous sa forme la plus simple, cette fonction est choisie quadratique:

$$f = c_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

où c_{ijkl} sont des coefficients d'anisotropie. Les différentes variantes d'un tel schéma ont été passées en revue dans les travaux de von Mises (cf. [46, 79]), Hill [47] et d'autres auteurs. La théorie fondée sur les généralisations de la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant [8] a également pris l'essor.

17. GÉNÉRALISATIONS. CAS DU MILIEU ÉCROUISSABLE

1. Surface de charge. Les équations de la théorie de l'écoulement, citées dans le paragraphe 13, ne décrivent d'une manière satisfaisante le comportement mécanique du milieu écrouissable que dans les cas de mise en charge modérément complexe. Cependant, l'écrouissage, accompagnant la déformation plastique, a un caractère orienté et pour un état de contrainte triaxial (ou biaxial) représente un phénomène qui est suffisamment complexe et en général mal connu. Pour le décrire, il convient d'approfondir sensiblement la théorie.

La théorie est fondée sur la notion d'une surface de charge Σ (fig. 15, *b*) séparant dans l'espace des contraintes σ_{ij}, pour l'état donné du milieu, le domaine de la déformation élastique de celui de la déformation plastique. L'accroissement infiniment petit de la contrainte (*charge complémentaire*) $d\sigma_{ij}$ conduit soit à la déformation élastique (décharge, si $d\sigma_{ij}$ est dirigé à l'intérieur de Σ), soit à la déformation plastique permanente (charge, si $d\sigma_{ij}$ est dirigé à l'extérieur de Σ). Les accroissements $d\sigma_{ij}$ qui se trouvent dans le plan tangent à la surface de charge (*changements neutres*) ne mèneront qu'aux déformations élastiques (c.-à-d. qu'il n'y aura pas de déformation plastique si le point figuratif se déplace sur la suface Σ). Cette condition (*condition de continuité*) est nécessaire pour assurer le passage continu de la déformation plastique à la déformation élastique pour une variation ininterrompue de la direction du vecteur charge complémentaire $d\sigma_{ij}$.

La surface de charge se dilate et se déplace au fur et à mesure que se développe l'écrouissage qui change la limite élastique (et d'ailleurs différemment dans diverses directions). En plasticité parfaite, la surface d'écoulement est la position limite des surfaces de charge lorsque celles-ci tendent toutes vers la surface initiale.

La forme et la position de la surface de charge dépendent en principe non seulement de l'état de contrainte courant, mais aussi de toute l'histoire précédente de la déformation.

2. Exemple. Construction d'une surface de charge d'après les données expérimentales. Envisageons l'exemple simple de la construction d'une surface de charge d'après les données expérimentales. Les essais ne pouvant pas être exécutés pour un état de contrainte triaxial arbitraire, on étudie les courbes de charge dans certaines sections de la surface de charge. D'habitude, on se borne à étudier les courbes de charge pour l'état de contrainte plan pour lequel une des contraintes principales est égale à zéro. Examinons ici, en particulier, les essais des tubes à parois minces sollicités par une pression intérieure p et un effort axial P (essais $p + P$ du paragraphe 7). Au cours de ces essais, le tube se trouve dans l'état de contrainte plan et les contraintes principales sont égales à σ_φ et σ_z. Désignons par σ_s la limite d'écoulement pour une traction monoaxiale, égale, disons, à une contrainte répondant à une déformation résiduelle de 0,2 % (limite pratique des déformations élastiques), et envisageons le plan des contraintes σ_z, σ_φ. Construisons la courbe d'écoulement *initiale* qui limite le domaine élastique pour le matériau initial (non écroui). A cet effet, on soumet une série d'éprouvettes à des essais pour différents rapports P/p (fixés à chaque essai); les voies correspondantes de mise en charge (qui seront évidemment des rayons) sont montrées en pointillé sur la fig. 26, *a*. Sur chaque rayon, on trouve expérimentalement un point correspondant à une déformation résiduelle de 0,2 %. Il va de soi que cette valeur est arbitraire et que l'on peut en principe en prendre une autre. Toutefois, il ne serait pas rationnel, compte tenu de différents effets secondaires (déformation sub-permanente, fluage) compliquant l'image. de choisir des grandeurs extrêmement petites en tant que valeurs représentatives. Réunissant tous les points trouvés par une ligne continue, on obtient la courbe de charge initiale Σ_0 (fig. 26, *a*). Si le matériau a subi au préalable une déformation plastique, la surface de charge sera construite de la manière suivante. Admettons, par exemple, qu'il faille construire une courbe de charge pour l'acier ayant subi une déformation plastique préalable pour une mise en charge exercée suivant le rayon OA (fig. 26, *b*). Prenons des tubes et soumettons-les à une charge suivant le rayon OA, supprimons ensuite la charge et essayons chaque tube à une certaine valeur fixée P/p (c.-à-d. suivant le rayon) jusqu'à ce que l'on obtienne une déformation résiduelle de 0,2 % sur le rayon choisi pour le tube donné. Portant les points correspondants sur le plan σ_z, σ_φ et réunissant ces points par une ligne douce, on obtient la courbe de charge voulue (fig. 26, *b*). Comme le montrent les essais, la courbe de charge se déplace dans la direction de la déformation plastique préalable.

Les essais effectués dans les conditions de l'état de contrainte plan, pour différents programmes de mise en charge, permettent de se faire une idée sur la relation existant entre la surface de charge et le phénomène de la déformation plastique.

Il importe de souligner que le revers de la surface Σ est défini avec une erreur considérable (cf. L. Katchanov « Sur le problème

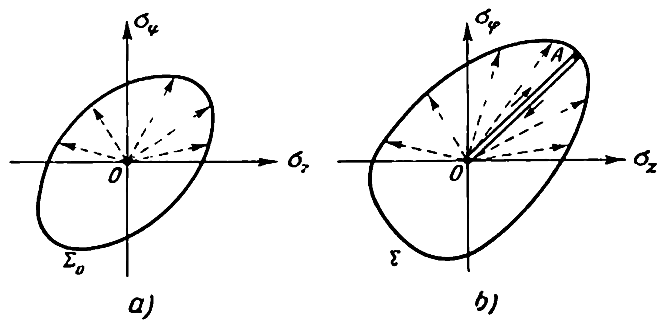


Fig. 26

de la construction expérimentale des surfaces d'écoulement », Mécanique des solides, n° 4, 1971). Il est difficile, dans ces circonstances, d'appliquer la notion de la surface de charge à des voies complexes de la déformation.

R e m a r q u e. Il convient de souligner les difficultés auxquelles se heurte la construction expérimentale des surfaces de charge. La détermination de la limite d'écoulement à partir de la limite de proportionnalité ou, en cas de valeur insignifiante (0,01 % ou 0,02 %), de la déformation résiduelle peut conduire à des conclusions erronées vu l'influence des effets secondaires, ce qui implique que l'on se base parfois sur des tolérances grossières (par exemple, $\Delta =$ $= 0{,}2$ %). Ceci est admissible si la limite d'écoulement est assez élevée et l'écrouissage relativement petit ; il en résulte alors une petite erreur relative. Une tolérance de 0,2 % peut mener à de grosses erreurs si l'écrouissage est important ou la limite élastique basse. Pour ce qui est des autres auteurs, ils surmontent ces difficultés en utilisant diverses tolérances pour exprimer la valeur de la limite d'écoulement (de 0,02 à 0,2 et même 0,5 %). Cette procédure, tout en fournissant une information utile, est en contradiction avec le schéma théorique de l'unicité de la surface d'écoulement dans l'état donné.

Le matériau s'écrouit dans la direction de la déformation précédente et se ramollit dans le sens inverse (« effet de Bauschinger »). La limite d'écoulement d'un matériau ramolli étant relativement basse (parfois même difficilement perceptible), sa définition expérimentale dépend notablement de la tolérance.

D'après les données expérimentales, la définition de la limite d'écoulement devient nettement moins précise (de 10 fois environ) avec l'éloignement de la direction OA (fig. 26, b) de la déformation plastique précédente. En principe, seule la petite partie avant de la surface de charge présente une importance réelle. Elle est relativement stable par rapport au choix de la tolérance et se distingue par un passage plus ou moins net au domaine plastique. Quant à la partie arrière de la surface de charge, elle dépend pour beaucoup de la valeur de la tolérance. La détermination de l'effet de Bauschinger effectuée de la sorte est purement conventionnelle.

En rapport avec ce qui précède il y a lieu de s'interroger sur la correspondance des notions théoriques avec les données expérimentales ainsi que sur la méthode employée pour la conduite des essais.

Pour certains matériaux, il est possible que la construction de la partie arrière de la surface d'écoulement soit réalisable dans le cas de la diminution optimale de la tolérance et de l'estimation appropriée des effets secondaires concomittants. On peut aussi recommander le procédé commun suivant pour déterminer une « vraie » limite d'écoulement suivant les données expérimentales. D'après les limites d'écoulement expérimentales pour des tolérances voisines relativement grossières (par exemple, pour les tolérances $\Delta = 0{,}1$ % et $\Delta = 0{,}2$ %), on trouve une « vraie » limite d'écoulement par extrapolation vers la tolérance « nulle ». La précision de cette extrapolation peut être augmentée s'il y a des points complémentaires.

3. Quelques formes des surfaces de charge. Envisageons quelques formes simples des surfaces de charge Σ. On considère que le matériau dans son état initial possède des limites d'écoulement identiques à la traction et à la compression.

Ecrouissage isotrope. Dans le paragraphe précédent, l'équation de la surface d'écoulement fixée était de la forme $f(\sigma_{ij}) = K$. Si l'on considère que l'écrouissage, lors de la déformation plastique, se développe identiquement dans toutes les directions et qu'il ne dépend pas de la pression hydrostatique σ, l'équation de la surface de charge revêt la forme suivante:

$$f(s_{ij}) = \varphi(q), \tag{17.1}$$

où le scalaire $q > 0$ sert d'une mesure quelconque de l'écrouissage isotrope et φ est une fonction croissante.

On utilise souvent le travail de la déformation plastique A_p en guise de mesure d'écrouissage q, c.-à-d.

$$q = \int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^{p}.$$

On se sert plus rarement de la caractéristique de la déformation plastique cumulée (paramètre d'Odqvist):

$$q = \int \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^{p}\, d\varepsilon_{ij}^{p}}.$$

Notons que l'équation (17.1) peut comprendre en général non pas une seule mais plusieurs mesures d'écrouissage $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Si le milieu est isotrope, la fonction $f(s_{ij})$ ne dépendra que des invariants du déviateur des contraintes. Notamment, si l'on ne tient compte que de l'invariant quadratique qui est l'intensité des contraintes tangentielles T (ce qui, en première approximation, est pleinement suffisant), l'équation (17.1) prend la forme

$$s_{ij}s_{ij} = \varphi(q). \tag{17.2}$$

Une condition similaire a déjà été envisagée au paragraphe 12.

Conformément à (17.1), la surface de charge se dilate uniformément (de manière isotrope) avec l'accroissement de la déformation

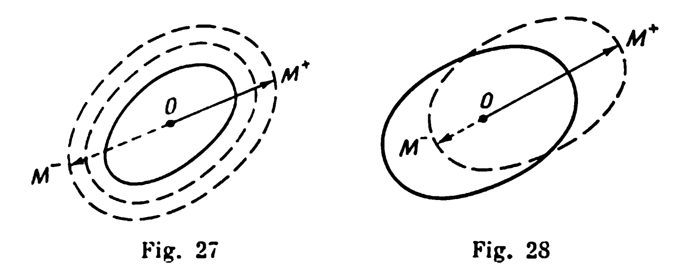


Fig. 27 Fig. 28

plastique tout en restant homologue à elle-même (fig. 27). Il va de soi que l'effet de Bauschinger est alors négligé puisque les limites d'écoulement à l'aller (OM^+) et au retour (OM^-) de la mise en charge sont égales en grandeur.

La notion de surface de charge isotrope peut être appliquée à la description des essais simples d'une déformation plastique qui se développe dans une direction essentielle, en particulier pour les essais de simple mise en charge.

Ecrouissage de translation. Soit une surface de charge Σ soumise à un déplacement rigide dans la direction de la déformation. La ligne pleine, sur la figure 28, montre la position initiale de la surface de charge, le pointillé sa position après une certaine déformation plastique. Si maintenant on charge de nouveau le matériau, la limite élastique augmentera alors dans la direction de la déformation précédente (OM^+) marquant ainsi l'écrouissage qui s'est produit; dans la direction inverse (OM^-), par contre, la limite élastique baissera (ramollissement). Ce schéma décrit du moins qualitativement l'effet de Bauschinger. Dans le cas envisagé, l'équation de la surface de charge prend la forme

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = K, \tag{17.3}$$

où a_{ij} sont les coordonnées du centre de la surface de charge qui varient à la déformation plastique et forment un déviateur. En géné-

ral, pour les accroissements da_{ij}, on indique certaines relations différentielles [86, 119, 146]. La variante la plus simple et la plus connue [103] est :

$$a_{ij} = c\varepsilon_{ij}^{p}, \tag{17.4}$$

où c est la constante positive caractéristique du matériau donné et ε_{ij}^{p} sont les composantes de la déformation plastique. Ainsi, les composantes du déplacement rigide de la surface de charge sont ici proportionnelles aux composantes de la déformation plastique.

Translation et dilatation. La combinaison des cas précédents nous conduit à un schéma plus complet :

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q). \tag{17.5}$$

La surface de charge subit une translation et se dilate en même temps uniformément dans toutes les directions, c.-à-d. qu'elle conserve sa forme.

L'équation (17.5) décrit de manière satisfaisante l'écrouissage du matériau pour une voie de charge suffisamment variable.

Si dans l'état initial le milieu est isotrope et si son comportement ne dépend que de l'invariant quadratique, représentant l'intensité des contraintes tangentielles T, l'équation (17.5) prend la forme

$$(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q). \tag{17.6}$$

D'après les données expérimentales, le second membre de l'équation citée (« rayon » de la surface) subit des transformations relativement faibles.

Il est facile d'envisager aussi des équations plus générales pour la surface de charge, tenant compte de l'anisotropie initiale du milieu et comprenant non pas un seul mais plusieurs paramètres d'écrouissage [86, 78].

4. Loi associative de l'écoulement. Nous utiliserons les hypothèses déjà rencontrées dans l'ouvrage pour en déduire les équations reliant les accroissements des composantes de la déformation avec les composantes de la contrainte et leurs accroissements.

Avant tout, on admet que les accroissements des composantes de la déformation totale se composent des accroissements des composantes de la déformation élastique et de la déformation plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}. \tag{17.7}$$

Les accroissements des composantes de la déformation élastique seront calculés conformément à la loi de Hooke. Il n'y a pas de variations plastiques du volume, c.-à-d. que

$$d\varepsilon_{ii}^{p} = 0.$$

La *condition de continuité* déjà mentionnée au début du présent paragraphe sera la supposition suivante. Supposons qu'à l'état

instantané corresponde une certaine position de la surface de charge Σ (fig. 15). La charge complémentaire infiniment petite $d\sigma_{ij}$ est accompagnée soit seulement des déformations élastiques, soit entraîne également les déformations plastiques $d\varepsilon_{ij}^p$. Comme nous l'avons déjà noté, il faut introduire les changements neutres $d\sigma_{ij}$ si nous avons affaire à une disparition continue des composantes plastiques lors du passage à la déformation élastique, ces changements se trouvant dans le plan tangent à la surface de charge Σ et conduisant seulement aux changements de la déformation élastique $d\varepsilon_{ij}^e$. Il en découle l'exigence que les accroissements des composantes de la déformation plastique $d\varepsilon_{ij}^p$ soient proportionnels à la grandeur

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij},$$

où l'accent signifie que l'accroissement $d'f$ n'est calculé que par rapport aux variations des composantes de la contrainte (¹). Si la charge complémentaire $d\sigma_{ij}$ se trouve dans le plan tangent à la surface de charge, on a $d'f = 0$ et $d\varepsilon_{ij}^p = 0$. Notons que pour la condition (17.1)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad \text{et} \quad d'f = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij}.$$

Par la suite, on adopte la loi associative de l'écoulement selon laquelle, dans le cas d'écrouissage également, le vecteur des accroissements $d\varepsilon_{ij}^p$ est dirigé suivant la normale à la surface de charge Σ. Par conséquent, les composantes $d\varepsilon_{ij}^p$ doivent être proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à Σ, qui ne se distinguent des dérivées partielles $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ que par un facteur scalaire commun. Ainsi,

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d'f \quad && \text{pour} \quad d'f \geqslant 0, \\ d\varepsilon_{ij}^p &= 0 && \text{pour} \quad d'f < 0 \ (\text{décharge}). \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Le facteur de proportionnalité g est appelé *fonction d'écrouissage*; celle-ci caractérise le degré obtenu de l'écrouissage et dépend en général de l'histoire de la déformation. Si l'état de contrainte courant σ_{ij} correspond aux points à l'intérieur de Σ, c.-à-d. s'il est élastique, on a $d\varepsilon_{ij}^p = 0$.

Puisque $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0$ pour les corps écrouissables (cf. postulat de Drucker, paragraphe 18), conformément à (17.8) on a pour la mise en charge $g\,(d'f)^2 > 0$, c.-à-d. $g > 0$.

La donnée d'une surface de charge lisse pour la loi associative d'écoulement définit complètement les accroissements de la déformation plastique. La fonction d'écrouissage g résulte des équations

(¹) C'est-à-dire pour des déformations plastiques invariables.

de la surface de charge (c.-à-d. de la condition d'écrouissage) si l'on tient compte de ce que $df = d\varphi$ et si l'on utilise les relations de (17.8).

Soit, par exemple, une surface de charge donnée par l'équation (17.2) où q est le paramètre d'Odqvist, on a alors $df = \varphi' dq = \varphi' \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$. Formant avec la convolution dq conformément à (17.8), on obtient:

$$g = (4\varphi' T)^{-1}.$$

Si l'on prend pour q le travail de la déformation plastique, alors $dq = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$. Calculant dq à l'aide de (17.8), on trouve facilement:

$$g = (4\varphi' T^2)^{-1}.$$

Les équations de la théorie de l'écoulement en écrouissage (13.14), envisagées dans le paragraphe 13, sont un cas particulier des équations obtenues ci-dessus. Elles découlent de (17.7), (17.8) pour

$$f(\sigma_{ij}) = T^2; \quad g = \frac{F(T)}{2T}. \tag{17.9}$$

Présentées sous cette forme, les équations (17.8) ont été formulées par Prager.

Notons également que pour la condition de l'écrouissage isotrope (17.2) les équations de la théorie de l'écrouissage (17.8) se ramènent à la même forme (13.14) la plus simple si on identifie au paramètre q le paramètre d'Odqvist ou le travail de la déformation plastique.

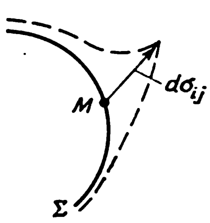
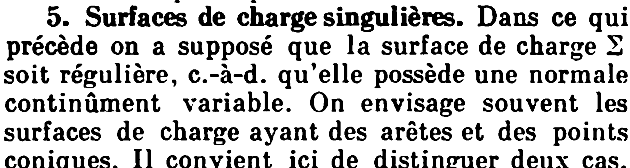
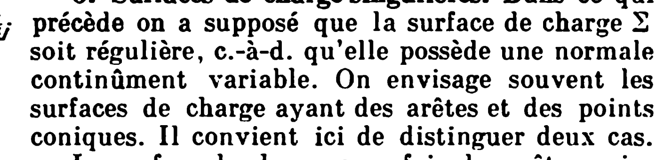


Fig. 29

5. Surfaces de charge singulières. Dans ce qui précède on a supposé que la surface de charge Σ soit régulière, c.-à-d. qu'elle possède une normale continûment variable. On envisage souvent les surfaces de charge ayant des arêtes et des points coniques. Il convient ici de distinguer deux cas.

La surface de charge a parfois des arêtes qui y occupent une position fixée. Par exemple, comme nous l'avons déjà noté, la solution du problème est souvent simplifiée si l'on passe de l'intensité des contraintes tangentielles T à la valeur voisine τ_{max} (paragraphe 1). Cela correspond au passage du cercle de von Mises sur le plan du déviateur à l'hexagone de Tresca — Saint-Venant (fig. 25). L'écoulement sur l'arête sera alors défini par une combinaison linéaire de courants de part et d'autre de l'arête.

Dans le deuxième cas, la singularité revêt un caractère beaucoup plus essentiel. Notamment, on peut admettre qu'une singularité, point conique (fig. 29) apparaît au voisinage du point M de la surface de charge où a lieu la mise en charge complémentaire $d\sigma_{ij}$. Il existe plusieurs théories relatives au développement de ces singularités sur les surfaces de charge [66, 78, 79]. Les équations de la théorie de la plasticité deviennent dans ce cas extrêmement complexes.

Néanmoins, en principe, l'analyse des constructions de ce genre présente un intérêt indéniable. Les résultats expérimentaux sont un peu contradictoires et ne permettent pas pour le moment de se prononcer définitivement sur l'existence des points coniques.

6. Considérations finales. Le développement de la théorie de la plasticité des milieux écrouissables est d'un grand intérêt pratique étant donné que nombre de métaux utilisés actuellement dans les constructions mécaniques sont sensiblement écrouissables. Comme il a déjà été noté, les théories du corps écrouissable exposées ci-dessus ne donnent pas la description complète du comportement des métaux dans les conditions de mise en charge complexe. Par ailleurs, ces équations sont fort complexes; leur application à la solution des problèmes concrets présente de grandes difficultés mathématiques. C'est pourquoi, dans les applications, on se base le plus souvent soit sur les équations de Prandtl — Reuss (13.14) pour la condition de l'écrouissage isotrope, soit sur les équations de la théorie des déformations (14.23) pour la loi de la « courbe unique » (l'intensité des contraintes tangentielles étant la fonction de l'intensité des déformations de cisaillement, paragraphe 12). La loi de l'écrouissage isotrope est vraie pour des voies de mise en charge relativement simples. Le schéma de la courbe unique n'est acceptable que dans des limites encore plus étroites. La solution des problèmes aux limites, sur la base des deux théories, est en fait limitée au cadre de la mise en charge «relativement simple ». Il ne semble pas que l'on puisse formuler cette condition de manière plus précise. La confrontation des solutions existantes, trouvées suivant les deux théories, témoigne d'habitude de petites divergences.

Le problème des déformations plastiques est très important pour les mises en charge cycliques. Les résultats expérimentaux portant sur ce sujet sont donnés dans le livre de V. Moskvitine [18]. On y trouve également un schéma d'application des équations de la théorie des déformations à la description de ces phénomènes. Les relations décrivant la mise en charge multiple du milieu élasto-plastique sur la base d'une théorie de l'écoulement qui est plus conforme du point de vue physique, ont été obtenues dans l'article de R. Aroutiounian et A. Vakoulenko [86]. Les auteurs partent des équations de la surface de charge (17.6) tout en définissant les « coordonnées du centre » a_{ij} par des relations différentielles quelconques. Les résultats théoriques s'accordent de manière satisfaisante avec les données expérimentales.

Pour des voies de mise en charge plus complexes, les théories exposées du corps écrouissable s'avèrent souvent insuffisantes.

Dans ces conditions, il est donc naturel d'essayer de sortir du cercle des notions formelles introduites, relatives à la surface de charge et à la loi associative de l'écoulement, et d'examiner d'autres aspects pour l'élaboration de la théorie du milieu écrouissable. On développe des procédés variés pour résoudre ce problème. L'analyse de ces théories sortant du cadre du présent ouvrage, nous ne fournirons donc que des renvois bibliographiques.

Notons tout d'abord le cycle des travaux [31,63,78,89] où l'on fait appel aux méthodes de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, qui fut développée dans les années de l'après-guerre, pour établir les structures des relations de la déformation plastique.

L'autre voie consiste à imposer des restrictions suffisamment générales à la structure des équations tensorielles. Les conditions pour lesquelles les tenseurs peuvent être représentés par des vecteurs ont été notées précédemment (paragraphe 16). A. Iliouchine [10] distingua la classe des relations tensorielles présentant un énoncé vectoriel invariant correspondant. Ceci confère à l'analyse un caractère manifeste, mais insuffisamment général.

Enfin, il convient de mentionner les soi-disant « théories physiques de la plasticité » dans lesquelles les propriétés du milieu sont déduites sur la base de

l'analyse de la déformation des cristaux particuliers. Une théorie de ce type (« théorie du glissement ») a été proposée par Batdorf et Budianski [140] pour l'état de contrainte complexe. Le métal est constitué de cristaux distribués irrégulièrement. Un glissement plastique, suivant certains plans, se produit dans chacun d'entre eux. La prise de la moyenne statistique sur les glissements conduit aux relations « contrainte-déformation » présentant une structure complexe. Des variantes quelque peu différentes de la théorie du glissement sont développées dans les travaux de A. Malmeister [16] et d'autres auteurs. Notons que les équations de la théorie du glissement admettent une explication purement phénoménologique [111].

Les équations de Batdorf — Budianski, en dépit de leur complexité, ne parviennent pas à décrire plusieurs propriétés importantes (par exemple, l'effet de Bauschinger). Il convient de continuer à approfondir la théorie pour tenir compte de cet effet.

18. POSTULAT DE DRUCKER. CONVEXITÉ DE LA SURFACE DE CHARGE. ARGUMENTATION DE LA LOI ASSOCIATIVE DE L'ÉCOULEMENT

1. Condition d'écrouissage et postulat de Drucker. Dans les paragraphes précédents, on s'est penché à plusieurs reprises sur le cas du milieu écrouissable. Il s'agissait en fait d'un milieu pour lequel la limite élastique croissait au cours de la déformation. Cependant,

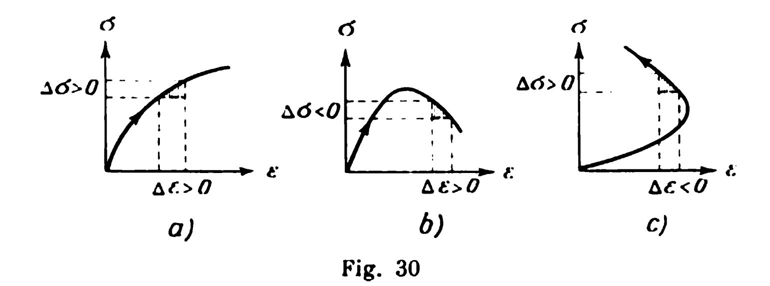


Fig. 30

la définition rigoureuse de l'écrouissage n'avait pas été faite. Et pourtant, les exemples simples nous convainquent de la nécessité qu'il y a de donner une définition plus nette du matériau écrouissable. Sur la fig. 30, les courbes σ, ε symbolisent la liaison existant entre les contraintes et les déformations.

D a n s l e c a s a) le matériau est vraiment écrouissable. La mise en charge complémentaire $\Delta\sigma > 0$ provoque ici une déformation complémentaire $\Delta\varepsilon > 0$, le produit $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0$; la contrainte complémentaire $\Delta\sigma > 0$ accomplit pour la déformation complémentaire $\Delta\varepsilon > 0$ un travail positif qui est représenté sur le dessin par le triangle hachuré. Nous conviendrons qu'un tel matériau sera appelé matériau *stable*.

D a n s l e c a s b), la courbe de déformation a une branche descendante, la déformation se poursuit pour une contrainte décroissante. Sur cet intervalle, la contrainte complémentaire $\Delta\sigma$ accom-

plit un travail négatif, c.-à-d. que $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Un tel matériau sera considéré *instable*.

Dans le cas c), la déformation décroît avec l'augmentation de la contrainte, avec en même temps $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Dans le cadre du modèle mécanique, ce cas est en contradiction avec la loi de conservation de l'énergie, car il permet de fournir un travail utile « gratuis » (par exemple, avec une charge complémentaire ΔP, la barre soumise à la traction soulève légèrement la charge P).

La déformation des matériaux réels ne correspond qu'au premier de ces cas. Le postulat de Drucker généralise les raisonnements cités et donne une détermination appropriée de l'écrouissage.

Envisageons l'élément d'un milieu écrouissable, qui se trouve dans un état de contrainte initial quelconque σ_{ij}^0. Appliquons maintenant à cet élément des contraintes complémentaires (généralement de valeur arbitraire) et supprimons-les ensuite. On suppose les transformations suffisamment lentes pour pouvoir considérer le phénomène comme isothermique. On postulera alors que

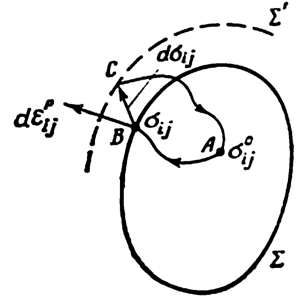


Fig. 31

1. *En cours de mise en charge*, les contraintes complémentaires produisent un travail positif.

2. Les *contraintes complémentaires* exécutent un travail positif *pour le cycle entier* de la mise en charge complémentaire et de la décharge si les déformations constatées étaient plastiques. Pour le *matériau écrouissable*, le travail ne sera nul que pour des déformations purement élastiques.

Soulignons une fois de plus qu'il ne s'agit pas du travail de la somme des contraintes mais de celui des contraintes complémentaires associées aux déformations supplémentaires. Revenant au cas b) de la fig. 30, on constate que le travail de la contrainte σ est positif (c.-à-d. que $\sigma\Delta\varepsilon > 0$), bien que $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Conformément au postulat de Drucker, la poursuite de la déformation plastique d'un corps écrouissable nécessite l'application d'efforts supplémentaires.

Le postulat de Drucker conduit à des inégalités importantes.

Soit Σ la position instantanée de la surface de charge (fig. 31). Examinons une voie de chargement quelconque $A \to B \to C$. Au point initial A correspond l'état de contrainte initial σ_{ij}^0 à l'intérieur ou à la surface Σ. Le point B (état de contrainte σ_{ij}) se trouve sur la surface Σ. Une charge complémentaire $d\sigma_{ij}$ infiniment petite est produite au point B. Elle a pour l'effet respectivement la déformation élastique $d\varepsilon_{ij}^e$ et la déformation plastique $d\varepsilon_{ij}^p$.

Σ' désigne une nouvelle position voisine de la surface de charge. Revenons maintenant au point A par une voie quelconque $C \to A$. Conformément au postulat de Drucker, le travail des contraintes complémentaires pour le cycle entier sera positif, c.-à-d.

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij} > 0.$$

Pour la voie fermée $ABCA$, le travail des contraintes complémentaires est nul pour les déformations élastiques $d\varepsilon_{ij}^e$, par conséquent,

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij}^p > 0.$$

La déformation plastique n'ayant lieu que sur un intervalle infiniment petit $B \to C$, la dernière inégalité prend la forme

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij}^p > 0. \tag{18.1}$$

Cette inégalité est parfois appelée *principe local du maximum*. Pour le matériau écrouissable, l'égalité à zéro n'est possible qu'en l'absence des déformations plastiques.

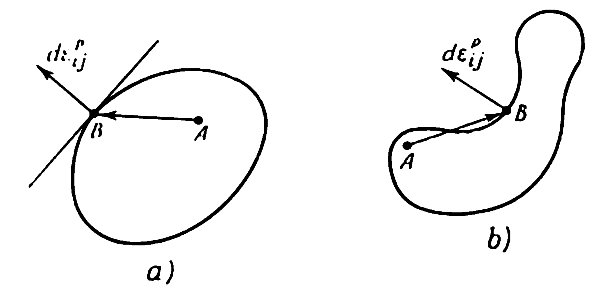


Fig. 32

Envisageons maintenant un autre cycle pour lequel l'état de contrainte initial sera l'état σ_{ij} répondant au point B sur la surface de charge Σ. Alors, en vertu du postulat de Drucker, on a:

Pour la mise en charge $B \to C$

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} > 0. \tag{18.2}$$

Pour le cycle mise en charge-décharge $B \to C \to B$

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p > 0 \tag{18.3}$$

(étant donné que le travail de déformation élastique est nul en cycle fermé).

2. Convexité de la surface de charge et nécessité de la loi associative de l'écoulement. Conformément à l'inégalité (18.1), le produit scalaire du vecteur des contraintes complémentaires $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ (vecteur $\overline{AB}$ de la fig. 32) par le vecteur des accroissements de la déformation

plastique $d\varepsilon_{ij}^p$ est positif. Par conséquent, dans n'importe quel cas, ces vecteurs forment entre eux un angle aigu. Il en découle la convexité de la surface de charge et la loi associative de l'écoulement (c.-à-d. la normalité de vecteur $d\varepsilon_{ij}^p$ à la surface Σ).

En effet, soit une surface de charge Σ convexe (c.-à-d. que Σ se trouve d'un côté du plan tangent (fig. 32, *a*) ou du plan de référence, comme c'est le cas du prisme hexagonal de Tresca — Saint-Venant). La condition (18.1) ne sera satisfaite que si le vecteur $d\varepsilon_{ij}^p$ est normal à Σ ; sinon il se trouvera toujours un vecteur $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$

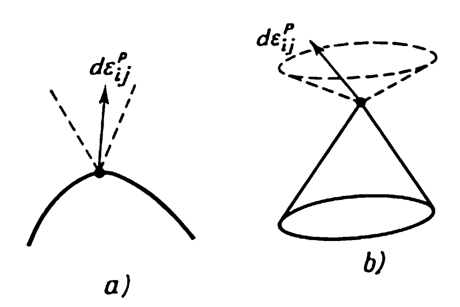


Fig. 33

formant un angle obtus avec $d\varepsilon_{ij}^p$. Notons que $d\varepsilon_{ij}^p$ dépend de la configuration de la surface de charge Σ et non pas du choix du point A à l'intérieur de Σ.

Par ailleurs, si la surface Σ n'est pas convexe (fig. 32, *b*), alors, indépendamment de la pente du vecteur $d\varepsilon_{ij}^p$ par rapport à la surface Σ, on peut toujours trouver un point A pour lequel la condition (18.1) ne sera pas vérifiée.

La condition (18.1) impose aussi des restrictions déterminées à l'écoulement plastique le long des arêtes de la surface de charge ainsi que dans les points coniques de cette dernière. On a déjà admis dans le paragraphe 17 que l'écoulement sur les arêtes est une combinaison linéaire des courants de part et d'autre de l'arête, c.-à-d. que le vecteur $d\varepsilon_{ij}^p$ est perpendiculaire à l'arête et qu'il se trouve à l'intérieur de l'angle formé par les normales à Σ de part et d'autre de l'arête (fig. 33, *a*). Cette situation découle maintenant de la condition (18.1). Dans le cas du point conique, le vecteur écoulement $d\varepsilon_{ij}^p$ doit pour la même raison se trouver à l'intérieur du cône formé par les normales à la surface de charge, au voisinage du sommet (fig. 33, *b*).

3. Cas de la plasticité parfaite. Nous avons déjà noté dans le paragraphe précédent que le cas de la plasticité parfaite, quand la surface de charge (d'écoulement) Σ est fixée, représente le cas limite de l'écrouissage si toutes les surfaces de charge consécutives tendent

vers leur position initiale. Si l'on envisage la courbe de déformation σ, ε, symbolisant la liaison entre les contraintes et les déformations, nous aurons alors pour le corps parfaitement plastique $\Delta\sigma = 0$, par conséquent, $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = 0$. La mise en charge complémentaire $d\sigma_{ij}$ sera alors dans le plan tangent à la surface d'écoulement. La condition de positivité du travail des contraintes complémentaires doit être remplacée par la condition de non-négativité de ce travail. Le postulat de Drucker, avec une telle extension, reste également valable pour le matériau parfaitement plastique. L'inégalité (18.1) étant vérifiée avec le signe $\geqslant$, la *surface d'écoulement doit être convexe.* Il en sera de même du vecteur de l'écoulement plastique $d\varepsilon_{ij}^p$ qui sera normal à la surface d'écoulement, illustrant ainsi la *loi associative de l'écoulement.*

Dans le cas de la plasticité parfaite, la condition (18.3) est remplacée par l'égalité

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = 0 \tag{18.4}$$

exprimant l'orthogonalité des vecteurs qu'elle comprend. Cette condition satisfait au phénomène de mise en charge $B \to C$ et au cycle tout entier $B \to C \to B$.

4. Considérations finales. Le postulat de Drucker, généralisant essentiellement de simples faits, conduit à des conclusions importantes concernant la convexité de la surface de charge et la nécessité de la loi associative de l'écoulement plastique. Il est évident que l'on peut maintenant construire les équations de la plasticité d'une autre façon que dans les paragraphes précédents. En effet, il suffit pour cela de partir de la notion de la surface de charge et d'adopter le postulat de Drucker ainsi que la condition de continuité (paragraphe 17). Les équations de l'écoulement plastique, examinées au paragraphe 13, découleront nécessairement de ces hypothèses.

Notons, enfin, que les inégalités (18.1), (18.2) résultant du postulat de Drucker permettent aussi d'aborder sans difficultés l'établissement des théorèmes d'unicité et des principes d'extremum (chapitre VIII).

19. SUR LES ÉQUATIONS DE LA THERMOPLASTICITÉ

Les éléments de nombreuses machines et installations sont sollicités dans des conditions de température élevée et souvent transitoire. Les déformations plastiques sont fréquentes pour ces conditions. L'analyse du comportement plastique des métaux se complique notablement s'il y a un champ de température du fait que la limite d'écoulement dépend de cette dernière. Par la suite, on suppose que la température ne soit pas trop élevée et on peut donc négliger les déformations dues au fluage à chaud. Cette condition peut être affaiblie si la déformation se produit dans un petit intervalle de

temps, car dans ce cas les déformations dues au fluage ne parviennent pas à se développer et on peut les négliger.

1. Equations de la théorie de l'écoulement plastique. Si la température varie, le changement relatif de volume est défini par la relation connue

$$\varepsilon = 3k\sigma + 3\alpha\theta, \tag{19.1}$$

où k est le coefficient de compression volumique, α le coefficient de dilatation thermique linéaire et θ la température.

Les composantes du déviateur des déformations e_{ij} ne comprennent pas évidemment de dilatations thermiques, par conséquent, les accroissements de ces composantes seront la somme des accroissements des composantes de la déformation élastique et de la déformation plastique:

$$de_{ij} = de^e_{ij} + de^p_{ij}. \tag{19.2}$$

Les composantes des déviateurs des contraintes et des déformations élastiques sont liées par la loi de Hooke, c.-à-d.

$$de^e_{ij} = \frac{1}{2G}\, ds_{ij}, \tag{19.3}$$

où G est le module de glissement (coefficient d'élasticité transversale).

Envisageons maintenant les composantes plastiques de^p_{ij}. Comme pour le cas isothermique, la théorie repose sur la notion de *surface de charge* Σ se trouvant dans l'espace des contraintes et limitant le domaine des déformations élastiques. Dans le cas non isothermique, la surface de charge dépend encore de la température, c.à-d. qu'elle sera définie par une relation de la forme

$$f(s_{ij}, \theta, q, \ldots) = 0. \tag{19.4}$$

Bornons-nous à envisager le cas simple de l'écrouissage isotrope correspondant à la condition (17.2). On peut alors écrire l'équation de la surface de charge sous la forme

$$f \equiv s_{ij}s_{ij} - \varphi(q, \theta) = 0. \tag{19.5}$$

Si la déformation plastique continue à se développer, le point figuratif se trouve sur la surface de charge (19.5) et en conséquence

$$df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}\, ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq = 0. \tag{19.6}$$

Examinons le critère de la mise en charge et de la décharge. Désignons par $d'f$ les deux premiers termes dans (19.6).

La décharge. Dans ce cas, le point figuratif se précipite à l'intérieur de la surface de charge, c.-à-d. que $df < 0$; les déformations plastiques restant invariables, on a par conséquent $dq = 0$ et

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}\, ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\theta < 0.$$

Les changements neutres. $df = 0$ si le point figuratif se déplace sur la surface de charge Σ. A ce moment il n'y a pas de déformations plastiques, c.-à-d. $dq = 0$. On a alors des changements neutres. Dans ce cas

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = 0.$$

La mise en charge. S'il y a déformation plastique, le point figuratif se trouve tout le temps sur la surface Σ en déplacement, c.-à-d. $df = 0$.

A la mise en charge plastique satisfait la condition

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta > 0.$$

Passons maintenant à l'énoncé des relations existant entre les accroissements des composantes de la déformation plastique. Comme dans le cas isothermique (paragraphe 17), ces accroissements doivent être proportionnels à la grandeur $d'f$ qui caractérise le passage de la mise en charge à la décharge. Par la suite, on suppose valable aussi la loi associative de l'écoulement dans le cas non isothermique. Par conséquent, le vecteur accroissements de_{ij}^p doit être dirigé suivant la normale à la surface de charge Σ dans l'espace des contraintes, ce qui revient à dire que les grandeurs de_{ij}^p doivent être proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à Σ, c.-à-d. aux dérivées $\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}$. Ainsi,

$$\left.\begin{aligned} de_{ij}^p &= 0 && \text{pour} \quad d'f < 0 \text{ (décharge)}, \\ de_{ij}^p &= g \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} d'f && \text{pour} \quad d'f \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (19.7)$$

où $g > 0$ est la fonction d'écrouissage caractérisant le degré atteint de l'écrouissage et dépendant de l'histoire de la déformation et de l'échauffement. La fonction g est liée à l'équation de la surface de charge (cf. paragraphe 17).

On se heurte à des difficultés notables dans l'élaboration des équations de la thermoplasticité qui sont vérifiées dans les limites assez étendues de variations des contraintes et de la température. Les différents aspects de ce problème sont discutés dans les ouvrages [43, 78, 88, 90].

2. Cas de la plasticité parfaite. S'il n'y a pas d'écrouissage, la surface d'écoulement sera définie par l'équation

$$f(s_{ij}, \theta) = 0.$$

Notamment, pour la condition d'écoulement de von Mises:

$$f = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2(\theta) = 0, \qquad (19.8)$$

où la limite d'écoulement k est une fonction de la température θ. Conformément à la loi associative de l'écoulement (16.7) et à la condition (19.8), on trouve :

$$\left.\begin{aligned} de^p_{ij} &= 0 \text{ pour la décharge,} \\ de^p_{ij} &= d\lambda\cdot s_{ij} \text{ pour } f=0 \text{ et } df=0, \end{aligned}\right\} \qquad (19.9)$$

où le facteur $d\lambda$ est proportionnel à l'accroissement du travail de déformation plastique.

3. Equations de la théorie des déformations. Comme dans la théorie de l'écoulement, le changement relatif de volume est déterminé ici par la relation (19.1), tandis que les composantes du déviateur des déformations représentent la somme des composantes de la déformation élastique et de celles de la déformation plastique :

$$e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}. \qquad (19.10)$$

Les composantes du déviateur des déformations élastiques satisfont à la loi de Hooke (19.3). Pour les composantes du déviateur des déformations plastiques, nous avons des relations analogues aux formules (14.5) :

$$e^p_{ij} = \varphi s_{ij}, \qquad (19.11)$$

où, dans le cas d'écrouissage, $\varphi = \varphi\,(T,\ \theta)$. Les défauts de la théorie des déformations sont encore plus apparents dans le cas non isothermique. Les variations finies de la température ont pour effet de mener à une déformation plastique univoque. Néanmoins, la théorie des déformations trouve des applications courantes pour le calcul des contraintes thermiques au-delà de la limite élastique. Cependant, on doit en même temps respecter des restrictions notables : la mise en charge doit être voisine de la mise en charge simple et la température doit varier monotonement.

Dans ce qui précède, nous avons examiné un cas d'écrouissage. S'il s'agit de la plasticité parfaite, la fonction φ reste indéfinie, mais on ajoute la condition d'écoulement (par exemple, la condition de von Mises (19.8)).

4. Considérations finales. D'habitude, dans les problèmes thermiques, il ne faut pas négliger les déformations élastiques. Néanmoins, on peut, dans certains cas d'écoulement plastique développé, utiliser un schéma rigide-plastique.

De même que dans le cas isothermique, on peut envisager les surfaces de charge (d'écoulement) singulières. On peut, par exemple, considérer le prisme hexagonal de Tresca — Saint-Venant. Les idées précédentes se conservent pour l'écoulement sur l'arête (paragraphes 16 et 17).

Le lecteur trouvera les solutions des problèmes particuliers et les généralisations suivantes dans la littérature spéciale consacrée à la thermoplasticité [43, 71, 88, 90].

Exercices du chapitre II

1. Etablir la condition de plasticité de von Mises pour le cas de la déformation symétrique axiale d'un tube à paroi mince (paragraphe 7).

2. Etablir la condition de plasticité de Tresca — Saint-Venant ($\tau_{max} = \text{const}$) pour une enveloppe sphérique fermée mince, sollicitée par une pression interne.

3. Soit une enveloppe sphérique fermée mince, faite d'un matériau écrouissable, qui est soumise à l'action de la pression interne. Trouver la relation entre la pression et les variations du diamètre de l'enveloppe.

4. Les équations de la théorie des déformations (paragraphe 14) et de la théorie de l'écoulement (paragraphe 13) sont équivalentes en traction monoaxiale. Expliquer alors comment sont liées les fonctions $\bar{g}(T)$ et $F(T)$?

5. Soit une feuille plane uniformément étendue dans toutes les directions suivant son plan. Etablir pour cette feuille la condition d'écoulement de von Mises et de Tresca — Saint-Venant.

6. Soit une feuille mince et plane, se trouvant dans le plan x, y et soumise à la traction uniforme q dans la direction des x et à la compression uniforme p dans la direction des y. Etablir les conditions d'écoulement de von Mises et de Tresca — Saint-Vanant. Comment seront orientés les éléments de surface sollicités par une contrainte tangentielle maximale?

7. Dans le plan des contraintes principales σ_1, σ_2, la courbe d'écoulement est définie par les conditions $|\sigma_1| = \sigma_s$, $|\sigma_2| = \sigma_s$. Ecrire les équations d'écoulement dans différents régimes selon la loi associative.

8. Trouver la fonction d'écrouissage g dans le cas d'une surface de charge de la forme $(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) = K$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE. PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES

20. SYSTÈME D'ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE PLASTIQUE

Dans les domaines de la déformation élastique auxquels satisfait la loi de Hooke, les champs de contraintes et de déformations sont décrits par les équations de la théorie de l'élasticité.

Dans les domaines de la déformation plastique, les équations applicables sont celles de la théorie des déformations plastiques ou de la théorie de l'écoulement plastique (ou, peut-être encore, des relations plus complexes). Les systèmes d'équations caractérisant les champs de contraintes et de déformations y sont bien plus complexes. Nous examinerons donc brièvement ces systèmes.

1. Théorie de la déformation plastique. Pour la mise en charge on obtient, dans ce cas, des équations qui ressemblent à un certain degré, quant à leur forme, aux équations de la théorie de l'élasticité. Ici, on peut également indiquer les équations d'équilibre plastique ne contenant que les déplacements ou les contraintes.

Les équations différentielles d'équilibre relatives aux déplacements, qui généralisent les équations connues de Lamé dans la théorie de l'élasticité, pourront être établies comme suit. Profitons des formules (14.17):

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \tag{20.1}$$

où le potentiel du travail de déformation Π est une fonction des composantes de la déformation. Introduisant (20.1) dans l'équation d'équilibre (4.2), on en vient au système de trois équations·

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)+\rho F_j=0. \tag{20.2}$$

Eliminant de cette équation les composantes de la déformation à l'aide des formules (2.3), on obtient un système de trois équations différentielles non linéaires aux dérivées partielles de deuxième ordre par rapport à des fonctions inconnues u_i. Les systèmes seront différents pour l'état d'écoulement et pour l'état d'écrouissage en raison de la diversité des potentiels du travail de déformation. Les équations

(20.2) se réduisent aux équations différentielles de Lamé si on prend pour Π l'expression du potentiel élastique (14.16).

Pour obtenir un système d'équations exprimées en composantes de la contrainte, il faut joindre aux équations différentielles d'équilibre des relations analogues aux identités de Beltrami — Mitchell de la théorie de l'élasticité. A cet effet, on introduit les composantes de la déformation découlant des équations de Hencky (14.6) dans les conditions de compatibilité de Saint-Venant (2.16). En outre, on rattachera en même temps à l'état d'écoulement la condition de plasticité de von Mises qui est nécessaire pour définir la fonction ψ. A l'état écroui, la fonction ψ sera définie directement par les contraintes $2\psi = \overline{g}(T)$, ce qui rend superflue la relation complémentaire.

Les systèmes d'équations correspondants ne sont pas développés ici en raison de leur complexité; pour les problèmes particuliers il est plus commode d'établir les équations directement.

Il va de soi que les méthodes classiques de l'intégration des équations de la théorie de l'élasticité ne sont pas applicables aux équations différentielles d'équilibre plastique. Néanmoins, les équations envisagées se prêtent bien aux méthodes de solution numériques. On utilise aussi avec succès différents procédés d'approximations successives. Bien entendu, la réalisation de ces méthodes implique en général l'emploi d'ordinateurs.

Nous indiquerons ici les modifications réussies de la méthode des différences finies dues à Southwell [60]. Par la suite, les énoncés variationnels des problèmes aux limites correspondants peuvent eux aussi être utilisés dans l'élaboration des solutions approchées (cf. paragraphes 67, 68).

On applique diverses variantes de la méthode des approximations successives pour résoudre les équations non linéaires de la théorie des déformations dans le cas de l'écrouissage. La solution des problèmes de la théorie de plasticité se réduit alors à la solution d'une série des problèmes linéaires dont chacun peut être interprété comme un certain problème d'élasticité (« méthode des solutions élastiques » [9, 87]).

Examinons brièvement quelques-uns de ces schémas.

L a m é t h o d e d e s c h a r g e s c o m p l é m e n t a i r e s. Ecrivons les relations (14.24) sous la forme

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\varepsilon}{2k}\,\delta_{ij} + 2Ge_{ij}\right) + \underline{2\,[g(\Gamma) - G]\,e_{ij}}.$$

Les termes soulignés déterminent les écarts par rapport à la loi de Hooke. Introduisons ces relations dans les équations différentielles d'équilibre et dans les conditions aux limites (1.2), les termes dus à la présence de termes soulignés et transmis dans les seconds membres des équations étant considérés comme connus. Les équations obtenues peuvent alors être interprétées comme étant

des équations de la théorie de l'élasticité relatives aux déplacements, mais avec des forces de volume et de surface complémentaires. A l'approximation d'ordre zéro, on pose ces charges complémentaires égales à zéro et on résout le problème de la théorie de l'élasticité. Les valeurs trouvées de $u_i^{(0)}$ sont introduites dans les seconds membres et l'on résout le problème de la théorie de l'élasticité avec les charges complémentaires calculées pour déterminer la première approximation, etc.

La méthode des déformations complémentaires. Ecrivons les relations (14.23) sous la forme

$$\varepsilon_{ij} = \left(k\sigma\delta_{ij} + \frac{1}{2G}s_{ij}\right) + \underline{\frac{1}{2}\left[\bar{g}(T) - \frac{1}{G}\right]s_{ij}}$$

et résolvons le problème par rapport aux contraintes. Les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites (1.2) resteront sans changement, tandis que les équations de la continuité contiendront des termes supplémentaires que l'on peut interpréter comme des déformations complémentaires et déterminer par les approximations successives.

La méthode des coefficients variables d'élasticité. On écrit le système d'équations sous la forme d'équations de la théorie de l'élasticité à « coefficients d'élasticité » variables et l'on applique la méthode du calcul pas à pas.

La convergence des méthodes exposées n'est étudiée qu'en partie.

2. Théorie de l'écoulement plastique. Les équations sont ici beaucoup plus compliquées. Les équations de l'écoulement plastique renfermant les composantes de la contrainte et les accroissements infiniment petits de ces composantes, et d'ailleurs, comme nous l'avons déjà noté, sous une forme non intégrable, en principe il ne semble pas possible de pouvoir résoudre ces équations par rapport aux contraintes. Par conséquent, on ne peut pas établir un système d'équations relatives aux déplacements, analogue à (20.2).

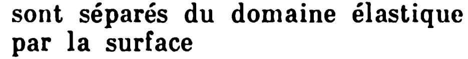
Il est possible d'établir un système d'équations ne comportant que les contraintes; cependant, outre les dérivées des composantes de la contrainte suivant les coordonnées, il renfermera aussi les dérivées des accroissements infiniment petits des composantes de la contrainte suivant les coordonnées.

Dans les problèmes particuliers, on emploie d'habitude différents procédés d'intégration numérique en suivant pas à pas l'évolution de l'état plastique pour les petits accroissements successifs du paramètre de la charge. On peut trouver les exemples de tels calculs dans le livre de R. Hill [47]. A chaque étape, il importe de résoudre un certain problème pour un corps anisotrope élastique à coefficients d'élasticité variables (ce problème est évidemment compliqué par les domaines éventuels de la décharge).

Le problème se simplifie dans une certaine mesure si l'on peut négliger les accroissements des composantes de la déformation élastique par comparaison avec les accroissements des composantes de la déformation plastique.

21. CONDITIONS DE CONTINUITÉ À LA FRONTIÈRE DES DOMAINES ÉLASTIQUE ET PLASTIQUE

Le corps se trouve entièrement dans un état élastique tant que l'intensité des contraintes tangentielles T n'aura atteint nulle part la limite d'écoulement τ_s. En général, avec l'accroissement des charges, des domaines de plasticité se forment dans le corps où ils sont séparés du domaine élastique par la surface



$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \text{const} = \frac{1}{2G} \qquad (21.1)$$

si l'on part de la théorie des déformations plastiques, et par la surface



$$A_p = 0 \qquad (21.2)$$

si l'on se base sur les équations de la théorie de l'écoulement ([1]).

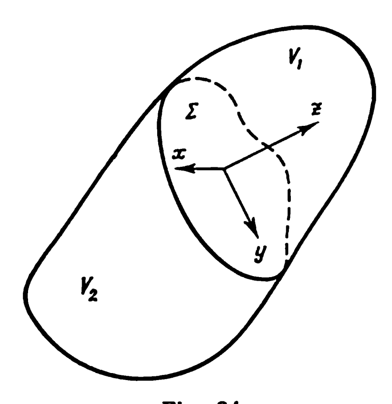


Fig. 34

Etudions les changements que subissent les composantes de la contrainte et de la déformation lors du passage à travers la surface Σ qui sépare les domaines V_1 et V_2 des différents états du milieu.

Traçons, en un point arbitraire de cette surface, un système des coordonnées rectangulaires x, y, z de manière que l'axe des z soit orienté suivant la normale à la surface Σ et que les axes des x et y se trouvent dans le plan tangent (fig. 34). Marquons les grandeurs se rapportant au domaine V_1 par un accent et celles du domaine V_2 par deux accents.

Les équations d'équilibre de l'élément de surface Σ mènent évidemment aux conditions

$$\sigma_z' = \sigma_z'', \quad \tau_{xz}' = \tau_{xz}'', \quad \tau_{yz}' = \tau_{yz}''. \qquad (21.3)$$

Nous supposerons que les déplacements sont des fonctions continues (c.-à-d. qu'il n'y a ni « fissures », ni « glissements »). Alors, l'arc arbitraire tracé sur la surface Σ doit présenter le même allongement quel que soit le côté dont on s'approche de Σ ; cette condition sera

([1]) Notons que φ et ψ (ainsi que A_p) varient de façon continue, c.-à-d. qu'il y a un passage continu de l'état d'élasticité à celui de plasticité.

vérifiée si sur Σ

$$\varepsilon'_x = \varepsilon''_x, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon''_y, \quad \gamma'_{xy} = \gamma''_{xy}. \tag{21.4}$$

Envisageons tout d'abord les équations de la *théorie des déformations*; nous avons ici $\varphi = 0$ sur Σ, et il découle alors des relations citées et des équations de Hencky

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x - \nu(\sigma'_y + \sigma'_z) &= \sigma''_x - \nu(\sigma''_y + \sigma''_z), \\ \sigma'_y - \nu(\sigma'_x + \sigma'_z) &= \sigma''_y - \nu(\sigma''_x + \sigma''_z), \\ \tau'_{xy} &= \tau''_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{21.5}$$

Utilisant la première relation (21.3), on trouve des équations (21.5) que $\sigma'_x = \sigma''_x$, $\sigma'_y = \sigma''_y$, ce qui signifie que *toutes les composantes de la contrainte sont continues sur la surface de séparation* Σ. Il résulte alors de l'équation de Hencky que *toutes les composantes de la déformation sont elles aussi continues sur* Σ.

Adressons-nous maintenant aux équations de la *théorie de l'écoulement plastique*. Les composantes de la déformation plastique seront nulles pour les éléments se trouvant sur Σ du côté de la zone plastique. Envisageons un point quelconque du milieu; ce point éprouve tout d'abord une déformation élastique et, sous charges croissantes, lorsque sera atteinte la limite d'écoulement, la surface de séparation Σ s'approchera du point en question. Les composantes de la contrainte et de la déformation des deux côtés de la surface Σ sont liées par la loi de Hooke compte tenu du fait qu'il y a un passage continu de l'état élastique à l'état d'écoulement. Mais alors les raisonnements se rapportant au cas précédent sont entièrement valables au même titre que les conclusions selon lesquelles toutes les composantes de la contrainte et de la déformation sur Σ sont continues.

Une analyse analogue permet également d'établir la continuité des composantes de la contrainte et de la déformation lorsque l'on passe de l'état d'écoulement à celui de l'écrouissage.

22. DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES RÉSIDUELLES

Si, lors de la mise en charge, le corps éprouve une déformation hétérogène, la décharge sera en général accompagnée non seulement des déformations résiduelles, mais aussi des contraintes résiduelles.

Supposons qu'à l'état de charge maximale (ce qui peut être représenté schématiquement par le point *B* sur la fig. 18, *a*) suivi d'une décharge correspondent des forces extérieures: forces de volume $\overline{\boldsymbol{F}}$, forces de surface $\overline{\boldsymbol{F}}_n$, composantes de la contrainte $\overline{\sigma}_{ij}$ et composantes de la déformation $\overline{\varepsilon}_{ij}$. Lors de la décharge le corps obéit à la loi de Hooke (paragraphe 11). Supposons que la décharge se termine par

une réduction à zéro de toutes les forces extérieures, le corps recevra alors les contraintes résiduelles σ^0_{ij} et les déformations résiduelles ε^0_{ij}. Considérant les déformations comme étant petites, on admet que la décharge soit réalisée par l'application des forces inverses $-\bar{F}$ et $-\bar{F}_n$.

On peut considérer les contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ et déformations $\bar{\varepsilon}_{ij}$ de départ comme des contraintes et déformations initiales (propres) quelconques du corps. Il est notoire que, *pour les petites déformations élastiques* (quand le principe de superposition des sollicitations des charges est généralement valable), la présence de contraintes et déformations initiales est sans effet pour les valeurs des contraintes et des déformations engendrées par les forces extérieures. Autrement dit, on peut déterminer les déformations et contraintes *élastiques* dues aux forces extérieures en considérant qu'il n'y a aucune contrainte ou déformation initiale dans le corps (¹).

Ainsi, on peut trouver les contraintes σ^*_{ij} et les déformations ε^*_{ij} répondant aux forces appliquées imaginaires $-\bar{F}$ et $-\bar{F}_n$ sans tenir compte de la distribution initiale des contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ et des déformations $\bar{\varepsilon}_{ij}$. Grâce à la possibilité de la superposition, les contraintes et les déformations résiduelles sont égales aux sommes respectives suivantes:

$$\sigma^0_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}+\sigma^*_{ij}; \quad \varepsilon^0_{ij}=\bar{\varepsilon}_{ij}+\varepsilon^*_{ij}. \tag{22.1}$$

Les déplacements résiduels u^0_i seront évidemment égaux à

$$u^0_i=\bar{u}_i+u^*_i. \tag{22.2}$$

Les résultats gardent leur signification *tant que la loi de Hooke ne sera pas perturbée à la décharge*, c.-à-d. tant que l'intensité des contraintes résiduelles T^0 ne dépassera pas une certaine valeur dépendant des propriétés du matériau. Si cette condition n'est pas vérifiée, la décharge est accompagnée de déformations plastiques *secondaires*. L'analyse de la décharge est dans ce cas notablement compliquée (cf. [18, 86]).

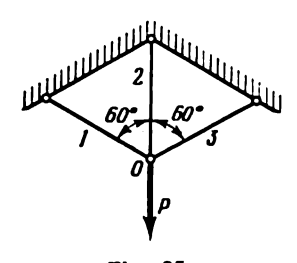


Fig. 35

En guise d'exemple simple, envisageons un système de trois barres de longueur l identique et de section F égale (fig. 35). Admettons que la barre verticale est de trop et soit x la contrainte dans cette barre. Partant des conditions d'équilibre, on trouve que les contraintes dans les barres

(¹) En raison de quoi dans la théorie de l'élasticité, il est admis qu'il n'y a dans le corps ni déformations, ni contraintes en l'absence de forces extérieures (hypothèse sur l'état naturel du corps).

sont

$$s_1 = s_3 = p - x\,; \quad s_2 = x\,; \quad p = \frac{P}{F}. \tag{22.3}$$

Pour le système élastique, nous avons

$$s_2 = \frac{2}{3}\,p\,; \quad s_1 = s_3 = \frac{1}{3}\,p\,; \quad p \leqslant \frac{3}{2}\,\sigma_s. \tag{22.4}$$

Si $p = \frac{3}{2}\,\sigma_s$, la barre *2* passe à l'état plastique et alors $s_2 = \sigma_s$. Les contraintes dans les barres du système élasto-plastique sont égales à

$$\bar{s}_2 = \sigma_s\,; \quad \bar{s}_1 = \bar{s}_3 = p - \sigma_s. \tag{22.5}$$

Cette solution est vraie tant que $\bar{s}_1 = \bar{s}_3 \leqslant \sigma_s$; la charge limite est atteinte lorsque $\bar{s}_1 = \bar{s}_3 = \sigma_s$ et l'ensemble du treillis passe à l'état plastique. Ainsi, $p \leqslant 2\sigma_s$.

Déduisant les contraintes élastiques (22.4) de (22.5), nous trouverons les contraintes résiduelles

$$s_2^0 = \sigma_s - \frac{2}{3}\,p\,; \qquad s_1^0 = s_3^0 = \frac{2}{3}\,p - \sigma_s. \tag{22.6}$$

Par suite de la condition $p \leqslant 2\sigma_s$, dans l'exemple envisagé, il n'y aura pas de déformations plastiques secondaires à la décharge.

23. CORPS RIGIDE-PLASTIQUE

Le corps est dans un état élastique lorsque les charges qui le sollicitent sont suffisamment petites. La croissance des charges y fait apparaître des domaines de déformation plastique; pour les matériaux non écrouissables examinés dans ce paragraphe ce seront les domaines d'écoulement. Leurs frontières, inconnues a priori, sont déterminées en partant des conditions de continuité (paragraphe 21). Les difficultés mathématiques auxquelles se heurte la solution de tels problèmes composés sont très importantes. On n'en connaît la solution que pour les cas les plus simples. Les simplifications éventuelles ultérieures de l'énoncé du problème acquièrent donc une importance majeure.

Il convient de mentionner avant tout l'hypothèse souvent utilisée de l'*incompressibilité du matériau* ($k = 0$). Cela conduit à une simplification notable des équations et représente une approximation fort bien acceptable dans de nombreuses questions. Cependant, la difficulté essentielle, qui réside dans la nécessité de résoudre le problème composé élasto-plastique, n'est pas éliminée.

Le schéma d'un *corps rigide-plastique* a reçu dernièrement un développement notable. Dans ce schéma, les déformations élastiques sont totalement négligées. Alors les équations de l'état plastique se simplifient notablement; ce seront, par exemple, les équations de Saint-Venant — von Mises (13.12).

Autrement dit, on adopte une valeur infinie pour le module d'élasticité ($E \rightarrow \infty$), ce qui correspond au passage de la courbe de déformation ayant un tronçon élastique (fig. 36, *a*) à la courbe de déformation n'ayant qu'un seul palier d'écoulement (fig. 36, *b*). Les pointillés avec les flèches figurant sur ces dessins montrent, dans les deux cas, comment se produit la décharge.

La question ainsi posée, le corps restera totalement indéformable (« rigide ») tant que l'état de contrainte n'aura commencé à satisfaire à la condition d'écoulement dans un point quelconque du système et l'écoulement plastique ne deviendra possible. Certaines

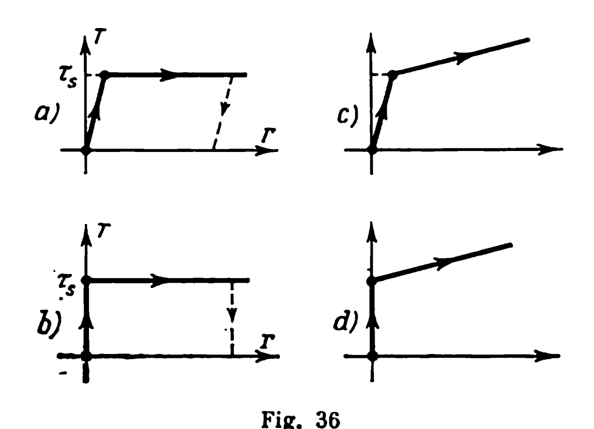


Fig. 36

parties du corps restant rigides, il faudra trouver, pour les zones plastiques, des solutions telles que les vitesses à leurs frontières correspondent aux vitesses de mouvement des parties rigides.

Il est naturel que ce schéma ne soit pas toujours applicable. Il mènera à une solution approchée convenable si le domaine plastique est tel que rien ne s'oppose au développement des déformations plastiques. Le problème de l'extension d'une plaque ayant un orifice suffisamment grand (fig. 102 et 103) peut en servir d'exemple ; la déformation plastique y est localisée dans la section affaiblie. Ceci implique que les déformations plastiques peuvent surpasser notablement les déformations élastiques et justifie donc l'application du schéma du corps rigide-plastique.

S'il se trouve que le domaine plastique est renfermé dans un domaine élastique (comme c'est le cas d'un espace avec une cavité sphérique sollicité par une pression intérieure, fig. 41) ou que l'écoulement plastique rencontre des obstacles par suite des particularités de la géométrie du corps ou en raison du caractère spécial des conditions aux limites, le schéma du corps rigide-plastique peut conduire à des erreurs appréciables.

L'interprétation successive du schéma du corps rigide-plastique est liée à une série de difficultés. Notons, avant tout, que la solution élaborée suivant ce schéma risque en général de ne pas coïncider avec la solution d'un *problème élasto-plastique* similaire pour $E \to \infty$. En maintes occasions (pour la flexion pure d'une barre par exemple), les domaines élastiques ne disparaissent que dans le cas d'une courbure infiniment grande, c.-à-d. que ce passage à la limite implique l'analyse des grandes déformations (ou l'énoncé de conditions particulières pour la croissance simultanée de E). Il n'existe pas de théorèmes permettant de juger de l'affinité des solutions des problèmes élasto-plastiques et des problèmes rigides-plastiques. Par la suite, dans les parties rigides, les contraintes doivent avoir un caractère acceptable lorsqu'elles se prolongent de la zone plastique et ne pas atteindre la condition d'écoulement, c.-à-d. que l'inégalité $T < \tau_s$ doit être respectée. Cette condition est difficile à vérifier du fait que la distribution des contraintes dans les parties rigides est indéterminée. L'absence d'unicité du champ des vitesses, caractéristique du schéma rigide-plastique, est liée à cette circonstance.

Néanmoins, la conception du corps rigide-plastique a permis de construire plusieurs nouvelles solutions (non seulement pour les problèmes statiques, mais aussi pour les problèmes dynamiques; cf. par exemple le paragraphe 78), bien confirmées par les expériences, et de formuler plus correctement nombre de problèmes relatifs à la théorie de la plasticité.

Pour conclure, nous notons que, comme pour le schéma du système rigide-plastique (caractérisé par un palier d'écoulement), on introduit parfois le schéma d'un *corps rigide susceptible d'écrouissage* qui est montré sur la figure 36, *d*, pour le cas de l'écrouissage linéaire. Ici également on néglige entièrement les déformations élastiques.

24. FLEXION ÉLASTO-PLASTIQUE DES POUTRES

Envisageons le problème de la flexion élasto-plastique des poutres; pour des raisons de simplicité, admettons que la section de la poutre possède deux axes de symétrie (fig. 37).

1. Flexion pure. Envisageons la flexion pure d'une poutre de section constante pour laquelle toutes les composantes du tenseur des contraintes, sauf σ_x, sont nulles, σ_x n'étant d'ailleurs que la fonction de la coordonnée y. Pour la poutre élastique, nous avons

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y,$$

oú M est le moment de flexion et J, le moment d'inertie de la section.

En l'absence d'écrouissage, dans les zones plastiques nous avons conformément à la condition d'écoulement

$$|\sigma_x| = \sigma_s.$$

Il est évident que la mise en charge de chaque élément est simple lorsque M croît et que, par conséquent, l'on peut se fonder sur les équations de la théorie des déformations.

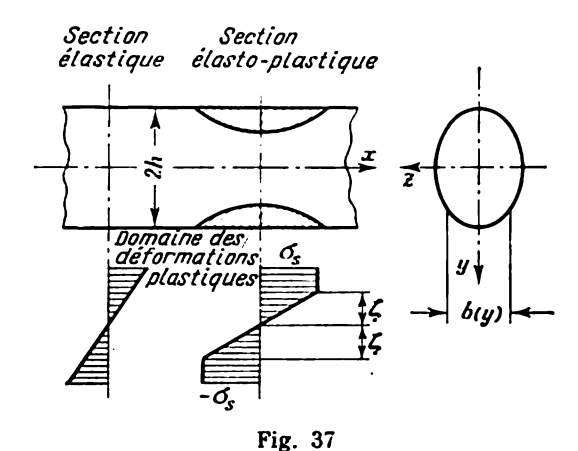


Fig. 37

Il est facile de voir que, selon l'hypothèse des sections planes et les équations relatives à cette théorie, les composantes de la déformation seront

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2v}{dx^2}y, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{k}{2}\sigma_s, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0,$$

où $v = v(x)$ est le déplacement de l'axe de la poutre (flèche). Les composantes du tenseur des déformations étant des fonctions linéaires de la seule coordonnée y, les identités de Saint-Venant sont vérifiées. Il en est de même des conditions de continuité sur la surface de séparation. Ainsi ([1]),

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_s \dfrac{y}{\zeta} & \text{pour } |y| \leqslant \zeta, \\ \sigma_s \cdot \text{sign } y & \text{pour } |y| \geqslant \zeta, \end{cases} \tag{24.1}$$

où ζ est la distance dans la section donnée entre le plan neutre de la poutre et la zone de plasticité permanente. Le moment de flexion M est supposé positif; s'il est négatif, on mettra le signe moins devant σ_s.

([1]) La fonction sign y est définie par les égalités: sign $y = +1$ pour $y > 0$, sign $y = -1$ pour $y < 0$, sign $0 = 0$.

Le moment des contraintes est égal au moment de flexion

$$M = \frac{\sigma_s}{\zeta} J_e + \sigma_s S_p, \tag{24.2}$$

où J_e est le moment d'inertie du noyau élastique et $\frac{1}{2} S_p$, le moment statique de l'une des zones plastiques par rapport à l'axe des z:

$$J_e = 2 \int_0^{\zeta} b(y)\, y^2\, dy, \quad S_p = 2 \int_{\zeta}^{h} b(y)\, y\, dy.$$

Ici, $b(y)$ est la largeur de la section et $2h$, la hauteur totale du profil. Ainsi, à une section de forme donnée répond la relation déterminée $M = M(\zeta)$, ou, inversement, $\zeta = \zeta(M)$.

La loi de Hooke nous donne pour le noyau élastique:

$$\sigma_x = -Ey \frac{d^2v}{dx^2}.$$

A la limite du noyau élastique $y = \zeta$, $\sigma_x = \sigma_s$, et la courbure de l'axe de la poutre sera donc définie par l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{\zeta(M)}. \tag{24.3}$$

La solution obtenue satisfait à toutes les équations de l'équilibre élasto-plastique. Si le moment est négatif, on changera le signe devant σ_s.

Lorsque l'on supprime le moment de flexion, des contraintes et déformations résiduelles, définies selon le schéma exposé au paragraphe 22, apparaissent dans la poutre. Supposons qu'au moment fléchissant donné M correspond la distribution élasto-plastique des contraintes $\bar{\sigma}_x$ (ligne pleine sur la fig. 38, *a*). Sur ce diagramme, le pointillé montre la répartition des contraintes $-\sigma_x^*$ dans la *poutre élastique* pour le même moment fléchissant. En soustrayant ces épures, on trouve le diagramme des contraintes résiduelles σ_x^0 (fig. 38, *b*). La courbure résiduelle de la poutre s'obtiendra par soustraction de la courbure de la poutre élastique de celle de la poutre élasto-plastique.

La zone des déformations plastiques augmente avec l'accroissement du moment de flexion (c.-à-d. que ζ diminue); à la limite $\zeta = 0$ et le moment fléchissant est égal à

$$M_* = \sigma_s S_p. \tag{24.4}$$

Cette valeur du moment de flexion est appelée *limite*; elle correspond à l'état tout à fait plastique de la poutre, quand l'épure des contraintes dans les sections de la poutre prend l'aspect qui est montré sur la figure 39.

Le plan neutre est alors le plan de discontinuité des contraintes et la courbure pour l'état limite tend vers l'infini. Il y a lieu de souligner cependant que le moment de flexion, pour des déformations

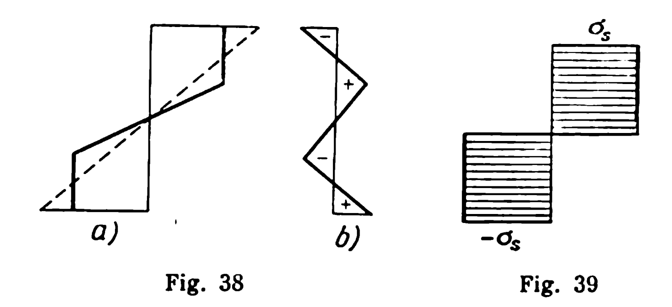


Fig. 38 Fig. 39

plastiques relativement petites, est déjà proche du moment limite et, par conséquent, la notion du moment limite conserve sa valeur pratique.

Considérons l'exemple d'une section rectangulaire; ici

$$M_* = bh^2\sigma_s, \quad \frac{M}{M_*} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta}{h}\right)^2. \tag{24.5}$$

Il en découle que pour $\frac{\zeta}{h} = \frac{1}{3}$ le moment de flexion se distingue déjà du moment limite de moins de 4 %.

2. Flexion transversale. Sous l'effet des charges transversales, la flexion est plus complexe et s'accompagne notamment des contraintes tangentielles τ_{xy} que l'on peut négliger néanmoins pour les applications usuelles (c.-à-d. pour des poutres suffisamment longues), comme cela a lieu dans la résistance des matériaux. Cela s'explique par le fait que les hypothèses de la théorie des barres minces présentent un caractère essentiellement géométrique.

Le moment de flexion varie suivant la longueur de la poutre et ζ est également variable. La disposition des zones plastiques le long d'une poutre à section donnée peut être facilement calculée si on introduit dans la relation $\zeta = \zeta(M)$ le moment de flexion en fonction de x. Il convient de distinguer les tronçons de poutre dont la déformation est élastique de ceux qui éprouvent une déformation élasto-plastique (fig. 37). Si les premiers sont satisfaits par l'équation différentielle de la flèche des poutres élastiques, il faudra appliquer l'équation différentielle (24.3) pour les tronçons élasto-plastiques de la poutre. Cela étant, pour les problèmes statiquement déterminés, le second membre de l'équation sera une fonction connue de x, tandis que dans les problèmes statiquement indéterminés, il faudra encore introduire des inconnues. Dans les deux cas, l'équation différentielle (24.3) est facilement intégrable. La flèche et la

pente de la tangente à la ligne élastique seront continues aux points de raccordement des tronçons élastiques et élasto-plastiques.

On trouve le moment limite d'après la formule précédente (24.2); contrairement à la flexion pure, une « articulation plastique » caractéristique apparaît ici dans la section subissant l'effet du moment fléchissant maximal.

A titre d'exemple, nous envisagerons la flexion d'une poutre de section rectangulaire sous l'action d'une force concentrée $2P$ (fig. 40). On a ici

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\zeta}{h}=\sqrt{1-\frac{M}{M_*}},\quad M=Pl\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Ainsi, la frontière de séparation est une parabole dont le sommet, à l'état limite, passe par l'origine des coordonnées. La valeur de la charge limite est trouvée en partant des conditions de formation de l'articulation plastique ($\zeta=0$):

$$P_*l = M_*.$$

A ce moment la capacité de charge de la poutre est épuisée et cette dernière se transforme en « mécanisme » à articulation plastique (fig. 40, *b*). La longueur du tronçon élasto-plastique $2l_1$ atteint alors sa valeur maximale, soit $2\cdot 0{,}3l$.

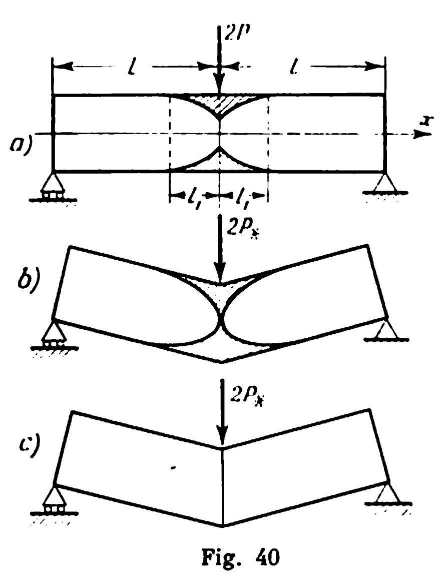


Fig. 40

Il est naturel d'admettre que la charge limite sera une charge de rupture pour la poutre. Lorsque l'on procède au choix des dimensions de cette poutre qui assureraient sa résistance, il faut partir d'un certain coefficient de sécurité à la charge limite.

La méthode de calcul d'après les charges limites présente un avantage appréciable par rapport à la méthode de calcul suivant les contraintes limites (maximales). Ces dernières ayant un caractère local ne caractérisent pas la résistance de l'ensemble de la construction si celle-ci est exécutée avec un *métal plastique et travaille sous une charge régulière.* Dans ces conditions, les surtensions locales ne sont pas dangereuses et leur calcul d'après le schéma élastique donne une évaluation erronée du coefficient de sécurité de la construction.

Les données d'expériences confirment bien la disposition des zones plastiques et les valeurs des flèches et des moments limites. Les résultats cités

plus haut sont faciles à généraliser pour les sections à symétrie uniaxiale. Il n'est pas difficile non plus de calculer approximativement les contraintes tangentielles à la flexion.

Le calcul des poutres et des cadres d'après les charges limites est devenu d'un usage très courant; il a été exposé dans plusieurs monographies. Nous citerons ici, en particulier, les livres de A. Gvozdev [5], B. Neal [54], P. Hodge [48], où l'on peut trouver également des références bibliographiques très vastes. Cf. aussi l'ouvrage de G. Chapiro [136].

Il est intéressant d'étudier le comportement d'une poutre en utilisant le modèle du corps rigide-plastique (paragraphe 23). Selon ce schéma, la poutre reste rigide (indéformable) tant que le moment de flexion n'atteindra pas la valeur limite M_*. Une déformation plastique apparaît alors *dans la section sous l'effet de la force* et la poutre « se rompt » (fig. 40, *c*). Certes, la localisation des déformations plastiques dans une section tient à ce que la poutre est considérée comme un continuum unidimensionnel, ceci sans tenir compte des contraintes tangentielles. Une image plus complète de l'équilibre limite des poutres rigides-plastiques sera examinée plus bas (cf. chapitre V).

3. Flexion des poutres en matériau susceptible d'écrouissage. Cette flexion peut être envisagée sur la base des suppositions analogues à celles exposées plus haut; n'ayant pas l'intention de nous arrêter sur ce problème, nous renvoyons le lecteur aux sources bibliographiques [52, 54].

Notons que la flexion des poutres dont l'écrouissage est négligeable peut être calculée d'après les formules citées plus haut si l'on considère la contrainte σ_s en tant que la contrainte moyenne du domaine de l'écrouissage dans l'intervalle des déformations envisagées.

25. SPHÈRE CREUSE SOUMISE À UNE PRESSION

1. Enoncé du problème. Envisageons l'équilibre élasto-plastique d'une sphère creuse sollicitée par la pression intérieure p. Les cisaillements $\gamma_{r\varphi}$, $\gamma_{\varphi\chi}$, $\gamma_{\chi r}$ et les contraintes tangentielles $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi\chi}$, $\tau_{\chi r}$ sont nuls, et $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi$, $\sigma_\varphi = \sigma_\chi$ par suite de la symétrie centrale (r, φ, χ sont les coordonnées sphériques). Chaque élément de la sphère est soumis alors à la charge simple, puisque les directions principales restent invariables et le coefficient $\mu_\sigma = \pm 1$ (le signe supérieur se rapportant au cas de $\sigma_r > \sigma_\varphi$, et le signe inférieur au cas de $\sigma_\varphi > \sigma_r$). Ainsi, on peut résoudre ce problème en se basant directement sur les équations de la théorie des déformations.

Dans le problème envisagé, l'intensité des contraintes tangentielles sera égale à

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \sigma_\varphi - \sigma_r \right|.$$

Les contraintes normales σ_r, σ_φ satisfont à l'équation d'équilibre:

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+2\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0, \tag{25.1}$$

et les composantes de la déformation

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi=\frac{u}{r},$$

où u est le déplacement radial, satisfont à la condition de continuité:

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr}+\frac{\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r}{r}=0. \tag{25.2}$$

Les conditions aux limites ont la forme:

$$\sigma_r = -p \text{ pour } r = a, \tag{25.3}$$

$$\sigma_r = 0 \quad \text{pour } r = b. \tag{25.4}$$

2. Etat élastique initial. La sphère est dans un état élastique si la pression est faible.

Appliquant la loi de Hooke et les équations indiquées ci-dessus, il est facile de trouver la solution:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\tilde{p}\left(1-\frac{b^3}{r^3}\right),\\ \sigma_\varphi&=\tilde{p}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b^3}{r^3}\right),\\ u&=\tilde{p}r\left(k+\frac{1}{4G}\frac{b^3}{r^3}\right),\end{aligned}\right\} \tag{25.5}$$

où

$$\tilde{p}=p\frac{a^3}{b^3-a^3}.$$

La distribution des contraintes est montrée en pointillé sur la figure 41. L'intensité des contraintes tangentielles

$$T=\tilde{p}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{b^3}{r^3}$$

est maximale pour $r = a$.

La sphère se trouve dans un état élastique pour les pressions

$$\tilde{p}<\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3\sigma_s\equiv\tilde{p}_0.$$

Quand $\tilde{p} = \tilde{p}_0$, le matériau de la sphère passe à l'état plastique sur la surface intérieure $r = a$. L'accroissement ultérieur de la pression entraîne l'extension du domaine des déformations plastiques.

3. Etat élasto-plastique. La condition d'écoulement (on néglige l'écrouissage) est de la forme

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \pm\sigma_s. \tag{25.6}$$

On connaît le signe de la différence $\sigma_\varphi - \sigma_r$ marquant l'apparition des déformations plastiques de la solution du problème élastique (25.5). Bien que la zone de la plasticité s'étend avec l'accroissement de la pression, le signe de $\sigma_\varphi - \sigma_r$ y restera le même en vertu de la continuité de T. Notons que ce procédé, utilisé pour choisir le signe, se base sur la connaissance de l'« histoire » de l'apparition de la zone plastique et peut être évidemment appliqué aussi aux autres problèmes; ainsi

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = +\sigma_s. \tag{25.7}$$

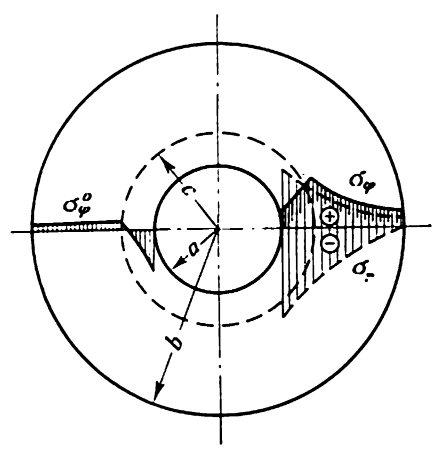


Fig. 41

A l'aide de cette condition, ramenons l'équation d'équilibre à la forme

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 2\frac{\sigma_s}{r} = 0$$

d'où l'on tire immédiatement:

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln r + C_1,$$

où C_1 est une constante arbitraire. En la trouvant de la condition aux limites (25.3), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2\sigma_s \ln\frac{r}{a} - p, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r + \sigma_s. \end{aligned}\right\} \tag{25.8}$$

Nous avons affaire ici avec l'exemple du « problème statiquement déterminé » pour lequel suffisent les équations d'équilibre et la condition d'écoulement pour déterminer les contraintes dans la zone d'écoulement (sans tenir compte des déformations). Les problèmes statiquement déterminés constituent une classe importante de problèmes, caractéristique de l'état d'écoulement.

Nous utiliserons les relations de Hencky pour déterminer les déformations et les déplacements dans la zone d'écoulement:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \psi(\sigma_r - \sigma) + k\sigma, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} = \psi(\sigma_\varphi - \sigma) + k\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{25.9}$$

Les composantes de la déformation devant satisfaire à la condition de continuité (25.2), en y substituant ε_r, ε_φ de (25.9) et σ_r, σ_φ de

(25.8), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d\psi}{dr}+\frac{3}{r}\psi+\frac{6k}{r}=0,$$

dont la solution est de la forme

$$\psi=-2k+\frac{C_2}{r^3}, \tag{25.10}$$

où C_2 est une constante arbitraire.

Pour résoudre le problème élasto-plastique mixte, il faut écrire la solution du problème élastique pour le domaine ($c \leqslant r \leqslant b$), où la frontière c est à déterminer. Nous obtiendrons cette solution à partir des formules (25.5) si nous y substituons à $-p$ et a les valeurs q et c, où q est la valeur de la contrainte σ_r à la frontière entre les domaines de l'élasticité et de l'écoulement.

Pour définir les constantes inconnues c, q et C_2, nous avons la condition de continuité de l'état

$$\psi=\frac{1}{2G} \quad \text{pour } r=c,$$

la condition de continuité pour la contrainte radiale

$$\sigma_r\,|_{r=c-0}=\sigma_r\,|_{r=c+0}$$

et la condition de continuité pour le déplacement

$$u\,|_{r=c-0}=u\,|_{r=c+0}.$$

Conformément à la première de ces conditions, on trouve:

$$\psi=-2k+\left(\frac{1}{2G}+2k\right)\left(\frac{c}{r}\right)^3.$$

Les autres conditions mènent aux équations

$$\left.\begin{aligned} q&=2\sigma_s \ln\frac{c}{a}-p,\\ \ln\frac{c}{a}-\frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3&=\frac{p}{2\sigma_s}-\frac{1}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{25.11}$$

La répartition de la contrainte σ_φ pour l'état élasto-plastique est montrée sur la figure 41.

4. Influence de la compressibilité. La solution obtenue permet d'évaluer l'influence de la compressibilité du matériau. Notons, avant tout, que les contraintes dans les zones élastique et plastique, tout comme le rayon d'extension de cette dernière, ne dépendent pas du coefficient de compression volumique k. Ensuite, on trouve à partir de (25.5) pour la zone élastique le rapport du déplacement u au déplacement u' pour la sphère incompressible ($k = 0$):

$$\frac{u}{u'}=1+4kG\left(\frac{r}{b}\right)^3.$$

Le maximum de ce rapport pour $\nu = 0{,}3$, obtenu pour $r = b$, est égal à 1,615; ainsi, dans le problème élasto-plastique donné, les déplacements dépendent sensiblement de la valeur du coefficient de Poisson.

On peut vraisemblablement considérer que, dans les autres problèmes aussi, en négligeant les variations du volume on aboutit à des erreurs insignifiantes dans la définition des composantes *principales* de l'état de contrainte si la surface du corps est sollicitée par des charges données.

5. Contraintes et déformations résiduelles. Soit p la pression supprimée ; des déformations et des contraintes résiduelles se manifesteront alors dans la sphère. Pour les définir, il faudra trouver les contraintes σ_r^*, σ_φ^* de la sphère élastique soumise à une *traction p*. Ces contraintes peuvent être déterminées par les formules (25.5) si l'on y change le signe devant p.

Conformément à (22.1), les contraintes résiduelles sont de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 2\sigma_s \ln\frac{r}{a} - p - \tilde{p}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_\varphi^0 &= 2\sigma_r \ln\frac{r}{a} - p + \sigma_s - \tilde{p}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^3}{r^3}\right) \end{aligned}\right\} \text{ pour } a \leqslant r \leqslant c, \quad (25.12)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^0 &= -(\tilde{p} + \tilde{q})\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_\varphi^0 &= -(\tilde{p} + \tilde{q})\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^3}{r^3}\right) \end{aligned}\right\} \text{ pour } r \geqslant c,$$

où l'on pose

$$\tilde{q} \equiv q\frac{c^3}{b^3 - c^3}.$$

Ces formules sont vérifiées tant que l'intensité des contraintes tangentielles résiduelles n'exédera pas la limite d'écoulement (conformément à la condition $T^0 < \tau_s$). La grandeur max $|\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0|$ étant atteinte pour $r = a$, on s'apercevra facilement que les formules obtenues sont vraies pour

$$\tilde{p} < 2\tilde{p}_0. \quad (25.13)$$

La distribution des contraintes résiduelles σ_φ^0 est indiquée dans la partie gauche de la figure 41 ; les contraintes résiduelles qui se trouvent au voisinage de la cavité sont celles de compression.

Si l'on exerce à présent une nouvelle pression ne dépassant pas la pression initiale, elle ne se traduira pas par de nouvelles déformations plastiques dans la sphère. En effet, conformément aux équations de la théorie de l'élasticité, la nouvelle mise en charge est marquée tout d'abord par l'apparition de contraintes et déformations complémentaires, et ceci indépendamment de la présence des contraintes intrinsèques. Cependant, la limite élastique sera définie

aussi par la valeur de ces contraintes intrinsèques (contraintes résiduelles en l'occurrence) qui devront être jointes aux contraintes dues à une nouvelle charge. La sphère sera en quelque sorte écrouie par comparaison à sa première charge.

Ce phénomène est appelé *écrouissage des constructions* ou *autofrettage*. Il est d'un usage très courant dans la technique pour augmenter l'endurance des constructions par déformation plastique préalable. On évoque aussi souvent le *pouvoir d'adaptation*. La construction s'adapte aux charges alternatives grâce à l'intervention d'un champ de contraintes résiduelles favorable. Dans le problème

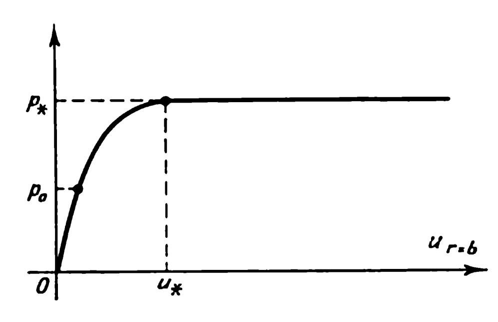


Fig. 42

en question, la condition (25.13) définit le *domaine de l'adaptation*. Les théorèmes généraux de l'adaptation sont exposés au chapitre IX.

6. Charge limite. Si on augmente la pression p, la zone plastique s'étendra ($c \to b$) jusqu'à ce qu'elle n'atteigne la surface extérieure de la sphère ($c = b$). La solution (25.8) sera alors vérifiée jusqu'à $r = b$; en vertu de la condition aux limites (25.4) on a:

$$2\sigma_s \ln \frac{b}{a} - p = 0.$$

Cette équation définit la *pression limite* à laquelle la sphère sera entièrement dans l'état d'écoulement:

$$p_* = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a}.$$

Soulignons qu'il est très facile de trouver la pression limite; à cet effet, il n'est nul besoin d'envisager les solutions élastiques et dans notre cas on n'a pas même besoin d'envisager les déformations.

Si l'on considère les déplacements de la surface extérieure de la sphère, nous verrons, au début, lorsque cette dernière se trouve dans un état élastique, que le déplacement est proportionnel à la pression et que la zone transitoire, qui vient ensuite, correspond à l'état élastoplastique (fig. 42). Le déplacement est égal à u_* (fig. 42) lorsque

la valeur limite de p_* est atteinte. Par la suite, le déplacement devient indéterminé puisqu'il renferme la fonction ψ avec la constante d'intégration C_2. Nous n'avons aucune condition qui puisse nous permettre de trouver cette constante pour l'état purement plastique (il faut définir complémentairement le déplacement, par exemple, pour $r = a$).

Ainsi, la sphère n'est plus en mesure de résister aux forces extérieures croissantes lorsque la charge limite p_* est atteinte; elle « s'écoule » et sa capacité de charge est épuisée. Quand on envisage la résistance d'une sphère sollicitée par la pression statique, il est naturel de s'orienter vers la charge limite p_* en introduisant un certain coefficient de sécurité. Notons que le schéma du corps rigide-plastique nous conduit à la même valeur de la charge limite.

7. Solution du problème par rapport aux déplacements. La solution du problème envisagé est facile à obtenir aussi par rapport aux déplacements. Conformément à (14.20), on a:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{3k}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) \mp \frac{2}{3}\sigma_s,\\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{3k}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) \pm \frac{1}{3}\sigma_s.\end{aligned}\right\}$$

Introduisant dans ces relations les valeurs des composantes de la déformation et substituant ensuite σ_r, σ_φ dans l'équation d'équilibre (25.1), on obtient l'équation différentielle

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + 2r\frac{du}{dr} - 2u \mp 6k\sigma_s r = 0$$

et sa solution

$$u = C_1' r + C_2' \frac{1}{r^2} \pm 2k\sigma_s r \ln r,$$

où C_1', C_2' sont des constantes arbitraires. Le calcul ultérieur se réduit à déterminer les constantes arbitraires à partir des conditions de continuité pour $r = c$ et de la condition aux limites pour $r = a$ et mène aux résultats précédents.

8. Déformation plastique autour d'une cavité sphérique dans un corps illimité. Imposons l'extension uniforme $+p$ aux solutions précédentes dans les domaines élastique et plastique. La condition de plasticité n'étant pas changée, on aura donc dans la zone d'écoulement

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln\frac{r}{a},$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_s.$$

Des contraintes de traction p sont appliquées à la surface extérieure de la sphère alors que sa surface intérieure est exempte de toute contrainte. Conformément à la solution écrite ci-dessus et

faisant tendre $b \to \infty$, on trouve pour la partie élastique de l'espace

$$\sigma_r = p + (q - p)\frac{c^3}{r^3},$$

$$\sigma_\varphi = p - \frac{1}{2}(q - p)\frac{c^3}{r^3}.$$

Les relations (25.11) prennent la forme

$$q = p - \frac{2}{3}\sigma_s, \quad c = a \exp\left(\frac{p}{2\sigma_s} - \frac{1}{3}\right).$$

Puisque $c \geqslant a$, la condition d'apparition de la zone d'écoulement sera :

$$p \geqslant \frac{2}{3}\sigma_s.$$

La distribution des contraintes est représentée en lignes continues sur la figure 43. Les contraintes dans le corps élastique parfait y figurent en pointillé. Ainsi, le coefficient de concentration des contraintes décroît par suite de la déformation plastique. L'épure de la contrainte résiduelle σ_φ^0 est montrée dans la partie inférieure de la figure 43.

Notons que, pour la sphère, le problème se résout en quadratures s'il y a écrouissage, variation de température et en présence des forces de volume [13]. Le cas des grandes déformations de la sphère creuse est également examiné (cf., par exemple, le livre de Hill [47]).

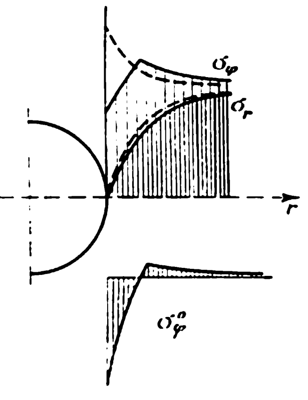


Fig. 43

26. TUBE CYLINDRIQUE SOUMIS À UNE PRESSION

1. Position du problème. Le tube (récipient) cylindrique, sollicité par une pression intérieure, est un élément important de beaucoup d'ouvrages et de machines. Il est donc naturel que de nombreuses recherches théoriques et expérimentales sont consacrées au problème du calcul de la déformation plastique des tubes. L'analyse rigoureuse des déformations plastiques des tubes présente des difficultés considérables ; elle est réalisée par des procédés numériques ou par la méthode des approximations successives (méthode pas à pas). Cependant, on peut obtenir une solution approchée simple en recourant à certaines simplifications qui sont confirmées par les résultats de l'intégration numérique.

Plus bas, nous envisageons en détail les *tubes longs pourvus de fonds*. Alors, suivant l'axe du tube, agit un effort égal à $p\pi a^2$, où a

est le rayon intérieur du tube. D'autres cas seront examinés brièvement à la fin de ce paragraphe.

2. Etat élastique initial. La distribution des contraintes dans le tube élastique est décrite par la solution connue de Lamé:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\tilde{p}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right), \\ \sigma_\varphi &= \tilde{p}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right), \\ \sigma_z &= \tilde{p} = \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (26.1)$$

où

$$\tilde{p} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}.$$

Les courbes des contraintes sont montrées en pointillé sur la figure 44.

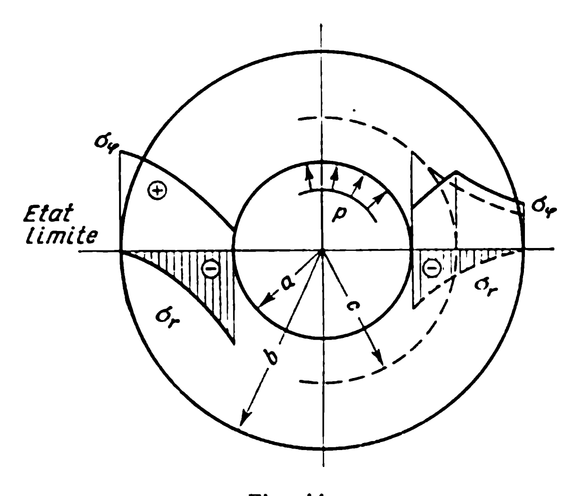


Fig. 44

En calculant à l'aide des formules (26.1) l'intensité des contraintes tangentielles, on trouve facilement, d'après la condition d'écoulement, que l'état plastique sera obtenu sur la surface intérieure du tube à la pression

$$p_0 = \tau_s\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right).$$

3. Cas d'un tube à parois minces. L'état purement plastique du tube à parois minces est caractérisé par les contraintes:

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_\varphi \approx \frac{pa}{b-a}, \quad \sigma_z \approx \frac{pa}{2(b-a)} \approx \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\varphi),$$

et d'ailleurs

$$p=2\tau_s\left(\frac{b}{a}-1\right).$$

4. Etat élasto-plastique d'un tube à parois épaisses. Comme nous l'avons déjà indiqué, la solution exacte de ce problème est liée à des difficultés appréciables. Sa solution approchée se base sur les considérations suivantes qui sont confirmées par les solutions trouvées par intégration numérique.

Dans l'état élastique, σ_z est la moitié de la somme $\sigma_r + \sigma_\varphi$, ce qui est également vrai pour l'état purement plastique d'un tube à parois minces. On peut admettre que, pour les autres cas aussi, $2\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\varphi$. Le paramètre μ_σ est alors constant ($\mu_\sigma = 0$) et, par conséquent, la mise en charge est simple, ce qui permet de se baser directement sur les équations de la théorie des déformations plastiques. Notons que la pression moyenne sera $\sigma = \sigma_z$.

La déformation plastique se développe dans l'anneau $a \leqslant r \leqslant c$.

Les formules (26.1) sont vérifiées dans la zone élastique $c \leqslant \leqslant r \leqslant b$ si, au lieu de $\tilde{p}$, on introduit

$$\tilde{q}=\frac{-qc^2}{b^2-c^2},$$

où q est la contrainte radiale sur la ligne de séparation $r = c$.

Dans la zone plastique, on a l'équation différentielle d'équilibre

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0.$$

Dans notre cas, la condition d'écoulement de von Mises prend la forme

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2\tau_s. \tag{26.2}$$

Mais alors l'équation différentielle est immédiatement intégrable; utilisant la condition aux limites $\sigma_r = -p$ pour $r = a$, on obtient.

$$\sigma_r=-p+2\tau_s \ln\frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi=\sigma_r+2\tau_s. \tag{26.3}$$

La distribution des contraintes est montrée en lignes continues sur la figure 44 (à gauche, dans l'état limite; à droite, σ_φ dans l'état élasto-plastique).

Les contraintes σ_r, σ_φ doivent être continues sur la ligne de séparation $r = c$; ces conditions seront remplies si c satisfait à l'équation

$$\ln\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)=\frac{p}{2\tau_s}. \tag{26.4}$$

D'où l'on trouve le rayon c de la zone plastique; par la suite, on calcule q conformément à (26.3) et l'on parvient à déterminer les

contraintes du domaine élastique. De la loi de Hooke

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

on obtient les déplacements dans le domaine élastique.

Selon les relations de Hencky, les composantes de la déformation dans la zone plastique sont égales à

$$\varepsilon_r = k\sigma - \tau_s\psi, \quad \varepsilon_\varphi = k\sigma + \tau_s\psi.$$

Introduisant ces valeurs dans la condition de continuité

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} + \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} = 0$$

et calculant la pression moyenne à l'aide des formules (26.3), on obtient pour la fonction ψ l'équation différentielle

$$\frac{d\psi}{dr} + \frac{2}{r}\psi + \frac{2k}{r} = 0.$$

Il en découle que

$$\psi = -k + \frac{C}{r^2},$$

où C est une constante arbitraire.

Il faut en outre satisfaire à la condition du passage continu de l'état plastique à l'état élastique $\psi = \frac{1}{2G}$ pour $r = c$ et à la condition de continuité du déplacement u pour $r = c$. La pression moyenne σ étant continue, il découle alors de la seconde condition pour $r = c$ que

$$\tau_s\psi = \frac{1}{4G}(\sigma_\varphi - \sigma_r).$$

Mais la condition d'écoulement étant vérifiée sur la ligne de séparation, il en résulte que pour $r = c$, on a $\psi = \frac{1}{2G}$, soit la première condition. Les deux conditions seront donc vérifiées si

$$C = c^2\left(\frac{1}{2G} + k\right).$$

L'allongement axial relatif, égal à $\varepsilon_z = k\sigma$, devra être constant aussi pour les tubes longs. Dans la solution approchée obtenue, cette condition n'est pas vérifiée dans la zone plastique. La solution sera exacte pour les matériaux incompressibles ($k = 0$), car $\varepsilon_z = 0$.

5. Etat limite. L'état limite sera atteint lorsque $c = b$. La relation (26.4) nous donne la pression limite

$$p_* = 2\tau_s \ln\frac{b}{a}.$$

Cette formule est couramment employée dans les calculs de résistance des récipients et tubes cylindriques à parois épaisses. La distribution des contraintes σ_r, σ_φ dans l'état limite est représentée dans la partie gauche de la figure 44.

6. Cas divers. Nous nous arrêterons brièvement sur les autres cas de la déformation plastique du tube.

Si le tube est soumis à une déformation plane, il faut partir de la condition $\varepsilon_z = 0$. La solution exposée plus haut (pour le tube pourvu de fonds) sera alors vraie pour le matériau incompressible. L'allongement relatif sera petit compte tenu de la compressibilité; cela permet également de recommander la solution précédente pour σ_r, σ_φ en tant que solution approchée pour le cas de la déformation plane.

Si les extrémités du tube sont libres, la poussée axiale est égale à zéro. Dans ce cas, la solution approchée, fondée sur la supposition que $\sigma_z = 0$, donne de bons résultats.

Notons que, dans tous les cas, les calculs précis basés sur la théorie de l'écoulement plastique et la théorie des déformations donnent des résultats voisins.

7. Considérations finales. Comme nous l'avons déjà mentionné, le problème envisagé a été étudié par de nombreux chercheurs. La prise en considération de l'écrouissage n'implique pas de difficultés supplémentaires plus ou moins importantes.

Les méthodes numériques de calcul des tubes selon la théorie de l'écoulement plastique furent examinées par R. Hill, E. Lee, S. Tupper [47] et Thomas [183]. Dans la théorie des déformations, ces méthodes numériques ont été introduites par V. Sokolovski [33], G. Allen et D. Sopwith [139], etc. Les grandes déformations des tubes sont étudiées dans l'ouvrage [47]. L'influence des contraintes thermiques, elle aussi, a été étudiée.

Le livre de A. Iliouchine et P. Oguibalov [12] est consacré aux différents problèmes de la déformation élasto-plastique des cylindres creux.

Exercices du chapitre III

1. Examiner la flexion d'une console de section transversale rectangulaire, causée par une force appliquée à son extrémité. Trouver les domaines de la déformation plastique, la valeur limite de la force, les flèches de la console dans l'état élasto-plastique.

2. Trouver la charge limite pour une poutre de section transversale circulaire posée sur les appuis aux extrémités et uniformément chargée.

3. Déduire l'équation différentielle de la flèche de la poutre

$$D\frac{d^2v}{dx^2} = \pm |M|^{1/\mu}$$

(D est la « rigidité ») à condition que la contrainte σ_x soit liée à la déformation ε_x par la relation

$$\sigma_x = B|\varepsilon_x|^{\mu-1}\varepsilon_x \quad (0 < \mu \leqslant 1),$$

où B, μ sont des constantes.

4. Soit une sphère pleine chauffée d'une façon non uniforme (la température θ est la fonction du rayon) soumise à une déformation élasto-plastique. Trouver la distribution des contraintes si dans la zone plastique est vérifiée la condition d'écoulement de von Mises, et $\theta = \theta_0 \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^\beta\right]$, où $\beta > 0$, $\theta_0 > 0$ sont des constantes.

5. Trouver la distribution des contraintes dans un tube long ($\varepsilon_z = 0$) en rotation pour une déformation élasto-plastique (adopter la condition d'incompressibilité; la condition d'écoulement de von Mises est vérifiée dans la zone plastique). Déterminer la vitesse de rotation angulaire à laquelle est obtenu l'état limite.

6. Montrer (de façon analogue au cas du paragraphe 15) que le problème sur la déformation d'un tube à paroi mince sous l'effet de la pression intérieure et de l'effort axial est ramené suivant la théorie de l'écoulement plastique à l'intégration de l'équation de Riccati.

CHAPITRE IV

TORSION

27. TORSION DES BARRES PRISMATIQUES. ÉQUATIONS FONDAMENTALES

1. Notions de base. Envisageons la *torsion d'un prisme de section transversale arbitraire.* Admettons que l'extrémité inférieure de la barre soit encastrée et que l'axe des z soit parallèle à l'axe de la barre (fig. 45) ; la barre subit la torsion sous l'action du moment M. Suivant les hypothèses de Saint-Venant relatives à la théorie de la torsion élastique, admettons que les sections transversales éprouvent une rotation rigide dans leur plan, mais qu'elles se déforment dans la direction de l'axe des z:

$$u_x = -\omega z y, \quad u_y = \omega z x,$$
$$u_z = w(x, y; \omega),$$

où ω est la torsion par unité de longueur de la barre, et $w(x, y; \omega)$ une fonction inconnue. Les composantes de la déformation seront alors

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=0,\\ &\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}-\omega y, \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\omega x. \end{aligned}\right\} \qquad (27.1)$$

La fonction $w(x, y; \omega)$ caractérise la déformation (*gauchissement*) de la section.

Fig. 45

En se basant sur les équations de la théorie de l'écoulement (13.7) il est aisé de montrer que les contraintes normales et la contrainte tangentielle τ_{xy} sont nulles:

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0. \qquad (27.2)$$

Par conséquent, dans les sections z = const agit le vecteur contrainte tangentielle (fig. 46) $\boldsymbol{\tau}_z = \tau_{xz}\boldsymbol{i} + \tau_{yz}\boldsymbol{j}$.

Les intensités T et Γ sont égales respectivement à

$$T^2=\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2, \quad \Gamma^2=\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2. \qquad (27.3)$$

On voit sans peine que le troisième invariant du déviateur des contraintes est nul; il découle alors de (1.17) que $\omega_\sigma = \text{const} = \frac{\pi}{6}$, c.-à-d. que le déviateur des contraintes conserve toujours sa forme.

D'après les formules (1.16), on obtient

$$\sigma_1 = T, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -T,$$

ce qui correspond à l'état du cisaillement pur. En cherchant les directions principales, on trouve que cos (i, z), $i = 1, 2, 3$, sont constants et que les autres cosinus directeurs sont proportionnels à l'une des relations $\frac{\tau_{xz}}{T}$, $\frac{\tau_{yz}}{T}$. La contrainte tangentielle maximale est égale à

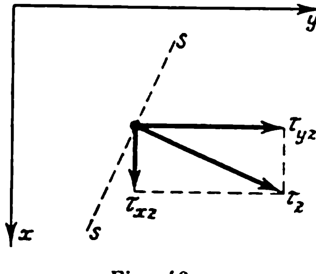


Fig. 46

$$\tau_{max} = |\tau_z| = T. \tag{27.4}$$

Les contraintes tangentielles maximales agissent sur les plans $z = \text{const}$ et sur les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z et la courbe directrice est perpendiculaire en chaque point au vecteur $\boldsymbol{\tau}_z$. On appellera *lignes de glissement* les traces de ces surfaces cylindriques (surfaces de glissement) sur le plan $z = 0$.

2. Equations fondamentales. Les composantes de la contrainte tangentielle doivent satisfaire à l'équation différentielle d'équilibre

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{27.5}$$

Il vient de (27.1) la condition de continuité

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\omega. \tag{27.6}$$

L'équation d'équilibre (27.5) signifie que l'expression

$$\tau_{xz}\, dy - \tau_{yz}\, dx = dF$$

est la différentielle totale de la fonction des contraintes $F(x, y)$, soit

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{27.7}$$

Cela étant, $-dF$ est le flux de la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\tau}_z$ à travers l'élément de l'arc ds. Les lignes du niveau de la quadrique des contraintes [surface $z = F(x, y)$] sont appelées *lignes des contraintes*. Le long des lignes des contraintes $F = \text{const}$ ou $dF = 0$, par conséquent, $\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}$, c.-à-d. que le *vecteur* $\boldsymbol{\tau}_z$ *est dirigé suivant la tangente à la ligne des contraintes.*

La surface latérale de la barre étant libre de toute contrainte, nous aurons par conséquent le long du contour C

$$\tau_{xz}\cos(n, x)+\tau_{yz}\cos(n, y)=0.$$

Puisque $dy = ds\cos(n, x)$, $dx = -ds\cos(n, y)$, il est évident que le vecteur τ_z est orienté suivant la tangente au contour. Conformément à (27.7) on obtient:

$$\frac{\partial F}{\partial s}=0,$$

soit $F=\text{const}$ sur le contour. Autrement dit, *le contour est une des lignes des contraintes*. Pour le contour simplement connexe on peut poser:

$$F = 0.$$

Le moment de torsion M est équilibré par le moment des contraintes:

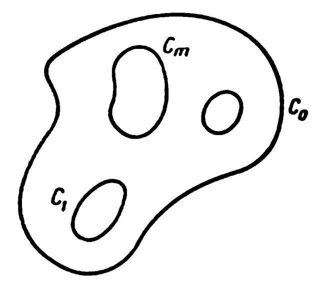


Fig. 47

$$M=\iint(x\tau_{yz}-y\tau_{xz})\,dx\,dy,$$

où l'intégration est étendue à toute la surface de la section transversale. Introduisant ici (27.7) et intégrant par parties, on obtient:

$$M=-\oint_C F[x\cos(n, x)+y\cos(n, y)]\,ds+2\iint F\,dx\,dy.$$

Pour le contour simplement connexe cette formule se simplifie

$$M=2\iint F\,dx\,dy, \tag{27.8}$$

autrement dit le moment de torsion est numériquement égal au double du volume compris sous la quadrique des contraintes $z = F(x, y)$.

Si le contour est multiplement connexe (fig. 47), la fonction des contraintes admet des valeurs constantes différentes F_0, F_1, . . ., . . ., F_m aux contours extérieur C_0 et intérieurs C_1, . . ., C_m. Une des constantes peut être donnée arbitrairement puisque la constante additive dans la fonction des contraintes n'aura pas d'effet sur la solution du problème de torsion ; soit $F_0 = 0$. On obtient alors :

$$M=2\sum_{i=1}^{m}F_i\Omega_i+2\iint F\,dx\,dy, \tag{27.9}$$

où Ω_i est une surface limitée par le contour C_i.

3. Torsion élastique. Pour la torsion élastique, nous avons selon la loi de Hooke

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\frac{\partial F_e}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = -\frac{1}{G}\frac{\partial F_e}{\partial x},$$

où la fonction « élastique » des contraintes est marquée par l'indice e.

Portant ces expessions dans l'équation de continuité, on obtient l'équation différentielle de la torsion

$$\frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_e}{\partial y^2} = -2G\omega. \qquad (27.10)$$

Les conditions aux limites pour F_e ne contenant pas ω. conformément à (27.10), la fonction des contraintes F_e aura alors ω pour facteur, les relations $\frac{\tau_{xz}}{T}$, $\frac{\tau_{yz}}{T}$ sont indépendentes de ω et, par conséquent, les directions principales de la torsion élastique seront fixées en chaque point. Par la suite, il découle de (27.1) et de la loi de Hooke qu'en torsion élastique le gauchissement est proportionnel à l'angle de torsion ω.

Soit une plaque où l'on découpe une ouverture ayant la configuration de la section transversale de la barre. Si l'on ferme cette ouverture avec une membrane de tension N et si l'on exerce sur celleci une pression uniforme q, la petite flèche $v(x, y)$ de la membrane satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{q}{N}$$

et à la condition au contour $v = 0$. Par conséquent, la fonction des contraintes F_e satisfait aux mêmes équations que la flèche v. Cette analogie, notée par Prandtl, permet de trouver la solution expérimentale du problème de la torsion à l'aide du film de savon ou de tout autre voile mince dans les cas où la solution de l'équation de Poisson (27.10) présente des difficultés pour le contour donné.

28. TORSION PLASTIQUE

1. Etat de contrainte. Considérons la torsion d'une barre en supposant que *toute la section se trouve dans l'état d'écoulement*. Comme $\tau_{max} = T$, les conditions d'écoulement de von Mises et de Tresca — Saint-Venant ont la même forme

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \qquad (28.1)$$

où $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ d'après la condition de von Mises et $k = \sigma_s/2$ d'après la condition de Tresca — Saint-Venant.

Portant les formules (27.7) dans la condition d'écoulement, on obtient l'équation différentielle de la fonction « plastique » des

contraintes

$$\left(\frac{\partial F_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_p}{\partial y}\right)^2 = k^2, \tag{28.2}$$

avec, sur le contour,

$$F_p = \text{const.}$$

On constate aisément que la quadrique des contraintes plastiques :

$$z = F_p(x, y)$$

est une *surface à pente constante* (surface de talus naturel, « toit ») construite sur le contour de la section transversale ([1]). Il est facile de construire une telle surface pour le contour simplement connexe en versant du sable sur une feuille de carton horizontale découpée suivant la forme de la section transversale. Cette surface ne dépend pas évidemment de l'angle de torsion. Dans le cas du contour multiplement connexe, F_p aura des valeurs constantes différentes sur les contours, ce qui complique un peu la construction. De nombreux exemples de surfaces des contraintes plastiques sont cités dans le livre de A. Nadaï [[52]].

Les lignes des contraintes $F_p = \text{const}$ sont des courbes équidistantes parallèles au contour de la section transversale. Les lignes de glissement sont confondues avec les normales au contour.

Notons que l'équation du premier ordre (28.2) a une famille de caractéristiques. Ce sont les droites qui coïncident avec les lignes de glissement. Les lignes des contraintes et de glissement (en pointillé) sont indiquées sur la figure 48 pour le contour rectangulaire. La surface des contraintes présente des arêtes (fig. 49) dont les projections sur le plan x, y sont appelées *lignes de discontinuité*. Elles sont montrées en lignes grasses sur la figure 48.

Ainsi, dans le domaine plastique, le vecteur contrainte tangentielle est constant en grandeur et perpendiculaire à la normale au contour du domaine (fig. 50). Par conséquent, *les contraintes sont définies de la façon la plus simple par la forme du contour du domaine.* La torsion de la barre de section rectangulaire (fig. 48), par exemple, sera exprimée par $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = k$, dans le domaine triangulaire à droite, et par $\tau_{xz} = -k$, $\tau_{yz} = 0$ dans le domaine trapézoïdal supérieur.

([1]) En vertu de (28.1), les cosinus directeurs de la normale à la surface $z = \frac{1}{k} F_p(x, y)$ sont égaux à

$$\cos(n, x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,k}\frac{\partial F_p}{\partial x}, \quad \cos(n, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}\,k}\frac{\partial F_p}{\partial y}, \quad \cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si, en un point quelconque du contour, il y a un angle d'entrée, les lignes des contraintes le contournent suivant l'arc de cercle (fig. 51).

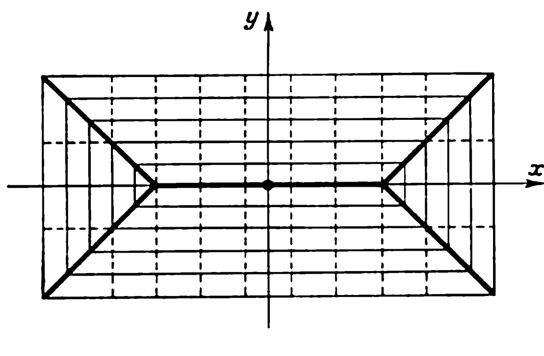


Fig. 48

La figure 52 montre le « toit » pour une section transversale en forme de cornière. Une partie de la surface du cône circulaire provient de l'angle d'entrée, et l'arête résulte de l'angle saillant.

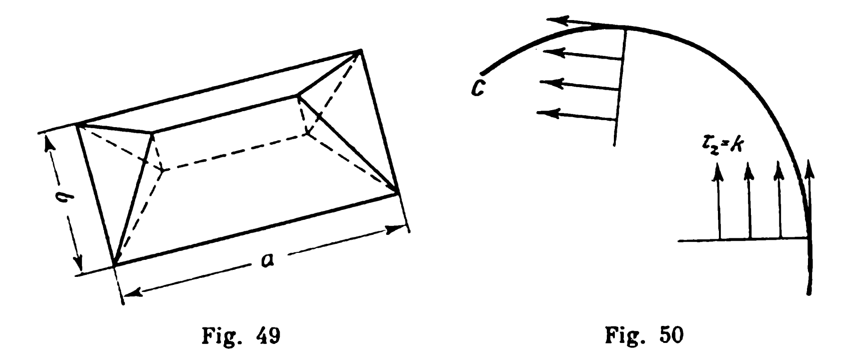


Fig. 49 Fig. 50

Les composantes τ_{xz}, τ_{yz} sont soumises à la dislocation le long des lignes de discontinuité, à savoir la *direction* de la contrainte tangentielle τ_z varie brusquement. La signification mécanique des lignes de discontinuité sera élucidée un peu plus bas.

2. Moment limite. L'état purement plastique envisagé de la barre est appelé *état limite*. Il lui correspond le *moment de torsion limite* (pour le contour simplement connexe)

$$M_* = 2 \int\int F_p \, dx \, dy, \tag{28.3}$$

qui est égal au double du volume sous le « toit » édifié sur le contour donné.

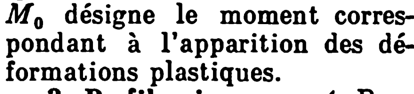
Il est facile de calculer M_*. Ainsi, dans le cas du rectangle (fig. 49) on a

$$M_* = \frac{1}{6} k (3a - b) b^2.$$

Pour le cercle de rayon a (fig. 53)

$$M_* = \frac{2}{3} k\pi a^3, \quad M_0 = \frac{1}{2} k\pi a^3.$$

Le moment limite caractérise la portance de la barre en torsion,



M_0 désigne le moment correspondant à l'apparition des déformations plastiques.

3. Profil mince ouvert. Pour un rectangle très allongé (fig. 54, a)

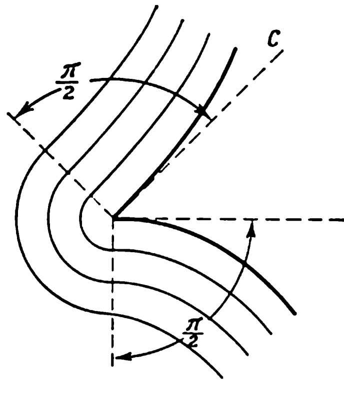


Fig. 51

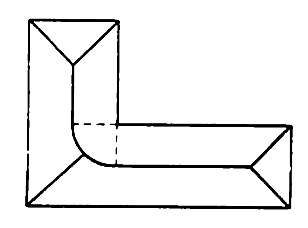


Fig. 52

on a $M_* \approx \frac{1}{2} klh^2$. Si l'épaisseur varie lentement, alors (fig. 54, b)

$$M_* = \frac{1}{2} k \int_0^l h^2(s)\, ds. \tag{28.4}$$

Cette formule est aussi vérifiée pour le profil courbé (fig. 54, c), comme il découle de la forme de la quadrique des contraintes.

Pour le tube circulaire fendu à parois minces (c est le rayon de la ligne médiane) on a

$$M'_* = \pi k h^2 c.$$

Il est intéressant de confronter cette valeur avec le moment limite M_*^0 pour un tube sans fente et de même section:

$$M_*^0 = 2\pi k h c^2 = 2M'_* \frac{c}{h},$$

ce qui signifie que le tube fendu présente une faible portance:

$$M_*^0 \gg M'_*.$$

4. Détermination du déplacement axial (gauchissement). Dans l'état limite, le problème du gauchissement n'est pas d'un grand

intérêt. Nous envisagerons ici les relations permettant de trouver le déplacement axial dans la zone plastique pour la torsion élasto-plastique (paragraphe 29).

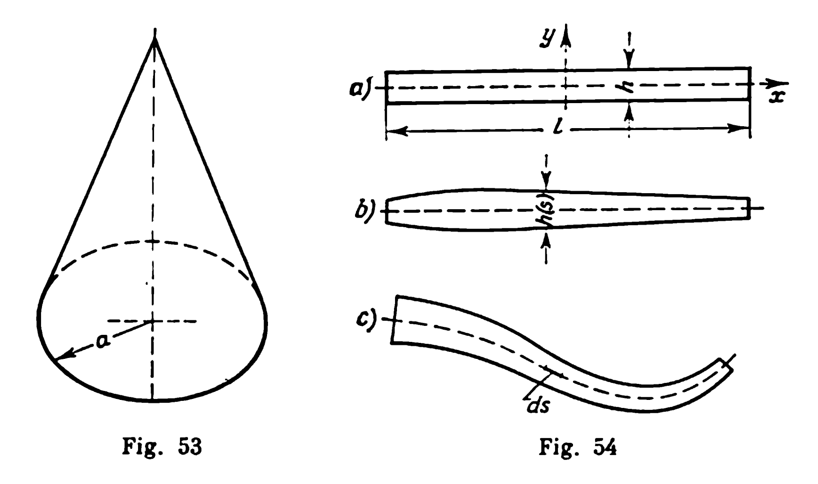


Fig. 53 Fig. 54

Conformément à la loi de Hooke, on a dans la zone élastique:

$$\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}=\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}. \tag{28.5}$$

Dans la zone plastique on partira des équations de la théorie de l'écoulement (13.7)

$$d\gamma_{xz}=\frac{1}{G}\,d\tau_{xz}+d\lambda\cdot\tau_{xz},$$

$$d\gamma_{yz}=\frac{1}{G}\,d\tau_{yz}+d\lambda\cdot\tau_{yz}.$$

Mais puisque dans cette zone les contraintes tangentielles en un point donné sont invariables, leurs accroissements sont nuls et

$$d\gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}\,d\gamma_{yz}.$$

D'où l'on obtient aussi la relation (28.5). Portant maintenant conformément à (27.1) les composantes de la déformation dans (28.5), on obtient l'équation différentielle pour le déplacement axial w

$$\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\omega y\right)-\tau_{xz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\omega x\right)=0, \tag{28.6}$$

où les contraintes tangentielles sont des fonctions connues. L'équation obtenue aux dérivées partielles du premier ordre est facilement intégrable (cf., par exemple, [58]).

29. TORSION ÉLASTO-PLASTIQUE

1. Analogie de Nadaï. La section de la barre présentera des zones élastiques et plastiques lorsque cette dernière sera soumise à une torsion élasto-plastique précédant l'état limite.

Dans les zones élastiques, la fonction des contraintes F_e satisfait à l'équation différentielle de la torsion élastique (27.10). Dans

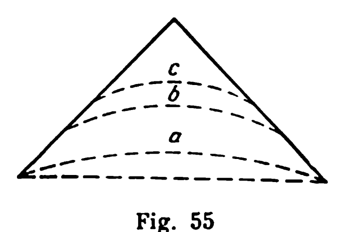


Fig. 55

les zones plastiques, la fonction des contraintes F_p est définie par l'équation différentielle du « toit » (28.2).

Les contraintes sont continues à la frontière entre les zones élastique et plastique, soit

$$\frac{\partial F_e}{\partial x}=\frac{\partial F_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_e}{\partial y}=\frac{\partial F_p}{\partial y}.$$

Par conséquent, sur la ligne de partage

$$F_p = F_e + \text{const.} \tag{29.1}$$

Si, en un point quelconque, $F_p = F_e$, cette condition est alors conservée tout le long de la frontière.

La solution analytique du problème de la torsion élasto-plastique est liée à de grandes difficultés mathématiques. L'*analogie de Nadaï* offre une expression concrète de l'image de la torsion élasto-plastique.

On construit un toit rigide (en verre par exemple) avec un angle de pente constant sur le contour donné. La base du toit est close par une membrane que l'on sollicite avec une pression uniformément répartie. La membrane est distante du toit lorsque la pression est petite, ce qui correspond à la torsion élastique (fig. 55, *a*). Sollicitée par une pression croissante, la membrane à un certain moment commence à adhérer en quelques points au toit, ce qui correspond à l'apparition des déformations plastiques. Au fur et à mesure que la pression augmente, la membrane adhère de plus en plus au toit (fig. 55, *b*, *c*). Les projections des zones d'adhérence correspondent alors aux domaines de la déformation plastique, le reste constituant le noyau élastique. Il est clair que les équations différentielles correspondantes, la condition $F_e = F_p$ et la condition du contour sont

vérifiées. Le moment de torsion sera égal au double du volume de l'espace sous la membrane.

Pour les profils simplement connexes, les zones élastiques (avec un angle de torsion infini) dégénèrent à la limite en lignes de rupture.

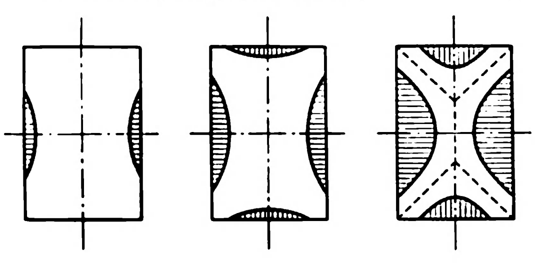


Fig. 56

L'analogie de Nadaï peut être appliquée à la solution expérimentale du problème de la torsion élasto-plastique (cf. [52]).

Le développement des domaines plastiques pour la section rectangulaire est montré sur la figure 56. La hachure indique la direction

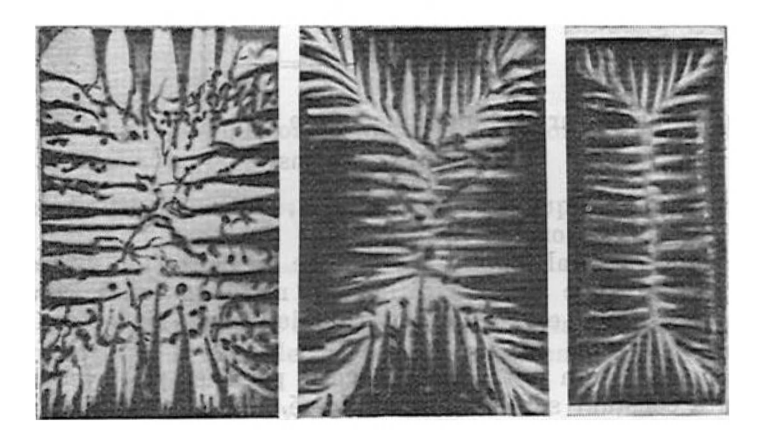


Fig. 57

des lignes de glissement qui sont facilement discernables lorsque l'on coupe transversalement la barre soumise à une torsion plastique et que l'on décape la section obtenue. Les photos des lames minces décapées prélevées sur des barres de section rectangulaire pour des angles de torsion différents sont montrées sur la figure 57. Avec l'accroissement de l'angle de torsion, les raies sombres qui correspondent aux couches de glissement plastiquement déformées occupent une place de plus en plus grande dans la section.

2. Barre de section circulaire. La contrainte tangentielle (fig. 58) est égale à

$$\tau_z = \begin{cases} \frac{r}{c} k & \text{pour } r \leqslant c, \\ k & \text{pour } r \geqslant c. \end{cases}$$

Le moment de torsion est

$$M = 2\pi \int_0^a \tau_z r^2 \, dr = M_* \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^3}{a^3}\right),$$

où le moment limite $M_* = \frac{2}{3} \pi a^3 k$. On trouve l'angle de torsion en considérant les déformations du noyau élastique:

$$\omega = \frac{\tau_z}{Gr} = \frac{k}{Gc}.$$

Les lignes de glissement coïncident avec les directions radiales (fig. 58). L'état limite ($c = 0$) est obtenu pour un angle de torsion

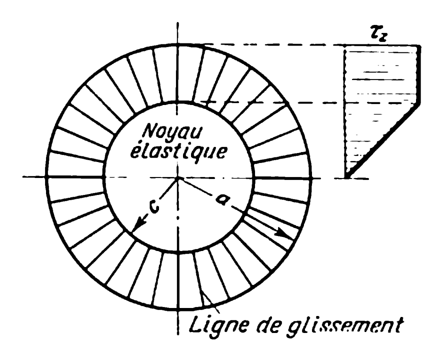


Fig. 58

infini, le noyau élastique dégénérant en un point de discontinuité. Il convient néanmoins de souligner que le moment M s'approche rapidement du moment limite M_* à mesure que se développe la torsion $\left(\text{ainsi, } M = \frac{31}{32} M_* \text{ pour } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}\right)$; la portance de la barre est pratiquement épuisée pour des angles de torsion relativement petits.

3. Solution des problèmes élasto-plastiques par méthode inverse. Il a été souligné plus haut qu'il est facile de déterminer les contraintes dans le domaine plastique si les directions des normales au contour sont connues, puisque dans ce cas on connaît la direction et la valeur de la contrainte tangentielle τ_z en chaque point du domaine. Ceci permet de développer les méthodes inverses pour

la solution des problèmes élasto-plastiques. Nous examinerons ici le procédé simple proposé par V. Sokolovski. Soient un noyau élastique limité par le contour L et la solution de l'équation différentielle de la torsion élastique (27.10) satisfaisant à la condition de plasticité sur le contour L du noyau. Calculons les directions de vecteur contrainte tangentielle le long de L et construisons les normales AB, A_1B_1, . . . (fig. 59) à ces directions. Si la trajectoire orthogonale BB_1B_2 . . . à la famille des normales est fermée, elle nous donne la configuration du contour C de la barre.

4. Exemple de torsion élasto-plastique d'une barre de section elliptique. Par le procédé indiqué, V. Sokolovski a trouvé une solu-

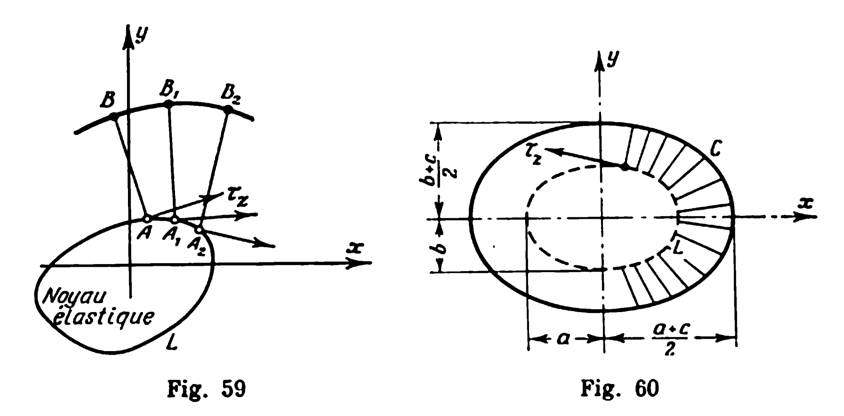


Fig. 59 Fig. 60

tion simple du problème de la torsion élasto-plastique d'une barre de section elliptique (fig. 60).

Admettons que le contour L est une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La solution pour le noyau élastique satisfaisant à la condition d'écoulement $T = k$ sur L est élémentaire:

$$\tau_{xz}=-k\frac{y}{b}, \quad \tau_{yz}=k\frac{x}{a},$$

l'angle de torsion étant égal à

$$\omega=\frac{k}{2G}\frac{a+b}{ab}.$$

Soient $x = -a\sin\psi$, $y = b\cos\psi$ les équations paramétriques de l'ellipse L; les contraintes tangentielles y sont égales à:

$$\tau_{xz}=-k\cos\psi, \quad \tau_{yz}=-k\sin\psi.$$

La direction de la contrainte tangentielle τ_z sur l'ellipse est définie par la relation

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \operatorname{tg} \psi.$$

L'équation de la droite, normale au vecteur τ_z et passant par les points de L, est de la forme

$$y = -x \operatorname{cotg} \psi + (b - a) \cos \psi.$$

Si a et b sont fixes, c'est justement l'équation de la famille uniparamétrique des droites de glissement. Il est maintenant nécessaire de construire les trajectoires orthogonales de cette famille. L'équation différentielle des trajectoires recherchées sera:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi = -\frac{x + a \sin \psi}{y - b \cos \psi}.$$

On constate aisément que les trajectoires orthogonales sont décrites par les équations paramétriques

$$\left.\begin{aligned} 2x &= -\sin \psi \,[a + c + (a - b) \cos^2 \psi], \\ 2y &= \cos \psi \,[b + c - (a - b) \sin^2 \psi], \end{aligned}\right\}$$

où c est une constante arbitraire.

Les équations obtenues définissent un ovale à deux axes de symétrie et aux demi-axes de $\frac{1}{2}(a + c)$ et $\frac{1}{2}(b + c)$. La configuration de l'ovale diffère peu de celle d'une ellipse aux demi-axes correspondants. La solution a une signification si l'ellipse L se trouve tout entière à l'intérieur de l'ovale C, ce qui est vérifié pour des angles de torsion ω suffisamment grands. L'accroissement de l'angle ω entraîne l'aplatissement du noyau élastique (ellipse L) qui, à la limite, dégénère en une ligne de rupture.

5. **Considérations finales.** Selon une autre méthode inverse, proposée par L. Galine [92], on peut établir les équations des contours L et C si l'on connaît la répartition des contraintes tangentielles le long de L, satisfaisant à certaines conditions complémentaires. A l'aide de ces résultats, L. Galine trouva la solution de plusieurs problèmes élasto-plastiques pour les barres dont la section est proche du polygone. Il proposa aussi une méthode visant à résoudre les problèmes directs pour les barres de section polygonale [93]. Il y a une bonne concordance entre les résultats obtenus par L. Galine et les données expérimentales de Nadaï.

Notons, pour conclure, que plusieurs problèmes élasto-plastiques (torsion de cornière, torsion des barres de section carrée ou triangulaire) ont été résolus par des méthodes numériques (« de relaxation ») [60].

Le problème de l'existence d'une solution du problème élasto-plastique a été examiné par L. Galine et par d'autres auteurs.

Enfin, une remarque sur laquelle il convient de nous arrêter. Lors de l'analyse de la torsion élasto-plastique il était tacitement supposé que la mise en charge avait lieu dans tous les points de la zone plastique, le moment de torsion (ou l'angle de torsion ω) étant croissant. Mais la frontière de la zone plastique varie et, en général, en certains points de la zone en question on peut assister

à la décharge. Cette question a été étudiée dans l'ouvrage de P. Hodge [162] qui a montré qu'avec l'accroissement du moment de torsion il n'y avait pas de décharge dans les barres de section simplement connexe. La décharge peut avoir lieu par contre dans les barres de section multiplement connexe (dans un cylindre creux, par exemple). Cela complique fortement le problème de la torsion élasto-plastique des barres multiplement connexes, car il convient d'appliquer des équations différentes dans les domaines de décharge.

Le problème de la torsion d'un anneau circulaire de section invariable, développé par Freeberger, Wang et Prager (cf. [79]) représente la généralisation du problème de la torsion d'une barre rectiligne.

L'état de contrainte dans les zones plastiques de la barre circulaire soumise à la torsion et dont le diamètre varie selon la longueur a été étudié par V. Sokolovski [33]; la charge limite d'une telle barre sera définie par la suite dans le chapitre VIII.

La torsion des barres anisotropes et hétérogènes a été aussi étudiée (cf. [79, 80]).

Le problème de la déformation élasto-plastique antiplane est mathématiquement proche du problème de la torsion élasto-plastique. On y obtient aussi l'état du cisaillement pur mais avec des contraintes données sur le contour du corps (cf. travaux de G. Tchérépanov [137]).

30. TORSION DES BARRES ÉCROUISSABLES

1. Généralités. Lorsque la barre en matériau écrouissable est soumise à une torsion, on n'assiste pas à la mise en charge simple; la forme du déviateur des contraintes est conservée, mais il y a une variation des directions des axes principaux. On peut néanmoins supposer que ces déviations sont négligeables du fait que l'état de contrainte est relativement simple (cisaillement pur) et que les directions des axes principaux changent très peu à la torsion. En effet, les directions principales sont évidemment conservées le long du contour qui est une des lignes des contraintes (paragraphe 27). Les autres lignes des contraintes « répètent » en quelque sorte la configuration du contour, les variations de ces lignes à la torsion sont donc relativement petites et l'on peut considérer les changements de direction des axes principaux liés à la rotation du vecteur (tangent à la ligne des contraintes) comme insignifiants. Ainsi, dans l'analyse approchée on peut partir des équations de la théorie des déformations (cf. paragraphe 15, divisions 1 et 4). L'analyse de la torsion des barres susceptibles d'écrouissage basée sur la théorie de l'écoulement présente de grandes difficultés et n'est pas étudiée ici.

2. Equation différentielle. Portant les composantes de la déformation selon les équations (14.23) de la théorie des déformations

$$\gamma_{xz} = \bar{g}(T)\,\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \bar{g}(T)\,\tau_{yz} \tag{30.1}$$

dans la condition de continuité (27.6) et introduisant la fonction des contraintes F, on trouve l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{g}(T)\frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{g}(T)\frac{\partial F}{\partial y}\right] + 2\omega = 0, \tag{30.2}$$

où

$$T^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2.$$

Sur le contour, on a toujours F = const. L'équation différentielle (30.2) se rapporte aux équations du type Monge — Ampère; elle est linéaire par rapport aux dérivées secondes et en vertu des propriétés de $\bar{g}(T)$ (cf. paragraphe 12) est du type elliptique. La condition $\bar{g}(T) = \text{const} = \frac{1}{G}$ (milieu élastique de Hooke) conduit à l'équation de Poisson (27.10).

3. Solution pour la section circulaire. Les sections transversales restant planes, la solution est donc élémentaire pour la section circulaire, soit

$$\gamma_{xz} = -\omega y, \quad \gamma_{yz} = \omega x$$

et

$$\gamma_{\varphi z} = \Gamma = \omega r, \quad \tau_{\varphi z} = T = g(\omega r)\,\omega r.$$

L'angle de torsion ω est tiré de la condition de l'équivalence statique

$$M = 2\pi\omega \int_0^a g(\omega r)\, r^3\, dr.$$

4. Torsion des barres minces. Envisageons tout d'abord la torsion des profils minces ouverts. On part du problème sur la torsion d'un rectangle allongé (fig. 54, *a*). On peut supposer ici que la fonction des contraintes F est indépendante de x; on obtient alors à partir de (30.2):

$$\frac{d}{dy}\left[\bar{g}\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dF}{dy}\right] + 2\omega = 0,$$

d'où

$$\bar{g}\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dF}{dy} = -2\omega y + \text{const}.$$

En vertu de la parité de la fonction des contraintes on a $\frac{dF}{dy} = 0$ pour $y = 0$ et la constante arbitraire est nulle; maintenant on a:

$$\frac{dF}{dy} = -g(-2\omega y)\, 2\omega y,$$

et vu que $F = 0$ sur le contour, il en résulte

$$F = F(h, \omega, y) = -2\omega \int_y^{\frac{h}{2}} g(-2\omega y)\, y\, dy.$$

Pour les *profils ouverts* de configuration arbitraire (fig. 54, *c*), on a

$$M = 2\int_0^l \int_{-\frac{1}{2}h(s)}^{\frac{1}{2}h(s)} F[h(s), \omega, y]\, dy\, ds,$$

où s est calculé le long de la ligne médiane du profil.

La *torsion des profils minces fermés* est envisagée sur la base du théorème concernant la circulation du cisaillement [13]. Examinons l'intégrale

$$I_* = \oint_{C_*} \gamma_{xz}\, dx + \gamma_{yz}\, dy \qquad (30.3)$$

suivant le contour fermé C_* qui se trouve tout entier à l'intérieur de la section. En y introduisant les composantes de la déformation

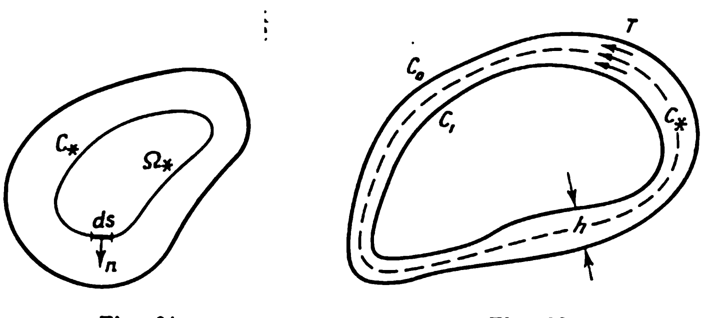


Fig. 61 Fig. 62

d'après (27.1) et en appliquant la condition d'univocité du déplacement $u_z = w(x, y, \omega)$, on obtient:

$$I_* = 2\omega\Omega_*,$$

où Ω_* est une aire délimitée par le contour C_* (fig. 61).

D'autre part, portons dans (30.3) les composantes de la déformation conformément à (30.1), les composantes de la contrainte étant exprimées par la fonction des contraintes (27.7); étant donné que

$$\frac{\partial F}{\partial y}\, dx - \frac{\partial F}{\partial x}\, dy = -\frac{\partial F}{\partial n}\, ds,$$

on trouve:

$$I_* = -\oint_{C_*} \bar{g}(T) \frac{\partial F}{\partial n}\, ds.$$

Ainsi,

$$\oint_{C_*} \bar{g}(T) \frac{\partial F}{\partial n} ds = -2\omega\Omega_*. \tag{30.4}$$

On obtient le théorème de Bredt sur la circulation des contraintes tangentielles pour $\bar{g}(T) = \text{const} = \frac{1}{G}$.

Passons maintenant au cas d'un *tube à parois minces* dont la section est limitée par les courbes C_0, C_1 (fig. 62); ici C_* est la ligne médiane. Sur les contours C_0, C_1, la fonction des contraintes prend certaines valeurs constantes F_0, F_1; une de ces valeurs peut être considérée comme nulle (paragraphe 27), soit $F_0 = 0$.

Grâce à la petitesse de l'épaisseur du tube $h(s)$, on peut admettre que F varie de façon linéaire de $F = F_1$ sur le contour intérieur à $F = F_0 = 0$ sur le contour extérieur. Conformément à (27.9) on trouve:

$$M \approx 2F_1\Omega_*,$$

où Ω_* est l'aire limitée par la courbe C_*. Ensuite,

$$\frac{\partial F}{\partial n} \approx -\frac{F_1}{h}, \quad T \approx \frac{F_1}{h}.$$

Selon le théorème (30.4)

$$\oint_{C_*} \bar{g}\left(\frac{F_1}{h}\right) \frac{F_1}{h} ds = 2\omega\Omega_*, \tag{30.5}$$

d'où l'on tire l'angle de torsion ω.

5. **Considérations finales.** Dans les problèmes particuliers l'intégration de l'équation différentielle (29.2) peut être réalisée par telle ou telle méthode des approximations successives. On possède la solution du problème sur la concentration des contraintes, ce qui est dû à une petite encoche ménagée sur la surface de la barre en torsion [14]. On peut, en maintes occasions, élaborer une solution approchée à l'aide de la méthode variationnelle (cf. paragraphe 68).

On a étudié les problèmes portant sur l'existence des solutions de l'équation différentielle (30.2) ainsi que les propriétés de ces solutions.

Exercices du chapitre IV

1. Calculer le moment limite de torsion pour une barre dont la section est un triangle équilatéral.
2. Même problème pour une section en cornière.
3. Même problème pour un tube carré à parois minces ($h = \text{const}$).
4. Examiner l'état limite d'une barre cylindrique circulaire (de rayon a) soumise à une torsion et une traction simultanées (partir des équations de la théorie de plasticité de Saint-Venant — von Mises (13.12); les sections transversales restent planes et pivotent d'un bloc, et seules les composantes de la contrainte σ_z, τ_φ, sont non nulles); trouver la répartition des contraintes ainsi que les valeurs de la force axiale et du moment de torsion.

Réponse.

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2\rho^2}}, \quad \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s}=\frac{p\rho}{\sqrt{1+p^2\rho^2}}, \quad p=\frac{a\dot{\omega}}{\sqrt{3}\,\xi_z}, \quad \rho=\frac{r}{a}.$$

5. Examiner la torsion et la traction d'une barre cylindrique circulaire d'après la théorie de l'écoulement plastique pour la voie de charge suivante: la barre s'étire jusqu'à ce qu'elle n'atteigne la limite d'écoulement; elle se tord ensuite pour un allongement axial fixé.

Réponse.

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\operatorname{sch} q\rho, \quad \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s}=\operatorname{th} q\rho, \quad q=\frac{Ga\omega}{\tau_s}.$$

6. On sait qu'à la torsion d'une barre circulaire de diamètre variable seul le déplacement tangentiel $u_\varphi = u_\varphi(r, z)$ diffère de zéro. Partant des relations de la théorie des déformations, déduire l'équation différentielle pour u_φ dans le cas de l'écrouissage.

CHAPITRE V

DÉFORMATION PLANE

31. ÉQUATIONS FONDAMENTALES

1. Généralités. En déformation plane, les déplacements des points matériels du corps sont parallèles au plan x, y et indépendants de z:

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0. \tag{31.1}$$

Cet état apparaît dans des corps prismatiques longs lorsque les charges sont normales à la surface latérale et ne dépendent pas de z.

On admet, comme d'habitude, que le corps soit isotrope et homogène. Nous aurons la même image des états de contrainte et de déformation en toute section $z = \text{const}$; les composantes de la contrainte ne dépendent que de x, y, tandis que τ_{xz}, τ_{yz} sont nulles en l'absence des cisaillements correspondants. Ainsi, σ_z est une des contraintes principales.

Dans la théorie de l'élasticité, les conditions citées sont, on le sait, suffisantes pour énoncer le problème de la déformation plane. Dans la théorie de la plasticité, on a besoin de simplifications complémentaires sans lesquelles on ne saurait obtenir l'énoncé mathématique acceptable du problème.

Par la suite, on applique le schéma du corps rigide-plastique. Ce concept, comme nous l'avons déjà souligné (paragraphe 23), introduit une erreur qu'il est difficile d'évaluer. Cependant, l'analyse tant soit peu régulière du problème plan se complique si l'on renonce au schéma du corps rigide-plastique. Dans le problème envisagé, on arrive en général à l'état limite lorsque certains domaines du corps se trouvent encore dans l'état élastique (comme dans l'exemple de la flexion d'une poutre sous l'effet d'une force, paragraphe 24). La situation est différente pour le problème de la torsion (chapitre IV) et pour le problème de la sphère creuse (paragraphe 25) où dans l'état limite la section entière de la barre (sphère) est l'objet de déformations plastiques.

De la sorte, on envisagera au fond le problème élasto-plastique bien que sa solution soit extrêmement difficile. En négligeant com-

plètement les domaines élastiques on prive l'énoncé du problème de sa netteté et on complique la compréhension physique des solutions.

Il est plus rationnel de partir du schéma du corps rigide-plastique, qui permet d'envisager en même temps le champ des contraintes et le champ des déplacements en liant ce dernier aux déplacements des domaines rigides. C'est de la sorte aussi que l'on construit en somme la solution approchée des problèmes élasto-plastiques.

Il va de soi que l'erreur dépend du type des problèmes considérés. Dans les problèmes de technologie, où des déformations plastiques importantes se produisent dans certaines parties du corps, il ne semble pas que l'application du concept du corps rigide-plastique puisse être contestée. La déformation d'une maille carrée d'une bande étirée à travers une matrice conique dure est montrée sur la figure 146. Il est évident que l'on peut considérer les parties de la bande se trouvant des deux côtés de la matrice comme des domaines rigides et que la déformation plastique sera localisée au voisinage des plans de contact. Les problèmes technologiques de ce type se rapportent aux problèmes de l'écoulement plastique stationnaire aux grandes déformations (paragraphe 49).

Les problèmes sur les charges limites qui sont étroitement liés à ceux de la résistance des matériaux sont des problèmes d'un autre type caractérisés par de petites déformations. Les domaines de la déformation plastique pour les corps rigide-plastique et élasto-plastique peuvent certainement y différer notablement. Néanmoins, le schéma du corps rigide-plastique est parfaitement valable pour la recherche des charges limites; cette affirmation sera argumentée au chapitre VIII consacré aux principes d'extremum de la théorie de la plasticité.

L'accumulation des résultats expérimentaux est souhaitable pour l'estimation des erreurs. Les essais exécutés dernièrement, comme nous le verrons ultérieurement, confirment bien les nombreuses conclusions qui ont été faites sur la base du schéma du corps igide-plastique.

2. Equations fondamentales. Il découle de (31.1) que $\varepsilon_z = 0$. Appliquant cette condition, on obtient, aussi bien d'après les équations de la théorie des déformations (14.3) que d'après celles de la théorie de l'écoulement (13.5), qu'en négligeant les déformations élastiques [1] on est amené à

$$\sigma_z - \sigma = 0, \tag{31.2}$$

d'où

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \tag{31.3}$$

[1] On peut montrer qu'il suffit d'adopter la condition d'incompressibilité pour obtenir (31.2).

Comme nous l'avons déjà noté, σ_z est l'une des contraintes principales. Les autres contraintes principales σ_i sont les racines de l'équation quadratique

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0.$$

D'où

$$\left.\begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{31.4}$$

Il est évident que σ_z est la contrainte principale moyenne. La contrainte tangentielle maximale sera alors

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \equiv \tau.$$

Comme il est facile de le calculer, l'intensité des contraintes tangentielles sera elle aussi égale à $\tau_{\max}$:

$$T = \tau. \tag{31.5}$$

Ainsi, les contraintes principales sont égales à

$$\sigma_1 = \sigma + \tau, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma - \tau,$$

autrement dit, *l'état de contrainte en chaque point se caractérise par la superposition de la pression hydrostatique* σ *à la contrainte de cisaillement pur* τ (fig. 63).

Les valeurs des cosinus, déterminant la première (soit $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$) direction principale, sont tirées du système

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) \cos(1, x) + \tau_{xy} \cos(1, y) = 0, \\ \tau_{xy} \cos(1, x) + (\sigma_y - \sigma_1) \cos(1, y) = 0. \end{aligned}\right\}$$

En éliminant σ_1 on obtient:

$$\operatorname{tg} 2(1, x) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{31.6}$$

Les directions des éléments de surface sur lesquels agissent les contraintes tangentielles maximales forment un angle de $\pm \frac{\pi}{4}$ avec la direction principale.

Par la suite, les *lignes de glissement* auront une grande importance. *La ligne de glissement est une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente à l'élément de surface de la contrainte tangentielle maximale.* Il est évident qu'il existe deux familles orthogonales des lignes de glissement, qui sont caractérisées par les équations:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta),$$

où α, β sont des paramètres quelconques. Les lignes de la première famille, dites *lignes* α, correspondent à des valeurs fixées du paramètre β (β = const) ; le paramètre α est constant le long de la *ligne* β.

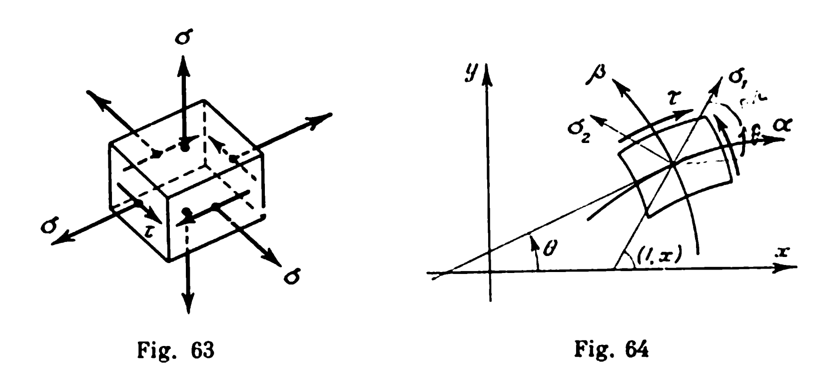


Fig. 63 Fig. 64

La ligne α dévie à droite de la première direction principale d'un angle de 45° (fig. 64) ; la ligne β dévie à gauche de la première direction principale du même angle.

Nous conviendrons de fixer les directions des lignes α, β de manière qu'elles forment un système de coordonnées à droite, la contrainte tangentielle τ étant alors positive [1] (fig. 64). Désignons par θ l'angle d'inclinaison de la tangente à la ligne α qui est mesuré dans la direction positive à partir de l'axe des x.

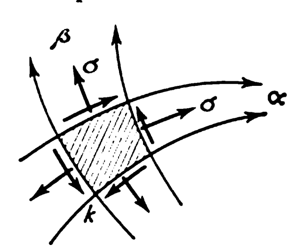


Fig. 65

Les équations différentielles des familles α, β seront respectivement

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta. \qquad (31.7)$$

Les lignes de glissement couvrent le domaine d'un réseau orthogonal. L'élément infiniment petit, localisé par les lignes de glissement, éprouve une traction identique dans les directions des lignes de glissement (fig. 65).

3. Etat d'écoulement. Soit un milieu qui se trouve dans un état de plasticité parfaite. Alors la condition d'écoulement doit être vérifiée :

$$\tau = \text{const} = \tau_s$$

ou

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2\tau_s.$$

[1] Notons que le système des directions tourné d'angle π par rapport au système représenté sur la figure 64 satisfait également à ces conditions.

Désignant τ_s par k, on obtient:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2. \tag{31.8}$$

On ajoutera ici deux équations différentielles d'équilibre (les forces volumiques étant absentes):

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0. \tag{31.9}$$

Si les contraintes sont données à la frontière du corps, on dispose alors d'un système d'équations complet pour définir l'état de contrainte (et ceci indépendamment de la déformation). Les problèmes de ce type sont appelés *statiquement déterminés*.

On adjoint aux équations citées les relations qui lient les composantes de la contrainte aux accroissements des composantes de la déformation; ce seront les relations (13.7) dans lesquelles on élimine les termes se rapportant à la déformation élastique, c.-à-d. les relations de la théorie de la plasticité de Saint-Venant — von Mises (13.12). Dans le cas de déformation plane, il ne reste que trois relations (pour ξ_x, ξ_y, η_{xy}) d'où il découle l'équation

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}-\dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}, \tag{31.10}$$

affirmant que la direction des éléments de surface de la contrainte tangentielle maximale coïncide avec celle des éléments subissant une déformation de cisaillement à une vitesse maximale. En outre, la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{31.11}$$

doit être vérifiée.

Pour les cinq inconnues σ_x, σ_y, τ_{xy}, v_x, v_y, on a cinq équations (31.8) à (31.11)

4. **Méthode semi-inverse.** Si le problème est statiquement déterminé, on trouve les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} indépendamment des vitesses v_x, v_y; les contraintes étant trouvées, on a alors pour chercher les vitesses le système d'équations *linéaire* (31.10), (31.11). On peut calculer le champ des vitesses en résolvant ce système pour les conditions aux limites données.

Si le problème est statiquement indéterminé, il faut alors résoudre conjointement les équations par rapport aux contraintes et aux vitesses, ce qui sera lié à des difficultés notables. Dans ces problèmes on utilise souvent la méthode semi-inverse: on essaie de trouver un champ des lignes de glissement tel que la répartition des

10—0653

vitesses s'accorde avec les conditions aux limites. On doit en même temps donner dans telle ou telle mesure les contours de la zone plastique et compléter les conditions aux limites pour la contrainte. Malgré leur caractère limité, les procédés de ce genre ont permis de trouver de nombreuses solutions importantes. De ce qui précède découle notamment l'intérêt majeur que présente l'analyse du système d'équations (31.8), (31.9) pour les contraintes. Penchons-nous sur l'étude détaillée des propriétés des solutions de ce système d'équations. Une méthode plus complexe de solution conjointe des équations pour les contraintes et les vitesses sera envisagée par la suite (paragraphe 51).

32. LIGNES DE GLISSEMENT, LEURS PROPRIÉTÉS

1. Lignes caractéristiques. Envisageons donc les équations aux contraintes (31.8), (31.9).

Prenons les formules connues de la théorie des contraintes:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2(1,\ x), \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2(1,\ x), \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2(1,\ x), \end{aligned}\right\}$$

remplaçons, dans ces équations, la demi-somme des contraintes principales par σ, la demi-différence par k (conformément à la condition d'écoulement) et passons à l'angle $\theta = (1,\ x) - \frac{\pi}{4}$. On a alors:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k\sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k\sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (32.1)$$

Il est évident que la condition d'écoulement (31.8) est alors vérifiée.

Portant ces valeurs dans les équations d'équilibre, on obtient un système de deux équations différentielles non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux fonctions inconnues $\sigma(x,\ y)$, $\theta(x,\ y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\left(\cos 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) &= 0, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} - 2k\left(\sin 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - \cos 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (32.2)$$

Les méthodes d'élaboration et les propriétés de la solution du système d'équations différentielles obtenu sont déterminées avant tout

par le type du système (cf. Appendice). Montrons que ce système est du type hyperbolique.

Pour définir l'hyperbolicité d'un système, il faut montrer qu'il existe deux familles réelles différentes de lignes caractéristiques. On peut s'y prendre de différentes manières. L'application d'une méthode « déterminante » ordinaire (cf. Appendice) nécessite de nombreux calculs et n'est pas suffisamment illustrative. C'est pourquoi nous utilisons le procédé suivant qui est plus simple.

Soit une ligne quelconque L dans le plan x, y (fig. 66)

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

le long de laquelle on connaît les valeurs des fonctions cherchées

$$\sigma = \sigma(s), \quad \theta = \theta(s).$$

On cherchera la solution $\sigma(x, y)$, $\theta(x, y)$ prenant la valeur donnée $\sigma(s)$, $\theta(s)$ le long de la ligne L. Le problème relatif à l'élaboration d'une telle solution est appelé *problème de Cauchy*. Dans le langage géométrique, ce problème consiste à mener une surface intégrale par la courbe donnée.

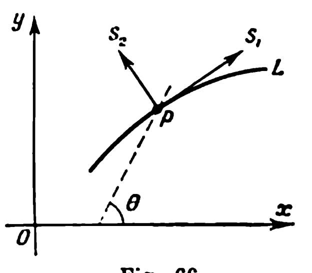


Fig. 66

La solution du problème de Cauchy est impossible si L est une ligne caractéristique, puisque dans ce cas il est impossible de déterminer de manière univoque, le long de L, les dérivées premières de la solution à partir des *équations différentielles* (ce qui, dans le langage géométrique, signifie qu'il est impossible de déterminer univoquement le long de L le plan tangent à la surface intégrale). σ et θ étant connues sur la ligne L, on connaîtra aussi les dérivées $\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}$, $\frac{\partial\theta}{\partial s_1}$ si ces fonctions sont dérivables. On repérera alors s_1 et s_2 dans un système de coordonnées local, formé par la tangente et la normale à L en un certain point P (fig. 66). Notons que les équations d'équilibre et la condition de plasticité ne changent pas lorsque l'on passe du système de coordonnées x, y au système s_1, s_2. Les équations différentielles (32.2) gardent également leur ancienne forme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial s_1} - 2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_1} + \sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_2}\right) = 0, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial s_2} - 2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_1} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_2}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{32.3}$$

l'angle θ, définissant la direction de l'élément de surface de glissement en un point P, y est mesuré à partir de l'axe des s_1. Les dérivées $\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}$, $\frac{\partial\theta}{\partial s_1}$ sur L étant connues, on peut, si θ diffère de 0, $\frac{\pi}{2}$, déduire à

partir de (32.3) les dérivées $\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}$, $\frac{\partial\theta}{\partial s_2}$ et résoudre de la sorte le problème de Cauchy.

Si, par contre, L est confondue avec la ligne de glissement, on aura alors $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$ et l'on ne pourra pas dans ce cas déduire les dérivées mentionnées à partir des équations différentielles (32.3). La ligne L sera dans ce cas une ligne caractéristique.

Ainsi, *les lignes caractéristiques se confondent avec les lignes de glissement*; il est évident qu'il existe deux familles réelles différentes de lignes caractéristiques. Le système de départ est donc du type hyperbolique.

Si les axes de coordonnées s_1, s_2 se confondent avec les directions des tangentes aux lignes de glissement, les équations différentielles (32.3) prennent une forme simple

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\sigma - 2k\theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta}(\sigma + 2k\theta) = 0, \tag{32.4}$$

où $\frac{\partial}{\partial s_\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial s_\beta}$ sont les dérivées suivant les lignes α, β.

Ces équations ont une signification mécanique simple; elles sont les équations différentielles d'équilibre de l'élément infiniment petit du *milieu plastique*, qui est engendré par le réseau des lignes de glissement (*élément de glissement*; fig. 65), ce réseau étant considéré comme une sorte du réseau de coordonnées naturel du problème en question.

P étant un point arbitraire sur la ligne de glissement, on aura alors respectivement le long des lignes de glissement des familles α, β:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \\ &\frac{\sigma}{2k} - \theta = \text{const} \equiv \xi, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta, \\ &\frac{\sigma}{2k} + \theta = \text{const} \equiv \eta. \end{aligned}\right\} \tag{32.5}$$

Ces relations, pour le problème plan de la théorie de la plasticité, ont été déduites pour la première fois par H. Hencky (1923). Des relations de caractère plus général furent obtenues antérieurement pour le massif pulvérulent par Kötter (1903).

En principe, le paramètre ξ varie lors du passage d'une ligne de glissement de la famille α à une autre. Exactement de la même manière change le paramètre η lorsque l'on passe d'une ligne de la famille β à une autre. Ainsi, ξ ne dépend que du paramètre β et η que de α, autrement dit:

$$\xi = \xi(\beta), \quad \eta = \eta(\alpha).$$

Si l'on connaît le champ des lignes de glissement et, sur ces dernières, les valeurs des paramètres ξ, η, on connaîtra alors σ, θ en

chaque point, c.-à-d. que les composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} de la contrainte sont connues. Notons que, dans le problème envisagé, à la différence du problème linéaire (le problème de l'équation des ondes, par exemple), les lignes caractéristiques dépendent de la solution cherchée qui est le champ des contraintes. En particulier, une courbe arbitraire $y = y(x)$ peut être caractéristique si un état de contrainte approprié se forme le long de cette courbe (c.-à-d. si l'angle θ correspondant est déterminé).

2. Propriétés des lignes de glissement. Les lignes de glissement font preuve de toute une série de propriétés remarquables, étudiées surtout par Hencky. Envisageons donc ces propriétés.

1) *Le long des lignes de glissement, la pression varie proportionnellement à l'angle formé par la ligne de glissement et l'axe des x.* Cette propriété est évidente, car $\sigma = 2k\theta +$ const le long de la ligne α et $\sigma = -2k\theta +$ const le long de la ligne β.

2) *L'angle θ et la pression σ changeront d'une même grandeur* (premier théorème de Hencky) *si l'on passe d'une ligne de glissement de la famille β à une autre le long de n'importe quelle ligne de glissement de la famille α.*

En effet, des relations

$$\frac{\sigma}{2k} - \theta = \xi, \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = \eta \tag{32.6}$$

il découle que

$$\sigma = k(\xi + \eta), \quad \theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi). \tag{32.7}$$

Soient deux lignes de glissement quelconques $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ de la famille α et deux lignes de glissement $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ de la famille β (fig. 67). Le long de ces lignes, on a respectivement:

$$\xi = \xi_1, \quad \xi = \xi_2; \quad \eta = \eta_1, \quad \eta = \eta_2.$$

Portant ces valeurs dans les formules (32.7) pour les points d'intersection $A_{11}, \ldots, A_{22}$, on trouve facilement:

$$\varphi_1 = \theta_{A_{21}} - \theta_{A_{11}} = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1), \quad \varphi_2 = \theta_{A_{22}} - \theta_{A_{12}} = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1),$$

c.-à-d. $\varphi_1 = \varphi_2$. On obtient de la même façon:

$$\sigma_{A_{21}} - \sigma_{A_{11}} = \sigma_{A_{22}} - \sigma_{A_{12}}.$$

Il est évident que nous en viendrons à des conclusions analogues si nous passons d'une ligne de glissement de famille α à une autre le long de n'importe quelle ligne β.

3) *Si la valeur de σ est connue en un point quelconque du réseau de glissement donné, elle peut être calculée partout dans le champ.*

Soit σ_A une valeur connue au point A (fig. 68); connaissant θ_A en ce point, on calcule immédiatement la valeur du paramètre η_1 pour la ligne de glissement β passant par A.

Par la suite, au point B, on trouve facilement $\sigma_B = 2k(\eta_1 - \theta_B)$ et $\xi_1 = \frac{\sigma_B}{2k} - \theta_B$; la valeur de la pression σ au point C sera obtenue par la formule $\sigma_C = 2k(\xi_1 + \theta_C)$.

4) *Si un segment quelconque de la ligne de glissement est une droite, les valeurs de* σ, θ, *les paramètres* ξ, η *et les composantes* σ_x, σ_y, τ_{xy} *de la contrainte sont constants le long de cette droite.* En effet, si l'on

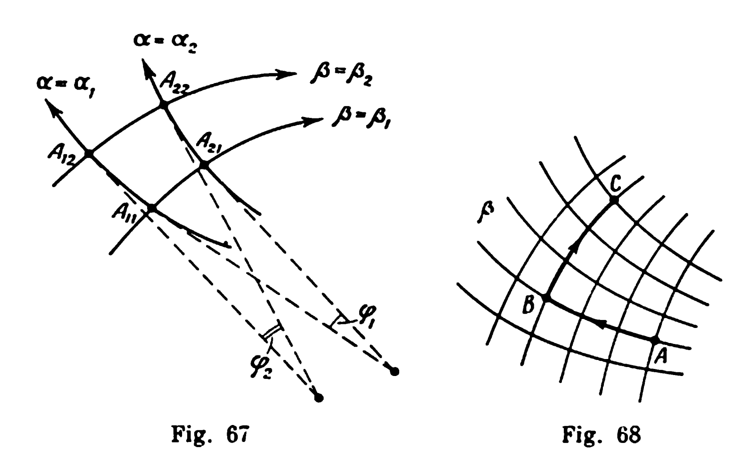


Fig. 67 Fig. 68

admet, par exemple, que le segment de la ligne α est une droite, on a alors le long de celle-ci θ = const et le paramètre ξ constant. Mais alors, conformément à (32.6), on a également σ = const. Par conséquent, le long du segment en question, le paramètre η sera lui aussi constant.

Si dans un domaine quelconque, les deux familles de lignes de glissement sont rectilignes, les contraintes y seront réparties uniformément, les paramètres ξ, η *étant constants.*

5) *Si un segment quelconque d'une ligne de glissement de la famille* β *(ou* α*) est une droite, tous les segments correspondants des lignes* β *(ou* α*), découpés par les lignes de la famille* α *(ou* β*)* (fig. 69), *seront des droites.*

Cette conclusion découle de la deuxième propriété, étant donné que l'angle compris entre deux tangentes correspondantes à deux lignes de glissement quelconques reste constant lorsqu'un mouvement se produit suivant les lignes β choisies.

Dans un tel domaine, les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} sont constantes le long de chaque segment de droite, bien qu'elles varient en passant d'un segment de β à l'autre. Les états de contrainte de ce genre sont appelés états de contrainte *simples*.

Comme on l'a démontré, les deux paramètres ξ, η sont constants le long de chaque segment rectiligne; le paramètre ξ ayant une valeur constante le long de chaque ligne α, on a $\xi = \text{const}$ dans *tout le domaine* $ABB'A'$.

6) *Les segments de droite découpés par les lignes de glissement d'une autre famille ont une même longueur.* En effet, envisageons les lignes de glissement AA', BB'. La développée (le lieu géométrique des centres de courbure) d'une courbe quelconque est l'enveloppe de la famille de normales à la courbe. Il est évident que les lignes de glissement AA' et BB' ont la même développée D. Comme on le sait, la courbe initiale peut être construite par dévidage du fil de la développée. Mais alors, lorsque l'on trace la courbe BB', le fil sera plus court du segment AB que si l'on trace la courbe AA'.

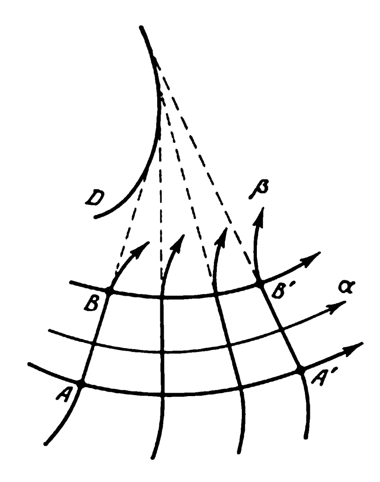


Fig. 69

7) Si l'on s'avance le long d'une ligne de glissement quelconque, *les rayons de courbure des lignes de glissement de l'autre famille varient aux points d'intersection de la distance franchie* (deuxième théorème de Hencky).

Les rayons de courbure R_α, R_β des lignes α, β sont déterminés par les relations

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}. \tag{32.8}$$

Le rayon de courbure R_α (R_β) est positif si le centre de courbure se trouve dans le sens de l'accroissement de s_β (de s_α). Envisageons les lignes infiniment proches des familles α, β délimitant l'élément de glissement $\Delta s_\alpha \Delta s$ (fig. 70). Il est évident que

$$R_{\alpha\beta}\Delta\theta'' = \Delta s_\alpha, \quad -R_\beta\Delta\theta' = \Delta s.$$

Calculons la dérivée de Δs_α le long de la ligne β:

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(R_\alpha\Delta\theta'') \sim \frac{(R_\alpha - \Delta s_\beta)\,\Delta\theta'' - R_\alpha\Delta\theta''}{\Delta s_\beta} = -\Delta\theta''.$$

Comme il est démontré, l'angle $\Delta\theta''$ entre deux lignes β est constant, par conséquent,

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1, \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1. \tag{32.9}$$

La deuxième relation est déduite de façon analogue à la première.

Les points d'intersection O', O'' des normales $O'A$, $O'A'$ et $O''A$, $O''A''$ sont les centres de courbure des lignes β, α respectives au point A.

Le rayon de courbure AP de la ligne β au point A est égal à la somme du rayon de courbure BQ de la ligne β au point B et de la longueur de l'arc AB (fig. 71).

Le théorème de Hencky peut être représenté également sous une autre forme (Prandtl) : aux points d'intersection avec la ligne α,

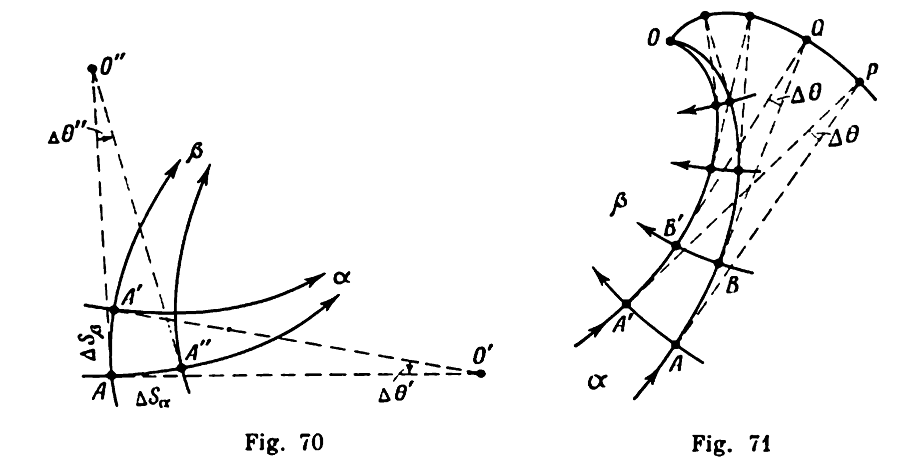


Fig. 70 Fig. 71

les centres de courbure des lignes β forment la développante PO de la ligne α.

8) Le théorème de Hencky montre que *le rayon de courbure des lignes de glissement* β *diminue lorsque l'on se déplace vers leur concavité.*

Le rayon de courbure des lignes β doit se réduire à zéro si l'extension de l'état plastique est suffisamment grande, ce qui correspond à l'intersection de la développante OP avec la ligne de glissement AO. Par ailleurs, la ligne de famille β aura sa pointe en un point O. En outre, il découle clairement de cette construction (fig. 71) qu'il y a convergence des lignes de glissement infiniment proches AO, $A'O$ au point O. Ce point O appartient à l'enveloppe des lignes de glissement de la famille α. Ainsi, l'enveloppe des lignes de glissement d'une famille est le lieu géométrique des points de rebroussement des lignes de glissement de la deuxième famille.

Ayant en O le point de rebroussement, les lignes de glissement β ne peuvent pas couper l'enveloppe. Autrement dit, l'enveloppe est la frontière de la solution analytique.

Soit AB l'enveloppe des lignes α. Traçons, en un de ses points P, un système de coordonnées local s_α, s_β (fig. 72). Il découle des rela-

tions (32.8) que la dérivée $\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}$ est limitée au point P, tandis que $\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}$ tend vers l'infini, car le rayon de courbure $R_\beta = 0$ pour les lignes β sur l'enveloppe. Mais alors on déduit des équations différentielles d'équilibre (32.4) que $\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}$ est limité et $\frac{\partial\sigma}{\partial s_\beta} \to \infty$. Ainsi, *le long de l'enveloppe, la dérivée normale de la pression moyenne σ tend vers l'infini.*

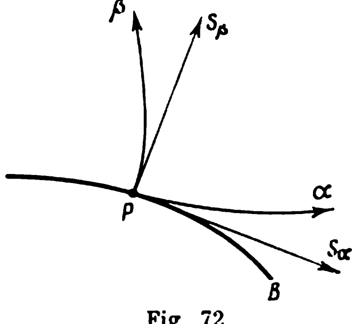


Fig. 72

9) *Si le passage par la ligne de glissement (par exemple, une ligne quelconque β) entraîne la discontinuité des dérivées des composantes de la contrainte, la courbure des lignes de glissement de la deuxième famille (α) est discontinue le long de la ligne β.*

Dans le système local s_α, s_β, les contraintes normales sont égales à la pression moyenne σ (fig. 65) et les contraintes tangentielles sont constantes.

La dérivée $\frac{\partial\sigma}{\partial s_\beta}$ est continue et la dérivée $\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}$ est par hypothèse discontinue le long de la ligne β.

Sur la ligne α on a $\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\sigma - 2k\theta) = 0$ et, par conséquent, le passage par la ligne β entraîne la discontinuité de la dérivée

$$\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha},$$

c.-à-d. que la courbure elle aussi varie par saut.

Ainsi, le réseau orthogonal des lignes de glissement peut être composé de morceaux de diverses courbes analytiques; la tangente tourne continûment aux points de jonction, tandis que la courbure est en général sujette à des discontinuités.

Pour conclure, nous noterons que les champs de glissement présentent nombre d'autres propriétés intéressantes (cf., par exemple, [46, 47]) sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas, car en général elles n'ont pas d'application dans les solutions des problèmes de la théorie de la plasticité.

33. LINÉARISATION. ÉTATS DE CONTRAINTE SIMPLES

1. Linéarisation. Selon M. Lévy, le système de départ des équations différentielles (32.2) peut être linéarisé. Notons, pour commencer, qu'il est commode de prendre les paramètres ξ, η pour des

fonctions inconnues. Introduisant dans (32.2)

$$\sigma = k(\xi + \eta), \quad \theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi),$$

multipliant ensuite successivement la deuxième des équations obtenues par tg θ, —cotg θ et additionnant à la première, on obtient après simplification

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\operatorname{tg}\theta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\operatorname{cotg}\theta = 0. \qquad (33.1)$$

Ce sont des équations non linéaires homogènes dont les coefficients ne sont que les fonctions de ξ, η. Un tel système est dit *réductible* puisqu'il se ramène au système linéaire par inversion des rôles des variables dépendantes et indépendantes ([1]). En effet, soient

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

le jacobien de la transformation étant non nul dans le domaine considéré :

$$\Delta(\xi, \eta) \equiv \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

Introduisant les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \Delta\frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\Delta\frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\Delta\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Delta\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

dans les équations différentielles (32.1) et simplifiant par le facteur $\Delta \neq 0$, on trouve :

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\operatorname{cotg}\theta = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\operatorname{tg}\theta = 0. \qquad (33.2)$$

C'est un système linéaire à coefficients variables, dit *canonique*, car dans chacune de ces équations les dérivées n'interviennent qu'une par une.

A l'aide de la substitution proposée par S. Mikhline,

$$x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta, \quad y = \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta,$$

où $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont de nouvelles variables, le système (33.2) est transformé en un système d'équations à coefficients constants

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} - \frac{\bar{x}}{2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} - \frac{\bar{y}}{2} = 0. \qquad (33.3)$$

On constate aisément que chaque nouvelle variable ($\bar{x}$ et $\bar{y}$) satisfait à l'équation des télégraphistes, par exemple :

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{1}{4}\bar{x} = 0.$$

([1]) Cf. Appendice.

2. Les intégrales du problème plan. Le système obtenu (33.2) n'est pas en général équivalent aux équations de départ (32.2), car à l'inversion on perd les solutions pour lesquelles le jacobien Δ (ξ, η) est identiquement nul. Cependant, ces solutions (« intégrales du problème plan »), qui sont souvent rencontrées dans les applications et qui ont été découvertes auparavant d'une autre manière

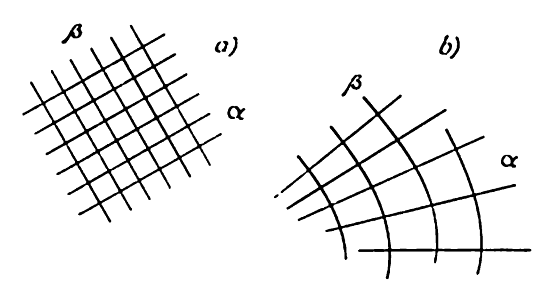


Fig. 73

(paragraphe 32), peuvent être déterminées directement sans aucune difficulté.

Examinons-les d'après la méthode de S. Khristianovitch [133]. On réussit, au moyen des équations (33.1), à écrire la condition $\Delta(\xi, \eta) = 0$ sous la forme:

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{2}{\sin 2\theta} \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{2}{\sin 2\theta} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0.$$

Il en découle trois cas pour lesquels les solutions des équations (32.1) réduisent le jacobien Δ (ξ, η) à zéro dans un certain domaine:

1) $\xi \equiv \text{const} = \xi_0, \quad \eta \equiv \text{const} = \eta_0;$

2) $\eta \equiv \text{const} = \eta_0;$

3) $\xi \equiv \text{const} = \xi_0.$

Le *premier cas* se rapporte à l'état de contrainte homogène dans un domaine quelconque. Les lignes de glissement y seront représentées par deux familles orthogonales de droites parallèles (fig. 73, *a*).

Dans le *deuxième cas*, une des équations (33.1) est vérifiée. Puisque $\xi = -2\theta + \eta_0$, l'autre équation sera récrite sous la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial\theta}{\partial y} \sin\theta = 0. \qquad (33.4)$$

C'est une équation différentielle quasi linéaire dont la surface intégrale est constituée par des caractéristiques. Leurs équations ont pour expression:

$$\frac{dx}{\cos\theta} = \frac{dy}{\sin\theta} = \frac{d\theta}{0}.$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles ordinaires sont évidentes:

$$\theta = \text{const} = C_1, \quad y - x \operatorname{tg} \theta = \text{const} = C_2.$$

Ainsi, une famille de lignes de glissement est une famille de droites dépendant de deux paramètres C_1 et C_2. Etant donné que $\sigma = 2k(\eta_0 - \theta)$, les contraintes sont constantes le long de chaque

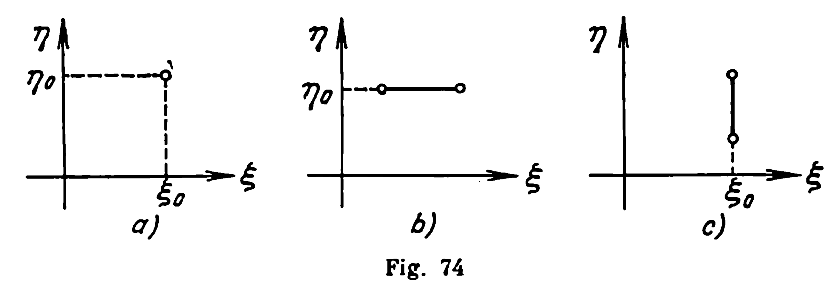


Fig. 74

droite de ce type (mais elles varient d'une droite à l'autre), c.-à-d. qu'il s'agit d'un *état de contrainte simple* (paragraphe 32). La solution générale de l'équation (33.4) peut être mise sous la forme

$$y - x \operatorname{tg} \theta = \Phi(\theta),$$

où $\Phi(\theta)$ est une fonction arbitraire.

La deuxième famille de lignes de glissement est construite selon les méthodes ordinaires comme une famille de courbes orthogonales (fig. 73, *b*); l'équation différentielle de cette famille est intégrée sous une forme fermée [133].

Le *troisième cas* d'intégrabilité est semblable au deuxième; pour l'envisager, il faut répéter les calculs précédents.

3. Application. On peut interpréter la solution $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ comme l'application du plan « physique » x, y sur le plan des paramètres ξ, η. Cela étant, on assiste à l'application du domaine du plan x, y, où le jacobien de transformation diffère de zéro, dans un certain domaine (en général, à plusieurs feuillets, cf. [41]) du plan ξ, η.

Les intégrales du problème plan produisent une autre application. Ainsi, dans le premier cas $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ (*état de contrainte homogène*), l'image par application d'un domaine D quelconque du plan x, y sur le plan ξ, η est un point de ce dernier (fig. 74, *a*).

Dans le deuxième cas $\eta = \eta_0$ (*état de contrainte simple*), on a l'application du domaine D sur un segment de droite $\eta = \eta_0$ (fig. 74, *b*). Dans le troisième cas $\xi = \xi_0$ (*état de contrainte simple*) l'application est d'un caractère analogue (fig. 74, *c*).

4. Etats de contrainte simples. Considérons un peu plus en détail les solutions relatives aux états de contrainte simples.

L'*état de contrainte homogène* est un cas particulier de ces solutions. Dans ces domaines le réseau des lignes de glissement est formé par deux familles orthogonales de droites parallèles (fig. 73, *a*) et les paramètres ξ, η sont constants ($\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, fig. 74, *a*).

Dans le cas général de l'état de contrainte simple, une famille de lignes de glissement (α, par exemple) consiste en des lignes droites; les courbes, orthogonales à ces lignes droites, forment la deuxième famille β (fig. 73, *b*), le paramètre η étant constant (fig. 74, *b*). On aura une image analogue si la famille β est une famille de lignes droites (fig. 74, *c*).

Pour l'état de contrainte simple, les droites de glissement (les lignes β, par exemple, fig. 75) sont des tangentes à l'enveloppe de

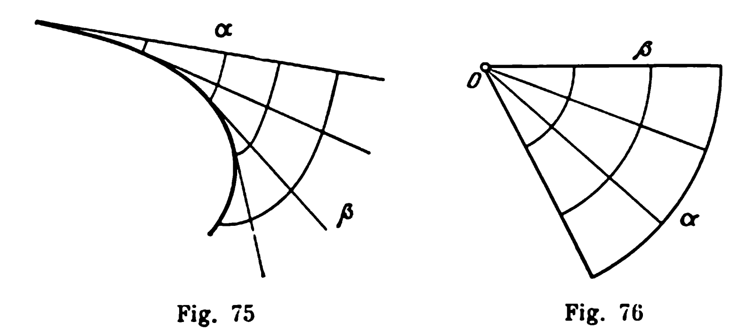


Fig. 75 Fig. 76

la famille (cf. paragraphe 32, fig. 69); cette enveloppe est appelée *courbe limite*. Dans le cas considéré, la famille α est constituée des lignes équidistantes qui sont des développantes par rapport à la courbe limite.

Le *champ centré* des lignes de glissement est un cas important de l'état de contrainte simple. Il est formé par un faisceau de droites et des cercles concentriques (fig. 76). L'enveloppe y dégénère en un point qui est le centre O. Dans l'exemple considéré, le paramètre $\eta =$ $=$ const $= \eta_0$ si les lignes α sont des droites. Les contraintes normales des éléments de surface radiaux et périphériques sont égales évidemment à la pression moyenne $\sigma = 2k\,(-\theta + \eta_0)$, autrement dit, elles sont les fonctions linéaires de l'angle d'inclinaison de la droite. Les contraintes sont discontinues au centre O qui est un point singulier du champ des contraintes donné.

Le théorème important suivant découle de ce qui précède.

Il y a toujours un état de contrainte simple dans le domaine voisin du domaine où l'état de contrainte est homogène.

Soit un état de contrainte homogène dans le domaine A (fig. 77), c.-à-d. $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Supposons que le segment de la ligne de glissement L, qui est la frontière du domaine A et qui appartient, disons, à la famille de lignes de glissement β, est une droite sur la-

quelle on a également $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Comme nous l'avons démontré précédemment, dans le domaine voisin B, une famille de lignes de glissement (β) sera constituée par des segments de droites d'égale longueur, et le paramètre ξ = const = ξ_0 étant donné que

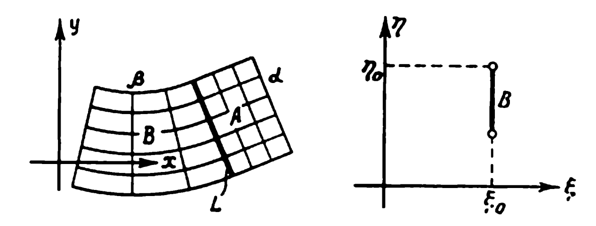


Fig. 77

chacune des lignes de glissement α coupant L porte la même valeur constante ξ_0.

Nous avons l'image suivante dans le plan ξ, η : l'image du domaine A obtenue par application est le point ξ_0, η_0, et celle

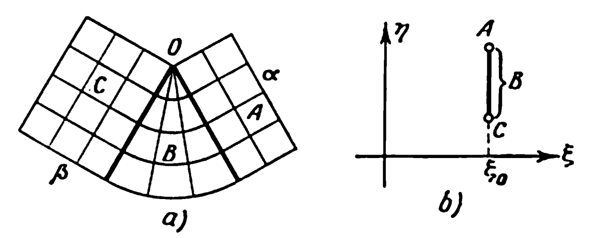


Fig. 78

du domaine B, le segment de la droite $\xi = \xi_0$ qui est issu du point mentionné.

A cette solution, le long de la frontière rectiligne du domaine, on ne peut adjoindre que les états de contrainte simples (en particulier, l'état de contrainte homogène).

On peut relier les domaines de l'état de contrainte homogène de différentes manières au moyen des domaines de l'état de contrainte simple. Donnons les exemples les plus simples.

Sur la figure 78, *a*, est représenté un champ de glissement composé de deux domaines différents de l'état de contrainte homogène qui sont réunis par le champ centré B. Le champ des contraintes est continu dans tout l'ensemble du domaine $A + B + C$ (sauf le centre O); le paramètre ξ est constant ($\xi = \xi_0$). L'application dans le plan ξ, η est montrée dans la partie droite de la figure 78, *b*.

Un cas un peu plus compliqué est montré sur la figure 79. Les domaines de l'état de contrainte homogène A, C, E y sont réunis

par deux champs centrés B et D, et les contraintes y sont continues (sauf le centre O). L'application dans le plan ξ, η consiste en deux segments de droites qui se coupent.

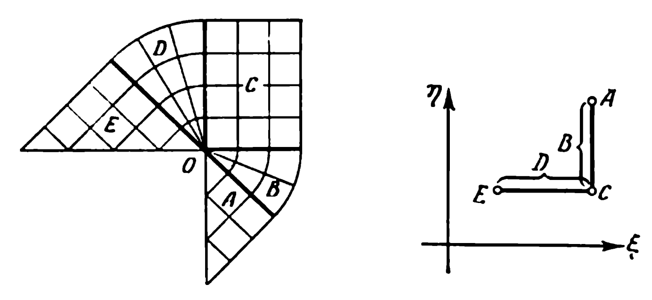


Fig. 79

Les constructions similaires des champs de glissement sont largement employées dans la résolution des problèmes particuliers.

34. CHAMP À SYMÉTRIE AXIALE

Comme il sera montré au paragraphe 36, un champ des contraintes à symétrie axiale se matérialise au voisinage de la *partie circulaire* du contour (libre ou uniformément chargée). En raison de ce qui précède, de tels champs sont souvent rencontrés dans les solutions de divers problèmes.

1. Cas de $\tau_{r\varphi} = 0$. Envisageons le champ de glissement autour d'un orifice circulaire de rayon a chargé par la pression uniforme p. Soient r, φ les coordonnées polaires. En l'absence de contrainte tangentielle sur le contour de l'orifice, on a $\tau_{r\varphi} = 0$ selon la condition d'équilibre. En chaque point du champ, les éléments de surface principaux ont alors les directions radiale et périphérique. La ligne de glissement sera une courbe qui coupe en chacun de ses points le rayon issu du centre sous un angle de $\pm \frac{\pi}{4}$. Cette propriété n'est propre qu'aux spirales logarithmiques

$$\varphi - \ln \frac{r}{a} = \beta, \quad \varphi + \ln \frac{r}{a} = \alpha, \tag{34.1}$$

qui forment justement deux familles orthogonales (fig. 80). Ces lignes s'observent de manière satisfaisante dans les essais (fig. 81).

Si au voisinage du contour $\sigma_\varphi > 0$, $\sigma_r < 0$, la condition d'écoulement est de la forme $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$ et l'état de contrainte se définit par les formules précédentes (26.3):

$$\sigma_r = -p + 2k \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2k. \tag{34.2}$$

On s'assure aisément que les relations (32.6) sont vérifiées le long des spirales logarithmiques (34.1).

Il faudra mettre le signe moins devant $2k$ dans les formules (34.2) si la condition d'écoulement est de la forme $\sigma_\varphi - \sigma_r = -2k$.

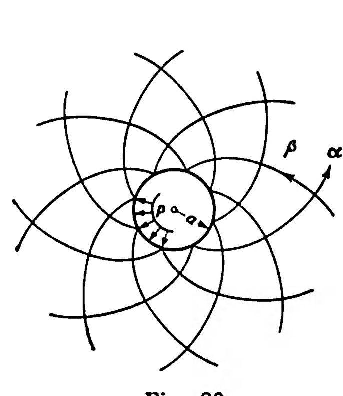


Fig. 80

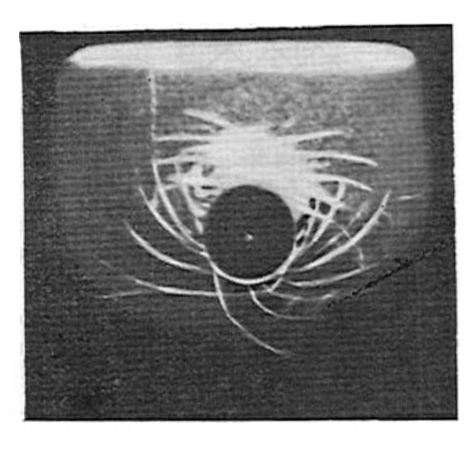


Fig. 81

2. Cas général. Le cas général du champ à symétrie axiale pour $\tau_{r\varphi} \neq 0$ a été examiné par S. Mikhline. La condition d'écoulement a maintenant la forme

$$(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\varphi}^2 = 4k^2.$$

Ecrivons les équations différentielles d'équilibre

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0. \tag{34.3}$$

Soient les composantes normale et tangentielle de la contrainte sur le contour de l'orifice

$$\sigma_r = -p, \quad \tau_{r\varphi} = q \quad \text{pour} \quad r = a, \tag{34.4}$$

avec $|q| \leqslant k$. A partir de la deuxième équation d'équilibre et de la condition aux limites on trouve que

$$\tau_{r\varphi} = q\left(\frac{a}{r}\right)^2. \tag{34.5}$$

On tire maintenant de la condition d'écoulement:

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \pm\sqrt{k^2 - q^2\left(\frac{a}{r}\right)^4}. \tag{34.6}$$

Portant cette différence dans l'équation différentielle d'équilibre, intégrant cette dernière et déterminant la constante arbitraire de la

première condition aux limites on obtient :

$$\sigma_r = -p \pm k\left[2\ln\frac{\sqrt{r^2-A}+\sqrt{r^2+A}}{\sqrt{a^2-A}+\sqrt{a^2+A}} - \left(\frac{\sqrt{r^4-A^2}}{r^2} - \frac{\sqrt{a^4-A^2}}{a^2}\right)\right], \tag{34.7}$$

où $A = a^2 \frac{q}{k}$.

Si $q \neq 0$, les lignes de glissement ne seront plus des spirales logarithmiques.

35. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LES CONTRAINTES

Soient σ_n, τ_n les composantes normale et tangentielle de la contrainte sur le contour C et $|\tau_n| \leqslant k$. Conformément à (1.3), (1.4) σ_n, τ_n sont liées aux composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} par les formules

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi, \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{35.1}$$

où φ est l'angle formé par la normale au contour C et l'axe des x (fig. 82). Le milieu se trouvant dans un état plastique, on obtient alors en portant les formules (32.1) dans (35.1) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma - k\sin 2(\theta-\varphi), \\ \tau_n &= k\cos 2(\theta-\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{35.2}$$

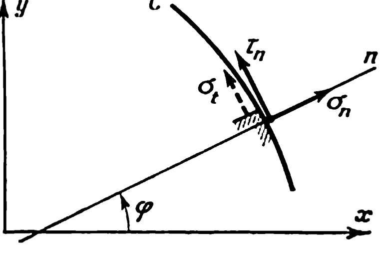


Fig. 82

Si $x = x(s)$, $y = y(s)$ sont les équations du contour et $\sigma_n(s)$, $\tau_n(s)$ les contraintes données, on peut alors considérer $\sigma = \sigma(s)$, $\theta = \theta(s)$ comme connues sur le contour, de même que les paramètres ξ, η. En particulier, si le segment de la frontière est une droite (φ = const) et les contraintes σ_n, τ_n sur cette frontière sont constantes, alors σ, θ et, par conséquent, ξ, η sont constants eux aussi.

Notons que σ, θ (et, par conséquent, les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy}) sont déterminées à partir de (35.2) de façon non univoque :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \varphi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\tau_n}{k} + m\pi, \\ \sigma &= \sigma_n + k\sin 2(\theta-\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{35.3}$$

où arc cos est la valeur principale et m un entier arbitraire. L'existence de deux solutions pour σ, θ, satisfaisant à la condition d'écoulement s'explique par le caractère quadratique de cette dernière.

Pour choisir le signe, il faut des conditions complémentaires qui seront empruntées chaque fois de l'énoncé mécanique du problème lui-même. Le raisonnement suivant nous sera d'une aide sensible. Envisageons la contrainte normale σ_t dans le voisinage du contour C (fig. 82):

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_n.$$

On peut juger parfois du signe de σ_t, ce qui nous permet de choisir correctement la solution.

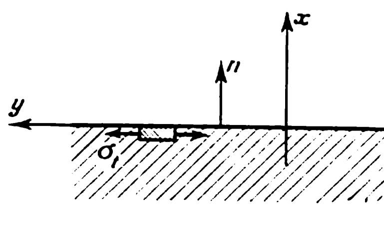


Fig. 83

Dans un cas particulier important où *il n'y a pas de contrainte tangentielle* ($\tau_n = 0$) sur le contour C, les formules (35.3) se simplifient

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \varphi \pm \frac{\pi}{4} + m\pi, \\ \sigma &= \sigma_n \pm k, \end{aligned}\right\} \qquad (35.4)$$

et respectivement $\sigma_t = \sigma_n \pm 2k$.

Voyons l'exemple le plus simple de la *frontière rectiligne libre* $x = 0$ (fig. 83); sur cette frontière $\varphi = 0$, $\sigma_n = 0$, $\tau_n = 0$ et, par conséquent, $2\theta = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $\sigma = \pm k$, $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_t = \pm 2k$, c.-à-d. qu'il peut y avoir au voisinage de la frontière soit une traction en direction des y, soit une compression.

36. PROBLÈMES FONDAMENTAUX AUX LIMITES

Pour envisager les problèmes concrets, il faut construire les solutions des équations hyperboliques obtenues (32.2), satisfaisant à diverses conditions aux limites. Or, en général, on doit pour cela résoudre plusieurs problèmes aux limites. La description concise des problèmes principaux sera donnée dans ce qui suit. On trouvera des renseignements plus détaillés dans les manuels relatifs aux équations de physique mathématique.

1. Problème de Cauchy. Le problème de Cauchy (*problème des valeurs initiales*) est le plus important des problèmes considérés. Soit dans le plan x, y un arc AB à tangente continue (fig. 84), $x = x(s)$, $y = y(s)$, où s est un paramètre quelconque, qui ne coïncide nulle part avec les directions caractéristiques et qui est coupé une fois seulement par chaque caractéristique [1]. Sur l'arc AB on connaît les fonctions $\sigma = \sigma(s)$, $\theta = \theta(s)$ qui sont continues avec les dérivées premières et secondes. On doit construire la solution des

[1] Si cette dernière condition n'est pas vérifiée, le problème de Cauchy, en général, n'a pas de solution.

équations (32.2) qui, sur l'arc AB, prend les valeurs données. La solution recherchée existe et elle est unique dans le domaine triangulaire APB limité par l'arc AB et les lignes de glissement (caractéristiques) α, β qui sont issues de ses extrémités. En particulier, les fonctions $\sigma(x, y)$, $\theta(x, y)$ sont définies également sur les côtés AP, BP. La solution est continue avec les dérivées jusqu'à l'ordre deux y compris.

Une construction analogue peut être exécutée aussi de l'autre côté de l'arc AB.

La solution au point P ne dépend que des données sur l'arc AB. Cet arc est appelé domaine de dépendance pour le point P. *Si l'on change les données en dehors de l'arc AB, la solution ne variera qu'au-delà du triangle ABP.* Par conséquent, à la solution fixée à l'intérieur de ce triangle on peut ajouter en général diverses solutions le long de la ligne de glissement. Autrement dit, les solutions peuvent avoir différentes expressions analytiques dans les domaines voisins.

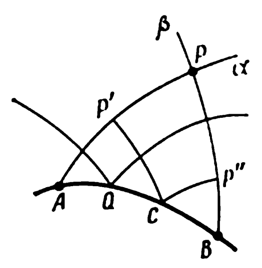


Fig. 84

Ensuite, les valeurs de $\sigma(s)$, $\theta(s)$, fixées en un point quelconque de l'arc Q, n'influent sur la solution qu'en des points situés à l'intérieur de « l'angle caractéristique » qui est formé par les lignes de glissement issues du point Q.

L'existence et l'unicité de la solution susindiquée ont lieu lorsque sont vérifiées les conditions de régularité de l'arc AB et de continuité des données initiales. Si les dérivées des données initiales sont discontinues en un certain point C, les résultats mentionnés ne seront vrais que dans les domaines triangulaires ACP', BCP''. On peut construire aussi la solution pour la partie restante du domaine $CP'PP''$, mais les dérivées de la solution seront discontinues le long des caractéristiques CP', CP''. *La discontinuité des dérivées ne s'étend que le long des caractéristiques et ne peut disparaître le long de celles-ci.*

Arrêtons-nous sur les conséquences les plus simples utilisées largement dans les applications.

Le champ des contraintes à la frontière libre de tout effort n'est défini que par la forme de la frontière.

En effet, la contrainte tangentielle τ_n étant nulle à la frontière, la direction de la normale au contour est l'une des directions principales, et les lignes de glissement s'approchent du contour sous un angle de 45°. Par conséquent, le contour ne se confond nulle part avec la direction caractéristique et nous avons le problème de Cauchy dont la solution est unique.

En particulier, *à la frontière libre rectiligne, il y aura toujours un champ de traction ou de compression uniaxiale uniforme de grandeur 2k,*

parallèle à la ligne de la frontière (fig. 85, *a*). Par exemple, si l'axe des x est parallèle à la frontière AB, dans le domaine ABP $\sigma_x = \pm 2k$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

A la frontière libre circulaire BA (fig. 85, *b*), *le champ de glissement est formé par les spirales logarithmiques et les contraintes sont données par les formules* (34.2) pour $p = 0$.

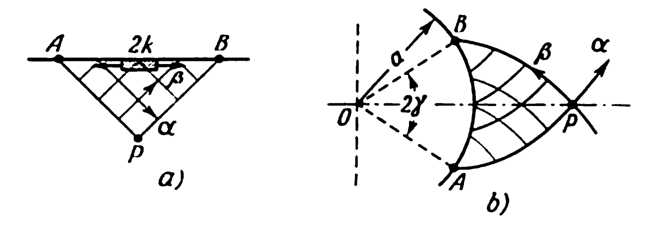


Fig. 85

En vertu de (34.1), les équations des lignes de glissement BP, AP (si au point P on a $\varphi = 0$) ont respectivement la forme:

$$\varphi - \ln \frac{r}{a} = -\ln \frac{r_1}{a}, \quad \varphi + \ln \frac{r}{a} = + \ln \frac{r_1}{a},$$

où r_1 est la distance entre le point P et le centre. Au point B $\varphi = \gamma$, et, par conséquent, $\ln \frac{r_1}{a} = \gamma$ et les contraintes en P seront

$$\sigma_r = 2k\gamma, \quad \sigma_\varphi = 2k(1 + \gamma). \tag{36.1}$$

Notons que si la condition d'écoulement est de la forme $\sigma_\varphi - \sigma_r = -2k$, il faudra mettre dans les formules précédentes le signe moins devant $2k$.

Les résultats cités sont presque totalement conservés si une pression normale uniforme p est appliquée le long de la partie envisagée du contour; la géométrie des lignes de glissement reste la même. A la frontière rectiligne, on aura maintenant un état de contrainte homogène (le choix du système d'axes restant le même):

$$\sigma_y = -p, \quad \sigma_x = \pm 2k - p, \quad \tau_{xy} = 0.$$

A la frontière circulaire, on aura un champ de contraintes à symétrie axiale défini par les formules (34.2). Les données initiales *au-delà de l'arc AB* sont sans influence sur ce champ. Cette solution ne dépend pas non plus de la forme de la frontière *en dehors de l'arc circulaire AB*. Par exemple, si la frontière est constituée par l'arc circulaire AB et le segment rectiligne BC (fig. 86), le champ de glissement au voisinage de AB sera formé par les spirales logarithmiques et il y aura un réseau orthogonal près de BC.

2. Problème caractéristique primaire (*problème de Riemann*). Soient les fonctions σ, θ dont les valeurs sont connues sur les segments des lignes de glissement OA et OB (fig. 87). Etant donné que σ, θ vérifient sur OA, OB les équations différentielles d'équilibre de

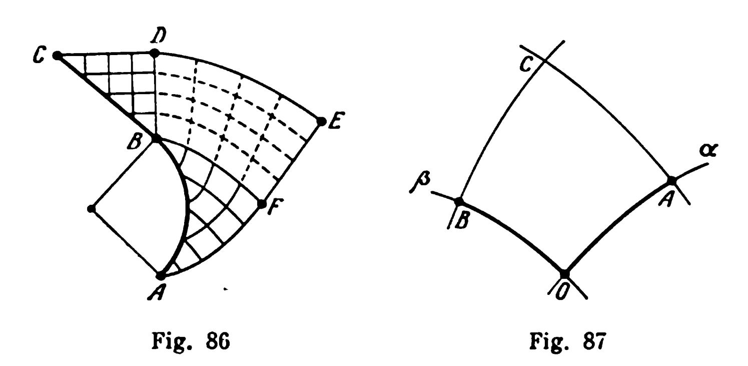


Fig. 86 Fig. 87

l'élément de glissement (31.4), ces valeurs ne peuvent être totalement arbitraires; elles sont liées par les relations:

$$\frac{\sigma}{2k} - \theta = \text{const} = \xi \text{ le long de } OA, \tag{36.2}$$

$$\frac{\sigma}{2k} + \theta = \text{const} = \eta \text{ le long de } OB. \tag{36.3}$$

La solution sera alors déterminée dans le quadrilatère $OACB$. Notons que, sur les segments OA et OB, les fonctions σ, θ deviennent généralement connues à partir des solutions construites dans les domaines voisins, et les relations citées sont donc nécessairement vérifiées. Ainsi, dans l'exemple représenté sur la figure 86, un problème caractéristique primaire est résolu dans le domaine $BDEF$. Cela étant, les valeurs σ, θ sur les caractéristiques BD et BF sont connues à partir de la solution du problème de Cauchy respectivement pour les domaines BCD et ABF.

Le *cas dégénéré du problème caractéristique primaire* est d'une grande importance; dans ce cas le segment de la ligne de glissement OB (ou OA) se réduit à un point O, le rayon de sa courbure diminuant infiniment pour une variation constante de l'angle θ (fig. 88). Toutes les lignes de glissement α convergent en un point O et les contraintes sont discontinues.

La solution est déterminée dans le triangle OAC si l'angle d'ouverture au nœud O et les valeurs de σ, θ sur l'arc OA sont prescrits.

3. Problème mixte. Sur le segment de la ligne de glissement OA (fig. 89), les fonctions σ, θ vérifiant la condition d'équilibre (36.2) sont connues. La courbe non caractéristique OB, le long de laquelle est donné l'angle θ, est adjacente au segment OA. Un tel

problème surgit, par exemple, si OB est une frontière du milieu et il n'y a pas de frottement sur cette frontière. Les lignes de glissement s'approchent alors de la courbe OB en faisant avec celle-ci un angle de $\frac{\pi}{4}$ et donc θ est connue. On suppose que l'angle AOB est aigu (c.-à-d. qu'il se trouve à l'intérieur de l'angle caractéristique).

La solution du problème mixte est déterminée dans le triangle OAB. La construction elle-même est différente en fonction de la

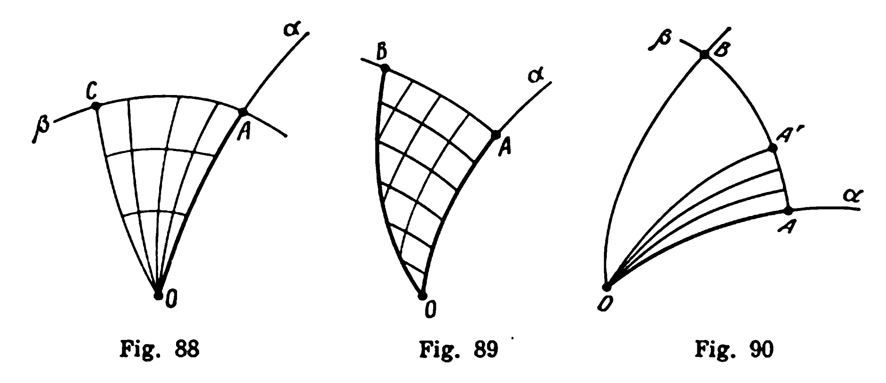


Fig. 88 Fig. 89 Fig. 90

grandeur de l'angle θ qui est défini au point O de la courbe OB. Si cet angle est égal à l'angle θ au point O sur OA, le champ des lignes de glissement a la forme représentée sur la figure 89. En particulier, s'il n'y a pas de frottement sur OB, l'angle au sommet O formé par les courbes OA et OB doit être égal à $\frac{\pi}{4}$.

Au cas où la ligne α issue du point O, lorsqu'on s'approche de cette dernière le long de OB, se trouve à l'intérieur du domaine BOA (fig. 90), ce domaine est divisé en deux parties, à savoir: BOA' et $A'OA$. La première d'entre elles se trouvera dans les conditions du cas précédent si l'on arrive à trouver les valeurs de σ, θ sur la ligne de glissement OA'. Mais ces valeurs peuvent être déterminées en résolvant le problème caractéristique primaire pour le domaine AOA' (dans le cas dégénéré) du fait que l'on connaît l'angle d'ouverture du faisceau de caractéristiques AOA'.

37. METHODES DES SOLUTIONS NUMÉRIQUES

La solution des problèmes aux limites examinés plus haut peut être obtenue par différents procédés. En particulier, pour les équations linéarisées (33.2), les solutions du problème de Cauchy et du problème caractéristique primaire peuvent être représentées sous une forme fermée au moyen de la fonction de Riemann [47]. L'application de ces solutions nécessite des calculs volumineux.

On peut, à l'aide de l'appareil des fonctions dites métacylindriques examiné par L. Agamirziane [85], construire une solution analytique pour divers problèmes aux limites rencontrés dans le problème plan de la théorie de la plasticité. Si les fonctions indiquées sont récapitulées dans des tableaux, cela permettra de réduire sensiblement le volume des calculs.

Cependant, les méthodes plus simples sont des méthodes approchées pour la construction des champs de glissement, qui sont fondées sur le passage aux relations aux différences finies et sur l'application de telles ou autres propriétés des lignes de glissement (notons que, sous sa forme générale, cette méthode fut développée par Massot en 1899, cf. [46]). Des modifications différentes de telles constructions ont été exposées dans les travaux de V. Sokolovski [33], Hill [47], Prager et Hodge [58] et d'autres auteurs.

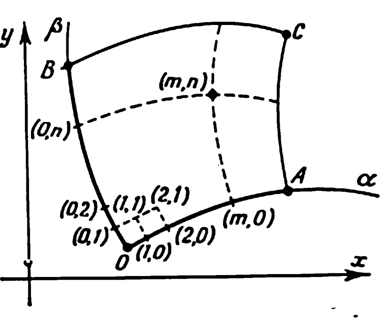


Fig. 91

La description de quelques procédés de solution numériques des problèmes aux limites principaux est donnée ci-dessous.

1. Problème caractéristique primaire. Divisons les segments des lignes de glissement OA, OB (fig. 91) en petites parties par les points

$$(1,\ 0),\quad (2,\ 0),\ \ldots,\ (m,\ 0),\ \ldots,$$
$$(0,\ 1),\quad (0,\ 2),\ \ldots,\ (0,\ n),\ \ldots$$

Nous conviendrons d'appeler les nœuds du réseau et de désigner par $(m,\ n)$ les croisements des lignes de glissement passant par ces points. Les fonctions σ, θ étant connues sur les côtés OA et OB, trouvons d'après le premier théorème de Hencky les valeurs de ces fonctions dans le nœud $(m,\ n)$:

$$\theta_{m,\,n} = \theta_{m,\,0} + \theta_{0,\,n} - \theta_{0,\,0}, \tag{37.1}$$

$$\sigma_{m,\,n} = \sigma_{m,\,0} + \sigma_{0,\,n} - \sigma_{0,\,0}. \tag{37.2}$$

Les coordonnées des points nodaux sont calculées pas à pas. Supposons connus les coordonnées des nœuds $(m - 1,\ n)$, $(m,\ n - 1)$ et l'angle θ dans ces nœuds. La position du point $(m,\ n)$ est déterminée par le croisement des petits arcs; remplaçons ces derniers par des cordes dont la pente est égale à la valeur moyenne des pentes aux points initial et final (1). Remplaçons les équations différen-

(1) On prend souvent la pente de la corde égale à la pente au point initial; cela conduit à des résultats un peu moins bons.

tielles des lignes de glissement

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta$$

par les équations aux différences

$$y_{m,n} - y_{m-1,n} = (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}), \tag{37.3}$$

$$y_{m,n} - y_{m,n-1} = -(x_{m,n} - x_{m,n-1}) \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}) \tag{37.4}$$

et déterminons $x_{m,n}$, $y_{m,n}$ de ces relations. On commence toujours par le point (1.1).

Pour calculer $x_{m,n}$, $y_{m,n}$, on peut obtenir des formules simples à partir des dernières relations. Pour des raisons de commodité, on portera les résultats des calculs dans un tableau (fig. 92). On y notera, dans les cases hachurées, les valeurs connues de x, y; σ, θ aux points choisis des lignes de glissement OA, OB. On calcule ensuite successivement les valeurs de x, y; σ, θ dans les nœuds, et on les porte dans les cases correspondantes du tableau. Traçons ensuite sur le dessin les coordonnées trouvées des nœuds $x_{m,n}$; $y_{m,n}$. On obtient la ligne α en réunissant par une ligne les points correspondant à une ligne du tableau. Les points correspondant à une colonne appartiennent à la ligne β.

β \ α	0	1	2	...	...	...	m	...	...	...
0										
1										
2										
⋮										
⋮										
⋮										
n										
⋮										
⋮										
⋮										
⋮										
⋮										

Fig. 92

Dans le cas dégénéré, on connaît σ, θ sur le segment OA (fig. 93) ainsi que la variation de l'angle θ au sommet O (soit $\widehat{AOC}$). Partageons cet angle en plusieurs petites parties par les sections $\theta_{0,0}$, $\theta_{0,1}$, ..., $\theta_{0,n}$, ...; $\theta_{0,n}$ étant l'angle au sommet O entre les lignes de glissement On et OA. On trouve, d'après la formule (37.1), la valeur de $\theta_{m,n}$ dans le nœud (m, n). La pression σ est discontinue au point O et on ne peut l'évaluer immédiatement conformément à (37.2). Déterminons tout d'abord $\sigma_{1,n}$ aux points $(1, n)$; les valeurs de $\sigma_{1,0}$, $\theta_{1,0}$ étant données pour le point (1, 0), on connaîtra donc le paramètre $\eta_1 = \frac{\sigma_{1,0}}{2k} + \theta_{1,0}$ qui est constant le long de la ligne β passant par (1, 0); alors $\sigma_{1,n} = 2k(\eta_1 - \theta_{1,n})$. Par la suite, on peut utiliser (37.2) en y remplaçant $\sigma_{0,0}$ par les valeurs de $\sigma_{1,n}$. Les coordonnées des points nodaux sont calculées par les formules précédentes.

2. Problème de Cauchy. Divisons l'arc AB en petites parties par les points (0, 0), (1, 1), . . ., (m, m), . . . On trouve les va-

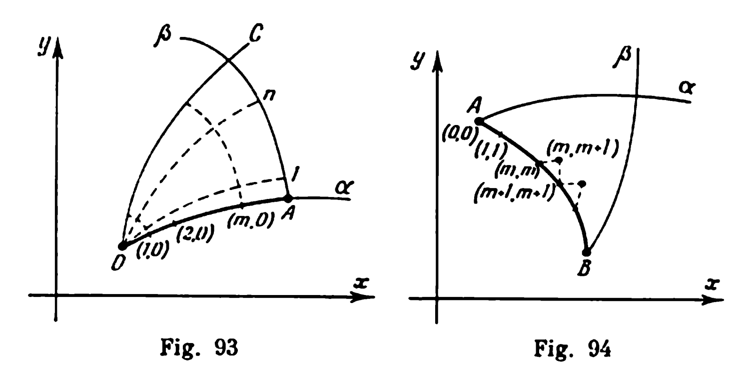


Fig. 93 Fig. 94

leurs de σ, θ dans les nœuds voisins de l'arc (fig. 94) selon les conditions de constance des paramètres ξ, η sur les lignes α, β :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{m,\,m+1} - 2k\theta_{m,\,m+1} &= \sigma_{m,\,m} - 2k\theta_{m,\,m},\\ \sigma_{m,\,m+1} + 2k\theta_{m,\,m+1} &= \sigma_{m+1,\,m+1} + 2k\theta_{m+1,\,m+1}.\end{aligned}\right\}$$

Les coordonnées des nœuds sont déterminées suivant les formules précédentes. Par la suite, le réseau de glissement sera calculé suivant le schéma pour le problème caractéristique primaire.

Les résultats des calculs sont notés dans les cases du tableau carré (fig. 95). Les valeurs connues de x, y ; σ, θ sur l'arc AB sont portées dans les cases hachurées de la diagonale principale. Les valeurs trouvées de x, y ; σ, θ pour les nœuds du réseau remplissent le tableau d'un côté de la diagonale.

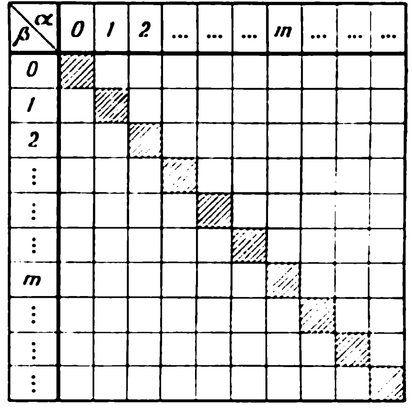


Fig. 95

3. Problème mixte. Considérons le cas général du problème mixte tel qu'il est indiqué sur la figure 90.

Dans le domaine OAA', la solution est construite comme dans le cas dégénéré du problème caractéristique primaire. Passons par la suite au domaine $OA'B$. Divisons OA' en petites parties par les points (1, 0),(2, 0), . . . (fig. 96). Les valeurs de σ, θ sont connues sur OA'. On commence la construction par le point (1, 0) à partir duquel on mène une droite en direction de la ligne β

(c.-à-d. suivant la normale à la ligne α) ; on trouve le point P' sur OB ; la valeur de θ en P' est donnée par hypothèse sur OB (paragraphe 36). Calculons la valeur moyenne de l'angle θ d'après les points (1, 0), P' et suivant cette valeur traçons de nouveau une droite du point (1, 0); trouvons sur OB le point P'', etc., jusqu'à ce que la différence entre les positions successives des points P ne devienne petite. Ceci détermine le point (1, 1). Les points (2, 1), (3, 1), . . . sont calculés sur le modèle du problème caractéristique primaire. En ce qui concerne la définition du point (2, 2), il y a lieu d'appliquer de nouveau la méthode des approximations successives qui vient d'être énoncée, etc.

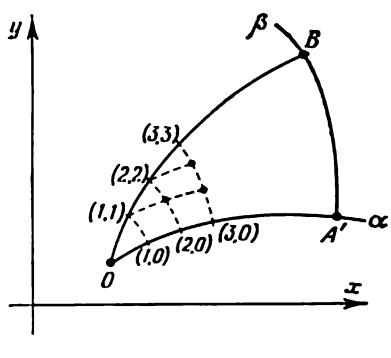


Fig. 96

4. Considérations finales. Si nous avons un réseau des lignes de glissement, alors dans ses nœuds sont connues les valeurs de σ, θ et par conséquent les composantes de la contrainte σ_x, σ_y, τ_{xy}. Si le réseau des lignes de glissement est suffisamment ramifié, on peut définir l'état plastique avec n'importe quelle précision.

Notons que des méthodes graphiques de solution, commodes et illustratives, ont été aussi proposées [6, 56]; l'application de ces méthodes implique l'exécution de dessins de grand format et elle entraîne des erreurs plus grandes.

38. DÉTERMINATION DU CHAMP DES VITESSES

1. Relations générales. Ci-dessus, nous avons examiné en détail le champ des contraintes. Considérons maintenant les équations restantes de la déformation plane (31.10), (31.11) qui contiennent les composantes du vecteur vitesse; tenant compte de la substitution (32.1), on récrira ces équations sous la forme

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\operatorname{tg}2\theta+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0, \qquad (38.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \qquad (38.2)$$

Si les contraintes sont trouvées, on connaît l'angle θ et le problème devient linéaire pour les vitesses. *Ce système d'équations se rapporte au type hyperbolique, et ses caractéristiques se confondent avec les lignes de glissement.* En effet, soient les vitesses continues v_x et v_y dont les valeurs sont données sur une ligne L quelconque. La forme de

ces équations ne changera pas si, comme au paragraphe 32, l'on passe au système de coordonnées local x, y qui est formé par la tangente et la normale à la ligne L. Les vitesses sur L étant données, on peut calculer les dérivées suivant la tangente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Alors, à partir du système (38.1) et (38.2), on peut toujours trouver également les dérivées suivant la normale $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ si $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$, c.-à-d. si L ne se confond pas avec la ligne de glissement. Dans ce dernier cas (comme précédemment, nous désignons par s_α, s_β les coordonnées « caractéristiques » correspondantes et par u, v, les composantes du vecteur vitesse suivant ces directions), les contraintes normales sont égales à la pression moyenne $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$, et la contrainte tangentielle $\tau_{\alpha\beta} = k$. Ce faisant, il résulte du système (38.1), (38.2) que

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial s_\beta} = 0, \qquad (38.3)$$

la dérivée $\frac{\partial u}{\partial s}$ étant indéterminée.

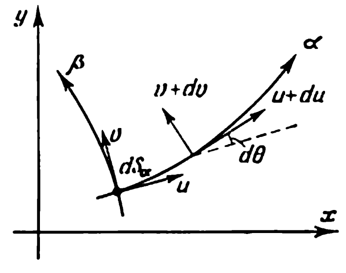


Fig. 97

Ainsi, *les vitesses des allongements relatifs sont nulles le long des lignes de glissement.* De même que les équations (32.4) expriment les conditions d'équilibre de l'élément de glissement, les relations (38.3) caractérisent les particularités de déformation de l'élément de glissement. Présentons ces relations sous une autre forme un peu plus commode.

Considérons un segment infiniment petit ds_α de la ligne α (fig. 97). La vitesse de l'allongement dans la direction de α, après avoir négligé les petites de deuxième ordre, sera égale à $(u + du - v d\theta) - u$. En vertu de (38.3), on doit avoir le long de la ligne α:

$$du - v\, d\theta = 0. \qquad (38.4)$$

De façon analogue, on obtient pour la ligne β:

$$dv + u\, d\theta = 0. \qquad (38.5)$$

Ces relations, trouvées par Geiringer, sont appelées *équations pour les vitesses le long des lignes de glissement.*

2. Condition de positivité de la dissipation. Le champ des vitesses est déterminé par les équations différentielles citées et par les conditions aux limites appropriées. *La dissipation doit être positive dans les zones plastiques* ($\sigma_{ij}\xi_{ij} > 0$). Cette condition du raccord des champs des contraintes et des vitesses, imposant des restrictions au choix des constructions de solution, est vérifiée par les champs trouvés.

3. Champs des vitesses pour les états de contrainte simples. Le champ des vitesses correspondant à l'état de contrainte simple se caractérise par une série de propriétés simples. Par exemple, si dans un domaine quelconque l'état de contrainte est *homogène*, on aura partout θ = const et, par conséquent, on trouve à partir de (38.4) et (38.5):

$$u = u(\beta), \quad v = v(\alpha), \tag{38.6}$$

où $u(\beta)$, $v(\alpha)$ sont des fonctions arbitraires.

Le cas $u = u(\beta)$, $v = 0$ détermine l'écoulement de cisaillement dans la direction α; pour l'autre cas $u = 0$, $v = v(\alpha)$, l'écoulement de cisaillement se développe dans la direction β. Le cas général (38.6) est obtenu par superposition des deux écoulements arbitraires de cisaillement dans les directions mentionnées.

Dans le cas de *champ centré*, l'angle θ est constant le long des droites radiales, par exemple, θ = const le long des lignes α (fig. 76). Alors, le long de la ligne α, u = const, c.-à-d. $u = u(\theta)$. Il découle de (38.4) et (38.5) que

$$\left.\begin{aligned} v &= \varphi(\theta) + \psi(\rho), \\ u &= -\varphi'(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{38.7}$$

où $\varphi(\theta)$, $\psi(\rho)$ sont des fonctions arbitraires (ρ est la distance du centre O, fig. 76; l'accent désigne une dérivée).

Si $\varphi(\theta) = 0$, les formules (38.7) décrivent le mouvement de rotation (l'écoulement de cisaillement avec les lignes de courant sous forme de cercles concentriques).

Dans le cas général de l'état de contrainte simple, θ = const *le long es lignes de glissement droites*; *par conséquent, la composante de la itesse est constante le long de chaque droite.*

Il découle de (38.1) et (38.2) que le *champ des vitesses uniforme* v_x = const, v_y = const est possible dans le domaine plastique, c.-à-d. que le domaine plastique se déplace comme un solide. Ces domaines peuvent être interprétés comme des domaines à déformations plastiques infimes. De tels champs se rencontrent, par exemple, dans le problème de l'enfoncement du poinçon plat (paragraphe 45).

4. Construction numérique du champ des vitesses. Considérons le cas général quand aucune famille des lignes de glissement n'est constituée de droites. Le champ des vitesses ne peut alors être déterminé par des procédés élémentaires. Comme pour le champ des contraintes (paragraphe 37), la méthode la plus simple à appliquer est la méthode des différences finies. Nous envisageons sommairement ici la solution de quelques problèmes aux limites. On ne s'arrête pas sur l'exposé détaillé des procédés de construction du champ des vitesses et l'étude des autres variantes des problèmes aux limites, car ces

procédés ne se distinguent que très peu de ceux qui sont appliqués à la construction du champ des contraintes (paragraphe 37).

Problème caractéristique primaire. Considérons la figure 91. Soient des composantes normales de la vitesse données sur les segments des lignes de glissement OA et OB (v sur OA et u sur OB, les composantes tangentielles étant alors tirées des équations (38.4), (38.5)), ou bien les deux composantes si elles satisfont aux équations (38.4), (38.5).

Des équations (38.4), (38.5), on tire les composantes tangentielles de la forme

$$u = \int v\,d\theta + C_1 \quad \text{le long de la ligne } \alpha,$$

$$v = -\int u\,d\theta + C_2 \quad \text{le long de la ligne } \beta.$$

On trouve les constantes à partir des conditions de continuité en O.

Désignons par $u_{m-1,\,n}$, $v_{m-1,\,n}$, $u_{m,\,n-1}\,v_{m,\,n-1}$ les valeurs des vitesses u et v dans les nœuds du réseau de glissement $(m-1, n)$, $(m, n-1)$. Remplaçant, dans les relations (38.4), (38.5), les accroissements infiniment petits par les accroissements finis, on obtient les formules pour calculer u, v dans le nœud (m, n):

$$\left.\begin{aligned} u_{m,\,n} - u_{m-1,\,n} &= \frac{1}{2}(v_{m,\,n} + v_{m-1,\,n})(\theta_{m,\,n} - \theta_{m-1,\,n}), \\ v_{m,\,n} - v_{m,\,n-1} &= -\frac{1}{2}(u_{m,\,n} + u_{m,\,n-1})(\theta_{m,\,n} - \theta_{m,\,n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (38.8)$$

Afin d'augmenter la précision on prend pour les fonctions u, v la moyenne arithmétique des valeurs u, v aux points voisins. La construction commence par le nœud (1, 1).

Problème de Cauchy. Soient u, v définies sur un certain arc AB (fig. 94) qui n'est pas une ligne de glissement. La construction du champ des vitesses se fera à l'aide des mêmes relations (38.8).

Problème mixte. La composante normale de la vitesse v est donnée le long du segment OA de la ligne α (fig. 90) et la liaison entre les composantes du vecteur vitesse est connue sur la courbe OB:

$$au + v = 0,$$

où a est une constante. Limitons-nous à examiner le champ de glissement correspondant au cas représenté sur la figure 96, où l'angle θ, donné sur OB en O, est égal à l'angle d'inclinaison de la ligne de glissement α en ce même point O. Le réseau des lignes de glissement étant connu (fig. 96), on calcule les valeurs de $u_{1,\,1}$ et $v_{1,\,1}$ dans le nœud (1, 1) selon les formules:

$$\left.\begin{aligned} v_{1,\,1} - v_{1,\,0} &= -\frac{1}{2}(u_{1,\,1} + u_{1,\,0})(\theta_{1,\,1} - \theta_{1,\,0}), \\ au_{1,\,1} - v_{1,\,1} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38.9)$$

Dans les nœuds suivants (2, 1), (3, 1), . . ., les valeurs des vitesses u et v sont définies par les relations (38.8). Pour ce qui est du point (2, 2), il faut de nouveau partir des équations homothétiques à (38.9), etc.

5. La ligne de partage des domaines plastique et rigide est une ligne de glissement ou une enveloppe des lignes de glissement. Supposons qu'un domaine rigide soit en repos, ce que l'on peut toujours obtenir en superposant un champ des vitesses correspondant au déplacement rigide du corps. Quant à la zone plastique, il y a un certain champ non nul.

Supposons avant tout que *les vitesses sont continues sur la ligne de partage* L, alors $u = 0$ et $v = 0$ sur L. Si la frontière envisagée ne présente nulle part de direction caractéristique (c.-à-d. qu'elle ne se confond nulle part avec la ligne de glissement), on a alors le problème de Cauchy pour déterminer les vitesses u et v dans la zone plastique. Les données initiales étant nulles et les équations des vitesses homogènes, les vitesses sont alors nulles également dans la zone plastique, ce qui contredit aux hypothèses initiales. Par contre, si la frontière L se confond avec une ligne de glissement quelconque, la réduction à zéro de u et v sur cette frontière n'implique pas la nullité du champ des vitesses dans la zone plastique.

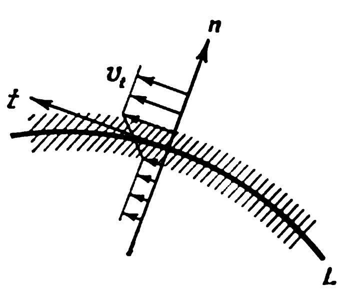


Fig. 98

Admettons maintenant qu'*il n'y ait pas de continuité sur la ligne de partage*; une discontinuité ne peut avoir lieu que dans la composante de la vitesse v_t, tangente à L, car la discontinuité dans la composante normale v_n est liée à l'apparition d'une « fissure ». Par ailleurs, la frontière L peut être considérée comme la position limite d'une couche plastique mince (fig. 98, où n est la normale et t la tangente) dans laquelle la vitesse tangentielle v_t varie rapidement suivant l'épaisseur, tandis que la vitesse normale v_n est quasi constante. Il est évident qu'avec la diminution de l'épaisseur de la couche la vitesse de cisaillement η_{tn} tendra vers l'infini, tandis que les autres composantes de la vitesse de déformation resteront pratiquement invariables. Mais alors des relations de Saint-Venant — von Mises (13.12)

$$\frac{\sigma_n - \sigma}{2k} = \frac{\xi_n}{H}, \quad \ldots, \quad \frac{\tau_{nt}}{k} = \frac{\eta_{nt}}{H},$$

écrites dans les coordonnées t, n, il découle que

$$\sigma_n \to \sigma, \quad \sigma_t \to \sigma, \quad |\tau_{nt}| \to k,$$

puisque l'intensité $H \to |\eta_{nt}| \to \infty$. Ainsi, la frontière L sera une ligne de glissement ou une enveloppe des lignes de glissement. Notons que la ligne de partage sera souvent en même temps une ligne de discontinuité des vitesses (paragraphe 39).

6. Equations de Geiringer. Transformons les équations (38.1), (38.2) par rapport aux nouvelles variables indépendantes qui sont les paramètres caractéristiques ξ, η. Soient

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

à condition que, dans le domaine considéré, le jacobien $\Delta(\xi, \eta) \neq 0$. Il est alors facile, à l'aide de (33.1), d'obtenir le système

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\theta \frac{\partial v_x}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \operatorname{cotg}\theta \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = 0.$$

En passant aux composantes du vecteur vitesse suivant les directions α, β de u et v:

$$v_x = u \cos\theta - v \sin\theta, \quad v_y = v \cos\theta + u \sin\theta,$$

et, après des transformations peu compliquées, on trouve les équations:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{2} v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{2} u = 0. \qquad (38.10)$$

Il en découle que chaque composante de la vitesse satisfait à l'équation des télégraphistes.

39. LIGNES DE DISCONTINUITÉ DES CONTRAINTES ET DES VITESSES

1. Généralités. Dans les paragraphes précédents, il a déjà été question des discontinuités dans les *dérivées* de la contrainte (ou de la vitesse). Ces discontinuités dites *faibles* se propagent le long des lignes de glissement et sont la conséquence des discontinuités dans les dérivées des données initiales. Cela étant, les contraintes (ou les vitesses) elles-mêmes sont continues.

Dans certains cas il est impossible de construire des solutions avec les contraintes ou vitesses continues. Et pourtant, il existe des solutions avec des contraintes (vitesses) discontinues vérifiant les conditions aux limites (ces discontinuités sont appelées *fortes*).

Envisageons quelques exemples simples.

Dans le problème relatif à la flexion d'une poutre (paragraphe 24), la contrainte σ_x dans l'état limite subit un saut de $+\sigma_s$ à $-\sigma_s$ lorsqu'elle passe par le plan neutre. L'existence des lignes de discontinuité le long desquelles la contrainte tangentielle est discontinue (en direction) est caractéristique aussi des problèmes de la torsion plastique pure. Dans les deux cas, les lignes (les surfaces) de discontinuité sont la position limite des domaines élastiques.

Il est naturel que dans le problème considéré de la déformation plane les solutions discontinues soient également possibles, pour-

tant l'importance des solutions discontinues dans le problème plan échappait à l'attention des chercheurs et ce n'est que dans l'ouvrage de Prager (cf. [58]) que cette importance a été soulignée il n'y a pas très longtemps.

L'intérêt des champs de contraintes et de vitesses discontinus tient encore à ce que l'on peut, moyennant ces champs, obtenir des solutions approchées simples sur la base des principes d'extremum, ce qui fera l'objet de l'étude du chapitre VIII.

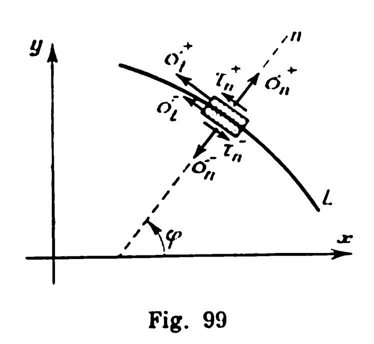


Fig. 99

2. Relations sur la ligne de discontinuité des contraintes. Les relations simples découlant des équations d'équilibre et de la condition de plasticité doivent être vérifiées le long de la ligne de discontinuité. Soit L la ligne de discontinuité (fig. 99); envisageons un élément infiniment petit appartenant à L. Nous considérons que l'épaisseur de cet élément est infiniment petite. Les faces de l'élément sont sollicitées par les contraintes normales σ_n, σ_t et par la contrainte tangentielle τ_n.

Nous distinguons les valeurs des composantes de la contrainte, de part et d'autre de la ligne de discontinuité, par les indices $+$, $-$. En vertu des équations d'équilibre de l'élément (rappelons que l'épaisseur de l'élément tend vers zéro), on a

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n, \quad \tau_n^+ = \tau_n^- = \tau_n.$$

Donc, la discontinuité n'est possible que pour la contrainte normale σ_t. La condition de plasticité (31.8) qui est valable de part et d'autre de L est résolue par rapport à σ_t:

$$\sigma_t = \sigma_n \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}. \tag{39.1}$$

Par hypothèse, L est la ligne de discontinuité et nous prendrons donc respectivement les signes supérieur et inférieur pour les valeurs σ_t^+, σ_t^- dans la formule citée; le saut en σ_t sera égal à $4\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$. Le saut en pression moyenne $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t)$ est égal à $2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$.

La pente θ *des lignes de glissement change par saut sur la ligne de discontinuité.* En effet, on peut représenter les contraintes normale et tangentielle σ_n et τ_n, de part et d'autre de la ligne L, à l'aide des formules (35.2). Les conditions de continuité de σ_n, τ_n s'écriront alors sous la forme suivante:

$$\sigma^+ - k \sin 2(\theta^+ - \varphi) = \sigma^- - k \sin 2(\theta^- - \varphi),$$
$$k \cos 2(\theta^+ - \varphi) = k \cos 2(\theta^- - \varphi),$$

d'où

$$\theta^+ - \varphi = \pm(\theta^- - \varphi) \pm m\pi,$$

où m est un nombre entier. Si, dans le second membre de l'équation, on choisit le signe $+$ devant la parenthèse, la distribution des contraintes, comme il est facile de voir, sera alors continue dans le voisinage de L. Prenons donc le signe —, alors

$$\theta^- = -\theta^+ + 2\varphi + m\pi, \tag{39.2}$$

$$\sigma^- = \sigma^+ - 2k \sin 2(\theta^+ - \varphi). \tag{39.3}$$

Conformément à la première de ces relations, *la ligne de discontinuité L est, en chacun de ses points, la bissectrice de l'angle formé par les lignes de glissement homonymes* qui s'approchent de L de différents côtés, ce que l'on découvre facilement si l'on fait coïncider l'axe des x avec la tangente à la ligne L. L'élément de glissement coupé par la ligne de discontinuité et quatre directions des lignes de glissement α^+, β^+, α^-, β^-, rencontrées en chaque point de L, sont représentés sur la figure 100.

Ainsi, on obtient une image reflétée des lignes de glissement par rapport à la ligne de discontinuité L.

De l'analyse qui précède il découle que *les discontinuités des contraintes sont impossibles sur la ligne de glissement* (puisque $\tau_n = k$ sur la ligne de glissement; les contraintes normales $\sigma_t = \sigma_n$ sont alors continues).

Notons encore une propriété du champ des contraintes dans le voisinage de la ligne de discontinuité L.

La courbure des lignes de glissement subit un saut lorsqu'on passe par la ligne de discontinuité des contraintes [47].

3. Continuité de la vitesse au voisinage de la ligne de discontinuité des contraintes. L'éventualité de l'apparition de fissures étant exclue, il n'y a donc pas de discontinuité dans la composante du vecteur vitesse normale à la ligne L, et le seul problème à examiner est celui de la discontinuité de la composante tangentielle.

Il est aisé de se convaincre que *la composante tangentielle est elle aussi continue sur L.* La ligne de discontinuité, qui est la position limite du domaine élastique, peut être remplacée par une bande mince élastique. Dans cette bande, comme il en résulte des équations d'équilibre de la bande élémentaire, les contraintes σ_n et τ_n sont presque constantes; la contrainte tangentielle σ_t varie très rapidement suivant l'épaisseur de la bande (de σ_t^+ à σ_t^-, fig. 101), ce qui, entre autres, confirme que la bande étroite considérée doit être élastique (puisque la condition d'écoulement ne peut être vérifiée avec σ_n, τ_n presque constantes et la contrainte σ_t rapidement variable).

La vitesse v_n est continue; supposons que la composante v_t soit discontinue. Alors, à la limite, la dérivée $\frac{\partial v_t}{\partial n}$ n'est pas

limitée et il en sera donc de même de la vitesse de cisaillement η_{nt} ; les autres dérivées et, par suite, les autres composantes de la vitesse de déformation seront par contre limitées. Reprenant les raisonnements donnés à la fin du paragraphe 38, on établit que

$$\sigma_n \to \sigma, \quad \sigma_t \to \sigma, \quad |\tau_n| \to k.$$

Cela signifie que les directions n, t sont confondues avec celles des lignes de glissement. Mais alors, pour $\tau_n = k$, il résulte de la

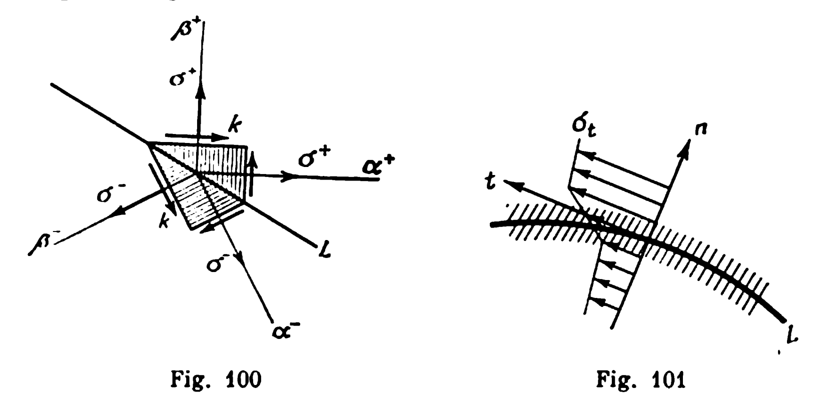


Fig. 100 Fig. 101

formule (39.1) que les contraintes sont continues le long de L, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Ainsi, la *discontinuité de la composante v_t est elle aussi impossible.* Le long de L, on a $v_t^+ = v_t^-$, donc $\xi_t^+ = \xi_t^-$; en vertu des équations de von Mises (13.11) il s'ensuit:

$$\lambda'_+ (\sigma_t^+ - \sigma^+) = \lambda'_- (\sigma_t^- - \sigma^-).$$

En utilisant la formule (31.3) pour la pression moyenne on trouve:

$$\sigma_t^+ - \sigma^+ = \frac{1}{2} (\sigma_t^+ - \sigma_n^+), \quad \sigma_t^- - \sigma^- = \frac{1}{2} (\sigma_t^- - \sigma_n^-).$$

Ces grandeurs se distinguant par leur signe en vertu de (39.1), on a, par conséquent, $\lambda'_+ = -\lambda'_-$. Puisque $\lambda' \geqslant 0$, on doit avoir $\lambda' = 0$ en chaque point de la ligne de discontinuité L, c.-à-d. que le long de L les composantes de la vitesse de déformation sont nulles:

$$\xi_n = 0, \quad \xi_t = 0, \quad \eta_{nt} = 0.$$

Ainsi, *la ligne de discontinuité des contraintes ne s'allonge pas.* Ce résultat apparaît comme naturel si l'on tient compte du fait que la ligne de discontinuité est la trace de la bande élastique ; pour ce qui est des déformations élastiques, nous les négligeons.

4. Lignes de discontinuité de la vitesse. Soient des contraintes continues le long d'une ligne quelconque L, alors que le vecteur vitesse est discontinu. En un point arbitraire de L, traçons un système

de coordonnées n, t en dirigeant l'axe des t suivant la tangente à la ligne L. La discontinuité étant impossible dans la composante normale v_n de la vitesse, on n'envisagera que la discontinuité dans la composante tangentielle v_t. Reprenons les raisonnements donnés à la fin du paragraphe précédent (fig. 98). La ligne de discontinuité L est la position limite d'une couche dans laquelle la vitesse v_n est presque constante et la vitesse v_t varie rapidement suivant l'épaisseur de la couche (de v_t^+ à v_t^-). Avec la diminution de l'épaisseur de la couche, la vitesse du cisaillement η_{nt} croît indéfiniment, tandis que les autres composantes de la vitesse de déformation ne varient que très peu. Cela signifie que la direction de la ligne de discontinuité doit, à la limite, coïncider avec celle de la ligne de glissement. De la sorte, *la ligne de discontinuité du vecteur vitesse est représentée soit par la ligne de glissement, soit par l'enveloppe des lignes de glissement*. Par la suite, on écrira u et v à la place de v_n et v_t (ce sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction des lignes de glissement α, β ; cf. paragraphe 38). *La vitesse u peut être discontinue sur la ligne α et la vitesse v sur la ligne* β. A partir de (38.4) et (38.5) on obtient :

$$u = \int v\, d\theta + \text{const} \quad \text{le long de la ligne } \alpha,$$

$$v = -\int u\, d\theta + \text{const} \quad \text{le long de la ligne } \beta.$$

v étant continue sur la ligne α et u sur la ligne β, on s'aperçoit aisément que *le saut de u (ou de v) est permanent le long de la ligne de discontinuité α (ou β)*.

Le long de la ligne de discontinuité, la valeur de la contrainte tangentielle est égale à k. Lorsqu'il passe à travers une telle ligne, l'élément subit un cisaillement fini *dans le sens de l'action des contraintes tangentielles* et son mouvement change de direction. C'est pourquoi le saut de la vitesse u, par exemple, et la direction de la contrainte tangentielle τ sont liés par la condition de positivité de la dissipation :

$$\tau\ (u^+ - u^-) > 0.$$

Si le saut $[u] > 0$, alors $\tau = +k$; si $[u] < 0$, alors $\tau = -k$.

5. Pour conclure, nous notons que les problèmes de la théorie générale des discontinuités dans le milieu plastique sont traités dans les ouvrages de Thomas [61] et D. Ivlev [8].

40. NON-UNICITÉ DU CHAMP DES VITESSES. CRITÈRE DU CHOIX. SOLUTION COMPLÈTE

La construction du champ de glissement implique la distinction de domaines plastiques et rigides. Les contraintes n'étant pas déterminées dans les zones rigides, cette distinction porte, dans

une certaine mesure, un caractère arbitraire. En rapport avec cette circonstance se trouve la *non-unicité des champs des vitesses et des contraintes* (¹), caractéristique du schéma du corps rigide-plastique. Pour illustrer cette thèse, nous présenterons un exemple simple.

1. Traction d'une plaque munie d'une ouverture. Envisageons le problème de la traction d'une plaque à ouverture circulaire suffisamment grande (²) (fig. 102, *a*).

Le contour circulaire n'étant pas chargé, un champ à symétrie axiale des spirales logarithmiques peut lui être adjacent (paragraphe

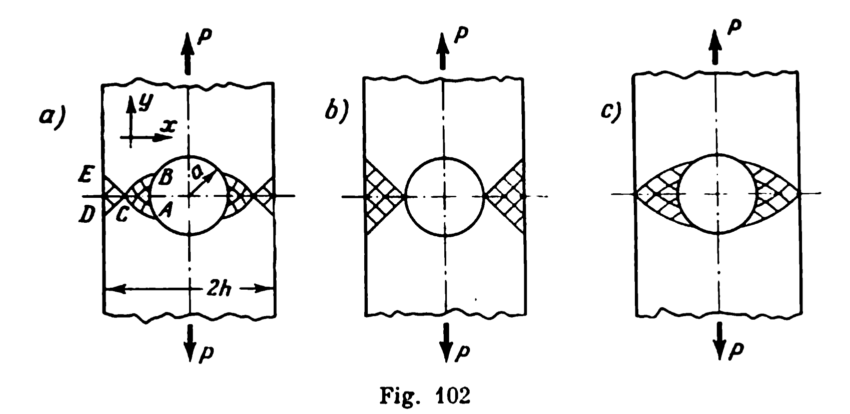


Fig. 102

34). D'autre part, un champ de traction uniaxial uniforme peut être contigu aux frontières rectilignes libres de la plaque (paragraphe 36). Supposons que ces champs ont un point de contact C (fig. 102, *a*). Les contraintes, dans le domaine ABC, sont définies par les formules déduites dans le paragraphe 34:

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2k. \tag{40.1}$$

Dans les coordonnées cartésiennes x, y les contraintes dans le domaine CDE ont la forme suivante:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 2k. \tag{40.2}$$

La charge limite est égale à

$$P_* = 2 \int_a^{r_c} \sigma_\varphi \, dr + 2 \int_{r_c}^{h} \sigma_y \, dx.$$

(¹) Notons que la charge limite est unique (cf. paragraphe 65).

(²) Cette condition garantit l'apparition d'une déformation plastique dans les strictions affaiblies.

En portant ici les valeurs de σ_φ, σ_y, on obtient:

$$P_* = 4k(h-a) + 4k \int_a^{r_c} \ln \frac{r}{a}\, dr.$$

Le deuxième terme se calcule aisément, mais cela n'est pas nécessaire pour l'instant. Notons seulement que le terme intégral est non négatif et qu'il est une fonction croissante monotone r_c.

Considérons maintenant le champ de vitesse. Dans l'état limite, les parties rigides du corps se déplacent avec une vitesse V respectivement vers le haut et vers le bas. Les composantes normales de la vitesse sont continues sur les frontières BC, AC; CD, CE et se calculent aisément du fait que ces frontières sont connues. Les composantes tangentielles de la vitesse sont discontinues le long des lignes de partage indiquées. Dans les domaines plastiques ABC, CDE, les champs des vitesses sont déterminés de façon unique par solution des problèmes caractéristiques primaires. Ainsi, les champs des contraintes et des vitesses sont adaptés (on peut montrer que la dissipation est positive en tout point du champ).

Donc, on a autant de solutions que l'on veut en fonction du choix du point arbitraire C; à chaque solution correspond une certaine charge limite. La charge $P_* = 4k(h-a)$ (fig. 102, *b*) est minimale pour $r_c = a$, elle est maximale pour $r_c = h$ (fig. 102, *c*).

2. Critère du choix. Naturellement, la question se pose de savoir quelle est la solution préférable. On peut y répondre en se basant sur les théorèmes des propriétés d'extremum de la charge limite, qui seront examinés au paragraphe 65. Anticipant quelque peu, formulons sans le démontrer le critère du choix découlant de ces théorèmes.

La solution, obtenue dans le présent paragraphe, détermine dans l'ensemble du corps (aussi bien dans la zone plastique que dans celle rigide) le champ des vitesses qui s'accorde avec les conditions aux limites. Le champ de ce genre est *cinématiquement admissible.* Par la suite (paragraphe 65), on démontrera que *tout champ de vitesse cinématiquement admissible conduit à la frontière supérieure de la charge limite.*

Donc, *la solution la plus convenable correspond à la valeur la plus basse de la charge.* Nous conviendrons d'appeler ce principe le *critère du choix.*

Admettons maintenant qu'un champ des contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} est construit *dans l'ensemble du corps* (c.-à-d. dans les zones plastiques aussi bien que dans les zones rigides). Ce champ

1) satisfait aux équations différentielles de l'équilibre;

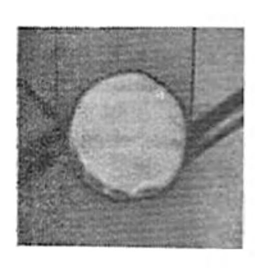
2) satisfait aux conditions aux limites données pour les contraintes à une certaine valeur du paramètre de la charge;

3) est à l'intérieur ou sur le cercle d'écoulement, autrement dit, on a partout:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leqslant 4k^2.$$

Un tel champ des contraintes est nommé *champ plastique statiquement admissible*.

Conformément au deuxième théorème (cf. paragraphe 65), *tout champ des contraintes plastique statiquement admissible conduit à la frontière inférieure de la charge limite*.



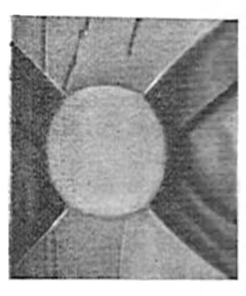


Fig. 103

La solution du problème obtenue ci-dessus ne donne pas un tel champ, car l'état de contrainte est inconnu dans les zones rigides. Conformément au critère du choix, il convient de s'arrêter sur la solution représentée sur la figure 102, *b*. Cette solution correspond à la charge minimale

$$P_* = 4k\,(h - a) \qquad (40.3)$$

et elle se confirme bien par des observations. La figure 103 représente les photos [76] des lignes de glissement au stade initial et à un stade postérieur de l'écoulement plastique. Les zones plastiques deviennent observables après avoir fait subir un traitement approprié (polissage, décapage) à des éprouvettes d'acier déformées.

R e m a r q u e. Le critère du choix n'est pas toujours suffisant pour estimer la construction du champ de glissement. Il peut y avoir des cas où des champs de glissement différents conduisent à la même charge limite. Une telle situation se produit, par exemple, lorsque l'on s'attache à la solution du problème sur la pression d'un poinçon plat (cf. paragraphe 45). Dans ces cas, on fera appel à des hypothèses mécaniques complémentaires.

3. Solution complète. Dans l'exemple considéré, on construit aisément le champ des contraintes plastique convenable, qui est statiquement admissible; il est montré sur la figure 104. Dans la bande hachurée de cette figure, les contraintes sont nulles, tandis que dans les bandes latérales

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 2k. \qquad (40.4)$$

Il est évident que les conditions aux limites sont vérifiées sur le contour de l'ouverture circulaire et sur les bords latéraux. La charge limite correspondante est évidemment égale à la valeur pré-

cédente (40.3). La valeur ainsi obtenue de la charge limite sera exacte puisque les bornes supérieure et inférieure de cette dernière se confondent.

Dans l'exemple examiné, le champ des contraintes plastique statiquement admissible convenable se construit de manière élémentaire bien qu'en général la construction d'un tel champ se heurte à des difficultés notoires.

Nous nous arrêtons sur encore une remarque. Supposons qu'une solution cinématiquement admissible est construite (par exemple, la solution représentée sur la figure 102, *b*). Si l'on arrivait à étendre l'état de contrainte des zones plastiques aux zones rigides de sorte que la condition d'écoulement ne soit nulle part dépassée, le champ des contraintes, édifié pour l'ensemble du corps, serait alors un état plastique statiquement admissible. Il est évident que les bornes supérieure et inférieure de la charge limite se confondront par la même occasion. Les solutions de ce genre sont appelées *complètes*, étant donné qu'elles conduisent à la valeur précise de la charge limite.

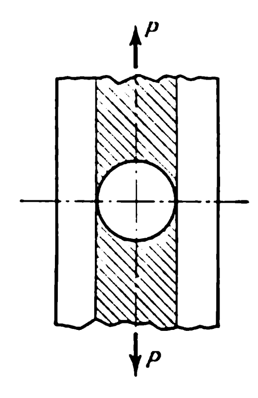


Fig. 104

La solution du problème, offerte dans ce paragraphe (fig. 102, *b*), est en conséquence complète ; elle est aisément étendue à l'ensemble du corps, comme cela est montré sur la figure 104.

3. Problèmes relatifs à la recherche des charges limites. L'importance des charges limites pour l'établissement d'un coefficient de sécurité réel à été maintes fois soulignée précédemment.

Dans les corps élasto-plastiques, les déformations se développent en général progressivement avec la croissance de la charge. Les domaines élastiques freinent au début la déformation du corps, mais, au fur et à mesure qu'ils diminuent, leur résistance faiblit jusqu'à ce que ne s'établisse un écoulement plastique libre répondant à l'état limite. On a déjà montré, sur la base de plusieurs exemples, que les charges proches des valeurs limites pouvaient être obtenues pour des déformations relativement petites. Par ailleurs, en règle générale, les déformations plastiques se localisent et grandissent rapidement, tandis que les déformations élastiques varient peu, et on peut donc les négliger. Cela permet d'appliquer le schéma du corps rigide-plastique au calcul des charges limites. Les conditions auxquelles doivent satisfaire les solutions obtenues selon le schéma du corps rigide-plastique ont été discutées au paragraphe 23. En particulier, il est nécessaire que la condition d'écoulement ne soit pas dépassée dans les zones rigides. Comme nous l'avons déjà remarqué, cela ne peut être vérifié, mais la construction d'un champ plastique

statiquement admissible pour l'ensemble du corps permet d'obtenir l'estimation de la charge limite par défaut.

On exigera d'autre part que *la dissipation dans le champ de glissement soit partout positive.* Cette condition de raccord des champs des contraintes et des vitesses peut être vérifiée bien que cela ne soit pas toujours facile.

Le moment où la charge atteint sa valeur limite est marqué par un mouvement instantané correspondant au passage du corps de l'état rigide au « comportement plastique ». Il est évident que l'on peut, en l'occurrence, négliger toutes les variations de la forme du corps ; au mouvement instantané correspond la combinaison donnée (« instantanée ») des charges.

Pour le corps réel élasto-plastique, la combinaison finie des charges peut être obtenue par plusieurs voies, et la question qui se pose est de savoir la dépendance qui existe entre l'état limite et le trajet de charge. Par la suite, nous supposons que *l'état limite ne dépend pas du trajet de charge.* En faveur de cette supposition on peut donner des résultats expérimentaux qui confirment bien les solutions obtenues selon le schéma du corps rigide-plastique. Etabli précédemment au paragraphe 15, le fait que les contraintes tendent asymptotiquement (lorsque la déformation évolue dans une direction déterminée) vers les valeurs indépendantes de la voie de déformation présente également une certaine importance. De manière générale, les déformations se développent rapidement dans la direction de l'action des charges extérieures données lorsque l'état du corps s'approche de sa limite ; on peut supposer qu'il s'établit alors un état de contrainte pratiquement indépendant du trajet de charge.

Des études devront être entreprises pour procéder à l'estimation complète de l'hypothèse avancée.

41. TRACTION D'UNE BANDE AFFAIBLIE PAR DES FENTES

Envisageons le problème de la traction d'une bande affaiblie par des fentes symétriques profondes de forme variée. On suppose que la bande est d'une longueur suffisante, de sorte que la nature de l'encastrement de ses extrémités ne puisse exercer une influence sur l'écoulement plastique dans la section affaiblie. Comme nous le verrons par la suite, la configuration des côtés de la bande est sans importance lorsque les fentes sont profondes.

1. Bande à fentes parfaites (infiniment minces). La traction d'une bande à fentes parfaites (fig. 105) est un des problèmes les plus simples de ce type. Dans l'état limite, la bande est tendue dans la direction des y avec une vitesse V, de part et d'autre de la section moyenne. Le champ de glissement, représenté sur la figure 105, se compose de quatre domaines équivalents. Le long de la frontière de la fente

OA, exempte de contraintes, nous aurons dans $\triangle\, OAB$ une compression (ou traction) uniforme simple de $\pm 2k$; nous admettons que nous avons affaire à une traction dans $\triangle\, OAB$ (voir ci-après en ce qui concerne un autre choix éventuel). On adjoint tout d'abord au domaine OAB le champ centré OBC et ensuite le domaine de l'état de contrainte homogène OCD qui est également triangulaire. La frontière du domaine plastique est la ligne β $DCBA$; on a $\eta =$ $=$ const pour l'ensemble du domaine. Mais dans $\triangle\, OAB$ $\sigma = k$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et $\eta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$; dans $\triangle\, ODC$ σ est inconnue, $\theta = -\frac{3}{4}\pi$ et $\eta = \frac{\sigma}{2k} - \frac{3}{4}\pi$; comparant les valeurs de η, on trouve la pression moyenne dans $\triangle\, ODC$ $\sigma = k(1+\pi)$. Conformément aux formules principales (32.1), les composantes de la contrainte dans $\triangle\, ODC$ seront

$$\sigma_x = k\pi, \qquad \sigma_y = k(2+\pi),$$

donc, la charge limite est

$$\frac{P_*}{P_*^0} = 1 + \frac{\pi}{2}, \qquad (41.1)$$

où $P_*^0 = 4\,kh$ est l'effort de traction limite pour une bande lisse de largeur $2h$.

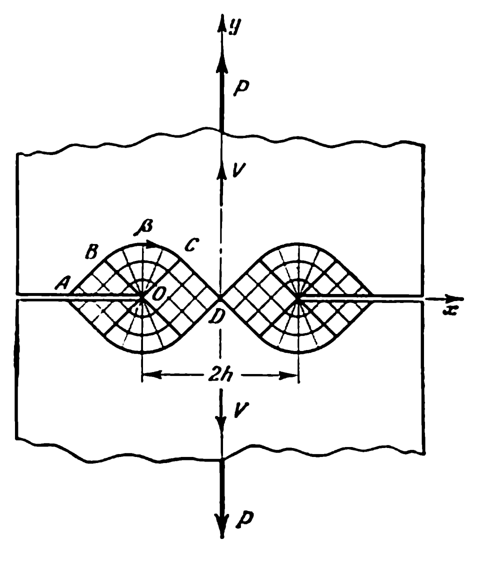


Fig. 105

Revenons maintenant à la définition des vitesses. Par raison de symétrie, la vitesse normale à OD est nulle; sur la frontière CD, la composante normale de la vitesse étant continue, elle sera donc constante le long de CD et égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Puisque dans $\triangle\, ODC$ $u =$ $= u(\beta)$, $v = v(\alpha)$ (cf. paragraphe 38), alors $u = -\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Projetant sur l'axe vertical la vitesse des particules se déplaçant sur OD, on a $\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} = 0$, par conséquent, $v =$ const $= \frac{1}{\sqrt{2}}V$. Ainsi, à la charge limite, $\triangle\, ODC$ commence à se mouvoir comme un solide avec une vitesse V dans la direction OD.

Dans le domaine OBC, u est constant le long de chacune des droites α; la composante normale de la vitesse sur la frontière BC étant continue, on aura alors $u = V \sin\theta$ sur BC et partout dans le domaine considéré. Intégrant maintenant la relation (38.5) $dv +$

$+ V \sin\theta\, d\theta = 0$ le long des lignes β, on obtient $v = V\cos\theta +$ $+$ const, mais le long de OC $\theta = -\frac{3}{4}\pi$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}V$, c'est pourquoi $v = V(\cos\theta + \sqrt{2})$. Enfin, $\triangle\, OAB$ se déplace comme un solide à des vitesses $v_x = V$, $v_y = 2V$. La composante tangentielle de la vitesse devient discontinue le long de la ligne $ABCD$.

La construction envisagée ne peut être réalisée pour les bandes aux fentes peu profondes.

Il est facile de voir que la charge $P_*^0 = 4kh$ est la limite inférieure. En effet, si l'on suppose qu'il y a une traction uniaxiale ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = 2k$) dans la partie médiane d'une bande de largeur $2h$ et que les contraintes sont nulles dans les zones latérales $|x| > h$, on obtient le champ des contraintes plastique statiquement admissible auquel correspond la charge P_*^0.

Pour conclure, notons que le choix de la solution $-2k$ dans le domaine OAB correspond, comme il est maintenant facile de le prouver, à la compression d'une bande munie de fentes.

2. Bande à fentes angulaires (fig. 106). Dans ce cas, la solution sera élaborée de façon analogue à celle du problème que nous venons d'examiner. Sans nous arrêter sur les calculs élémentaires, donnons la valeur de la charge limite

$$\frac{P_*}{P_*^0} = 1 + \frac{\pi}{2} - \gamma. \tag{41.2}$$

3. Bande à fentes à base circulaire (fig. 107). La construction du champ de glissement dépend ici du rapport de la longueur de la striction $2h$ au rayon de l'arrondi a. Lorsque $\frac{h}{a} \leqslant 3{,}81$, le champ de glissement n'adhère qu'à la base circulaire dont la forme détermine entièrement ce champ qui est constitué par des spirales logarithmiques (paragraphe 36). L'angle γ est lié à la distance h par la relation

$$\gamma = \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right).$$

La distribution de la contrainte σ_y suivant la section AB est donnée par la formule

$$\sigma_\varphi = 2k\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right), \tag{41.3}$$

où r est la distance du centre O. La charge limite est déterminée par la formule

$$\frac{P_*}{P_*^0} = \left(1 + \frac{a}{h}\right)\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right). \tag{41.4}$$

Etant donné que $\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$, cette solution n'est valable que pour $\frac{h}{2} \leqslant$ $\leqslant e^{\frac{\pi}{2}} - 1 = 3{,}81$.

Le champ des vitesses est défini à partir de la solution du problème caractéristique pour le domaine $CC'B$ suivant les composantes normales de la vitesse connues qui sont continues lorsque l'on passe par BC.

La construction est un peu plus compliquée pour des valeurs de $\frac{h}{a}$ plus importantes. Le champ logarithmique y est borné par la valeur de $\gamma = \frac{\pi}{2}$, le segment AB (fig. 108) étant alors égal à $3{,}81a$.

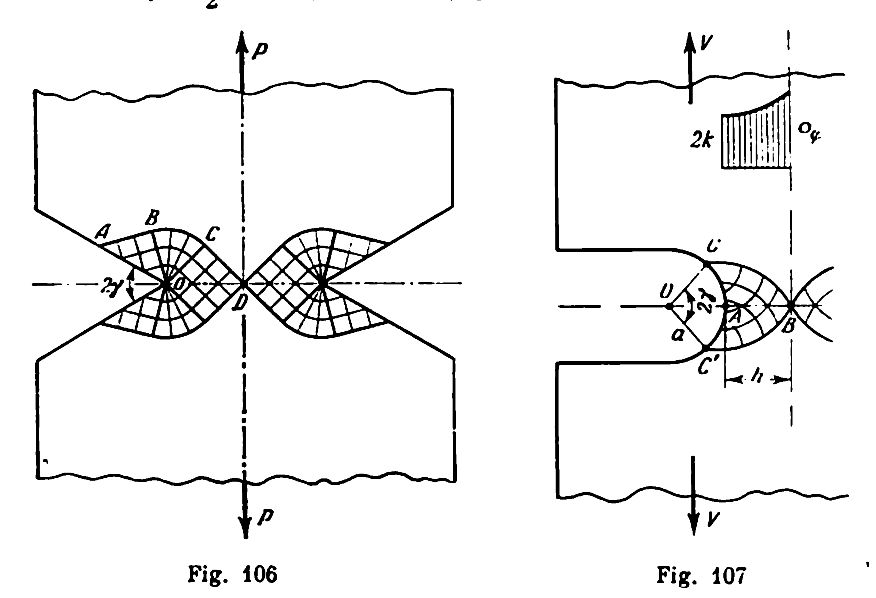


Fig. 106 Fig. 107

A droite de ce domaine, on a le triangle de l'état de contrainte homogène BDE auquel confine le quadrilatère $BEFC$. Dans ce dernier, η = const et les lignes de glissement α sont des segments de droites de valeur égale, perpendiculaires à BC; les lignes β sont parallèles à BC. Ce domaine est relié, le long de FC, au triangle de l'état de contrainte homogène CFG qui est égal à $\triangle\ BDE$. Le long de AB, la distribution des contraintes est donnée par la formule (41.3). Dans $\triangle\ BDE$, on a $\sigma_y = 2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$. Il est maintenant aisé de trouver la charge limite:

$$\frac{P_*}{P_*^0} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{h}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - \frac{\pi}{2}\right). \tag{41.5}$$

Les vitesses se répartissent comme suit. On trouve, tout comme avant, que $\triangle\ BDE$ se déplace à droite comme un solide animé de la vitesse V. Les vitesses u et v sont alors constantes le long de BE.

et u et v sont donc constantes le long de chaque ligne α dans le quadrilatère $BECF$ et sont compatibles avec le mouvement de $\triangle\ FCG$ en tant que solide; les calculs sont tout à fait analogues à ceux exécutés dans la division 1.

4. Autres formes de fentes. Il est facile d'envisager de la sorte encore quelques autres formes affaiblies (fente angulaire à base circulaire, fente rectangulaire, fente angulaire à base obtuse, etc.). On peut étudier la distribution des contraintes pour des affaiblissements de forme plus complexe par solution numérique des champs de glissement. Pour les fentes peu profondes, les solutions énoncées ne sont pas valables. Le minimum de largeur de la bande est déterminé par la possibilité de construire un champ de glissement (par

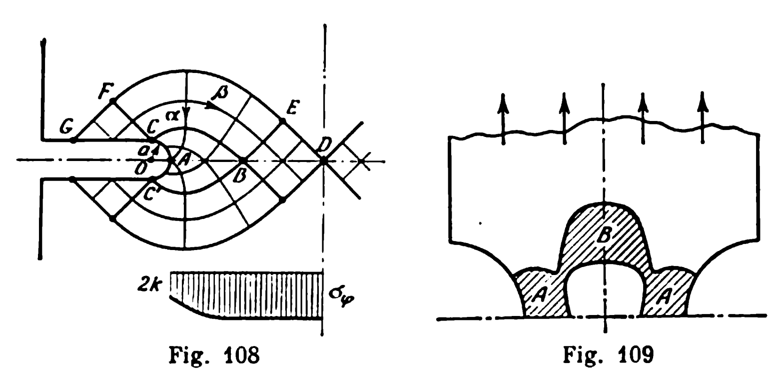


Fig. 108 Fig. 109

exemple, par la distance AD, fig. 108). Cependant, la bande doit être évidemment bien plus large. Les solutions des problèmes élasto-plastiques par méthodes d'intégration numérique et les résultats expérimentaux montrent que, avec l'accroissement de la charge dans le cas des fentes peu profondes, les zones plastiques se fraient un passage vers l'axe de la bande, non pas par la section affaiblie mais en amont et en aval de celle-ci.

Sur la figure 109, le domaine plastique est montré hachuré dans une bande tendue, affaiblie par les fentes peu profondes semi-circulaires. Au début, les domaines A sont engendrés pour croître ensuite avec l'augmentation de la force; un nouveau domaine plastique B apparaît sur l'axe de la bande lorsque la charge s'approche de la limite. Ce domaine croît rapidement et se confond avec les domaines A lorsque l'on obtient l'état limite représenté sur la figure 109.

42. FLEXION D'UNE BANDE AFFAIBLIE PAR DES FENTES

Considérons, à la suite de A. Green [150], le problème relatif à la flexion pure d'une bande (fig. 110) affaiblie par des fentes de forme différente. Pour élaborer les solutions énoncées plus bas, on suppose

que le domaine plastique englobe la section la plus affaiblie. Ceci est vrai pour des rainures suffisamment profondes; si celles-ci ne sont pas profondes, les domaines plastiques peuvent, avec l'accroissement de la charge, se tracer un chemin vers l'axe de la plaque, non pas dans la section la plus faible, comme cela pourrait sembler

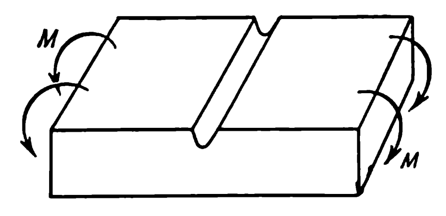


Fig. 110

au premier abord, mais un peu à l'écart de cette section. Les résultats expérimentaux et certaines solutions des problèmes élastoplastiques trouvées moyennant des méthodes numériques témoignent d'une telle éventualité.

1. Rainure profonde unilatérale à base circulaire. Le caractère de la rainure est montré sur la figure 111 ; comme nous le verrons par la suite, le moyen avec lequel on pourrait continuer l'arc circulaire (c.-à-d. la configuration du segment DB) n'a pas d'importance. Un état de contrainte homogène, à savoir une contrainte de compression $-2k$, parallèle à la base, a lieu dans $\triangle\, AAC$ le long de la face inférieure, exempte de contraintes. L'arc circulaire BB (de rayon a) étant lui aussi libre de contraintes, les conditions aux limites sont par conséquent indépendantes de l'angle polaire et, au voisinage de l'arc, il y aura un champ de glissement à symétrie axiale (paragraphe 36), avec

$$\sigma_r = 2k \ln\frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = 2k\left(1+\ln\frac{r}{a}\right), \qquad (42.1)$$

où r est le rayon vecteur issu du centre O; le signe est choisi de manière que σ_φ soit une contrainte de traction.

Dans l'état limite, les domaines AAC et BBC ont un point de contact C dont la position est déterminée par la condition de nullité du vecteur contrainte principal suivant la section OO':

$$\int_a^{a+h} \sigma_\varphi\, dr = 0. \qquad (42.2)$$

En y portant la contrainte

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} 2k\left(1+\ln\frac{r}{a}\right) & \text{pour } a \leqslant r < a+h_1, \\ -2k & \text{pour } a+h_1 < r \leqslant a+h, \end{cases}$$

on obtient l'équation

$$\rho_1 (1 + \ln \rho_1) = \rho,$$

où

$$\rho_1 = 1 + \frac{h_1}{a}, \quad \rho = 1 + \frac{h}{a}.$$

La distribution des contraintes dans la section OO' est montrée sur la figure 111 ; la contrainte σ_φ est discontinue en C.

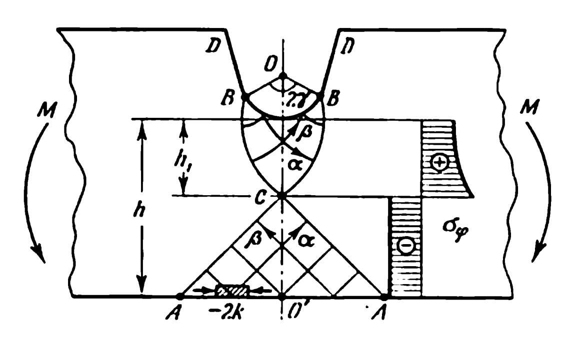


Fig. 111

Calculant le moment limite M_* (rapporté à l'unité de largeur de la plaque) d'après la condition d'équilibre

$$M_* = -\int_a^{a+h} \sigma_\varphi r \, dr, \tag{42.3}$$

on trouve:

$$\frac{M_*}{M_*^0} = -[(\rho + \rho_1)^2 + (1 - 2\rho)^2 - 7\rho^2 + 8\rho_1] (\rho - 1)^2,$$

où $M_*^0 = \frac{kh^2}{2}$ est le moment fléchissant limite pour une plaque ininterrompue de hauteur h. Cette dépendance est montrée en pointillé sur la figure 112.

Notons que *la grandeur M_*^0 est la borne inférieure de la charge limite*. En effet, le moment M_*^0 correspond à la solution élémentaire du problème de la flexion (cf. paragraphe 24) d'une plaque ininterrompue de hauteur h. Complétons cette solution avec le champ des contraintes nul qui se trouve dans un domaine situé en amont de la plaque en question. Il est évident que, de ce fait, nous obtiendrons *dans l'ensemble du corps* un état de contrainte plastique statiquement admissible. Ceci, certes, ne permet en aucun cas d'af-

firmer que la solution montrée sur la figure 111 est complète (car cette solution *n'est pas étendue* à l'ensemble du corps).

Les domaines élastiques (que nous considérons comme rigides) existant au voisinage de la zone affaiblie freinent le développement

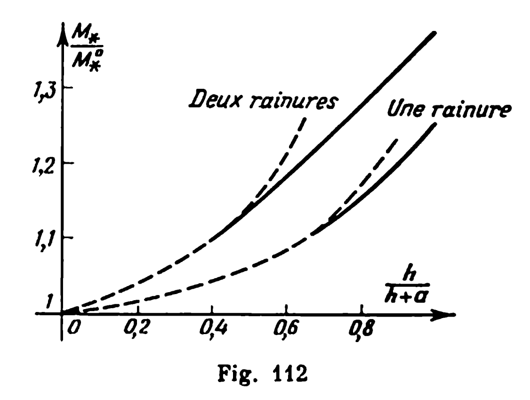


Fig. 112

des déformations plastiques et augmentent la charge limite par comparaison avec la plaque ininterrompue de hauteur h. La relation $\frac{M_*}{M_*^0}$ est parfois appelée *facteur d'amplification.*

Les zones rigides pivotent autour du point C et, ce faisant, deviennent connues les composantes normales de la vitesse le long des lignes de glissement BC, CA. Les champs des vitesses au sein des domaines plastiques AAC et BBC sont définis par la solution des problèmes caractéristiques.

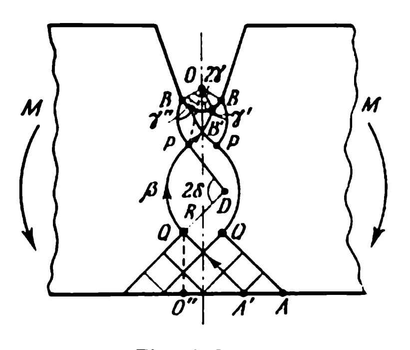


Fig. 113

Considérons maintenant une autre construction du champ de glissement, qui est montrée sur la figure 113. Comme précédemment, à la face inférieure de la plaque confine le domaine de la compression uniforme — $2k$. La solution est décrite également par les formules (42.1) au voisinage de la frontière circulaire. Cependant, ces domaines ont une autre configuration : ils sont moins bien développés, contiennent des angles rentrants et sont réunis par deux arcs circulaires qui constituent les *lignes de glissement isolées* PQ. A l'intérieur de $PPQQ$, le matériau se trouve dans l'état rigide, comme d'ailleurs au-delà de la ligne $BPQA$. Dans l'état limite, les parties rigides extérieures tournent entièrement, par exemple, la partie gauche

pivote par rapport au centre de l'arc D. Le matériau est immobile à l'intérieur du noyau $PPQQ$ qui remplit en quelque sorte le rôle de tourillon autour duquel la rotation instantanée se fait suivant les lignes de glissement PQ, qui constituent des minces couches de « lubrifiant plastique ». La ligne $B'PQA'$ est une ligne de glissement à tangente continue, qui se compose du segment de droite $A'Q$, de l'arc circulaire QP et de la portion de la spirale logarithmique $B'P$. Désignons par γ'' l'angle BOP, par 2δ l'angle d'ouverture de l'arc PQ, par R son rayon et par 2γ l'angle BOB. La pression moyenne en P sera égale à $\sigma = 2k\left(\gamma'' + \frac{1}{2}\right)$ (cf. paragraphe 36). Les valeurs du paramètre η en P et Q seront respectivement

$$\eta_P = \frac{1}{2} + \gamma'' + \frac{\pi}{4} - 2\delta, \quad \eta_Q = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Le long de la ligne de glissement β $A'QPB'$ on a $\eta = \text{const}$ et par conséquent $\eta_P = \eta_Q$, d'où

$$\gamma'' = 2\delta - 1.$$

Ensuite, en B' on a $\sigma = k$, $\theta = \gamma' - \frac{\pi}{4}$ et d'après la condition $\eta = \text{const} = \eta_{B'} = \eta_Q$ on obtient:

$$\gamma' = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Enfin, il est évident que

$$\gamma = 2\gamma'' - \gamma' = 4\delta - \frac{\pi}{2} - 1.$$

On a deux équations d'équilibre pour chercher les paramètres inconnus δ, R.

Primo, la somme des projections des contraintes agissant dans toute section transversale (par exemple, dans la section $OPQO''$) sur l'axe horizontal des x est nulle. Notons que seule la contrainte de traction normale σ_φ agit le long de OP, tandis que la contrainte tangentielle k et la contrainte normale σ s'exercent le long de l'arc PQ, cette dernière variant sur l'arc PQ comme une fonction linéaire de l'angle θ. Sur QO'' agit la contrainte de compression normale $-2k$.

Secundo, la somme des projections des contraintes agissant dans une section transversale sur l'axe vertical des y est nulle également.

Ensuite, le moment limite M_* est calculé comme le moment des contraintes (disons dans cette même section $OPQO''$ par rapport au centre D).

Les résultats des calculs sur lesquels nous ne nous arrêtons pas sont montrés en ligne pleine sur la figure 112. Il découle alors de la condition de la non-négativité de R que $\delta \geqslant \frac{\pi}{4}$, ce qui, à son

tour, correspond à $\frac{h}{h+a} \geqslant 0{,}64$. Pour $\delta = \frac{\pi}{4}$ on a $R=0$ et les deux solutions se confondent. Le moment limite selon la seconde solution est inférieur à celui obtenu d'après la première, et ceci à partir de $\frac{h}{h+a} > 0{,}64$.

On définit le champ des vitesses en résolvant pas à pas des problèmes caractéristiques.

On ne peut pas affirmer que les champs des contraintes construits se rapportent aux champs plastiques statiquement admissibles (paragraphe 40), car on ne sait pas quel est l'état de contrainte dans les zones rigides. Cependant, *les champs des vitesses correspondants sont cinématiquement admissibles et, par conséquent, les deux solutions donnent une évaluation par excès pour le moment limite* (paragraphe 40), *et il faut donc partir de la solution conduisant à une valeur de M_* plus petite.*

2. Rainures profondes bilatérales à base circulaire (fig. 114). On suppose que les rainures soient symétriques.

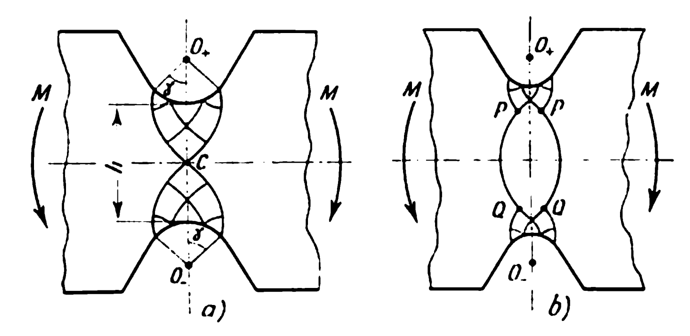


Fig. 114

Le champ de glissement le plus simple est constitué de deux champs symétriques (formés par des spirales logarithmiques) qui ont un point de contact C qui sera le point de discontinuité de l'état de contrainte. Ce dernier est décrit par les formules

$$\sigma_r = \pm 2k \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = \pm 2k \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right),$$

où le signe + se rapporte au champ supérieur et le signe — au champ inférieur, le rayon vecteur r étant compté à partir du centre correspondant (O_+ ou O_-).

L'angle γ est déterminé pour $h > 2a$ à partir de la relation

$$\gamma = \ln \frac{h}{2a}.$$

Les conditions d'équilibre se réduisent à une seule équation des moments par rapport au point C

$$M_* - 2\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi y\,dy = 0.$$

(où y est la distance à partir de C dans la section O_+O_-), équation qui définit la valeur du moment fléchissant limite M_*.

Posant $y = a + \frac{h}{2} - r$, portant σ_φ dans l'équation des moments et intégrant, on trouve la relation $\frac{M_*}{M_*^0}$ en fonction du même paramètre $\frac{h}{h+a}$; cette dépendance est indiquée en pointillé sur la figure 112.

Un autre champ de glissement est possible à partir de $\frac{h}{h+a} = 0{,}398$. Sa construction est analogue à la seconde solution pour le cas d'une rainure. Les deux champs à symétrie axiale s'y réunissent

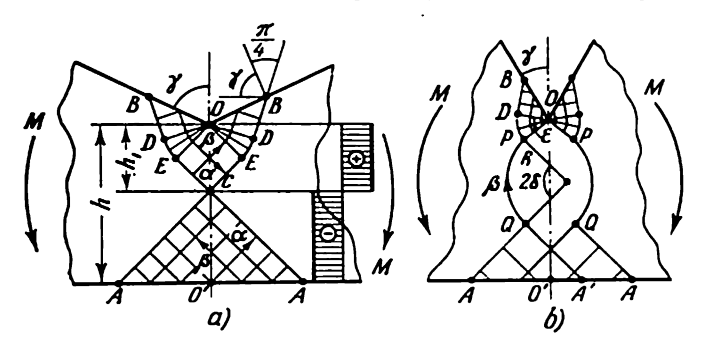


Fig. 115

par des arcs circulaires PQ (fig. 114, b) suivant lesquels se produit le glissement, c.-à-d. le pivotement des parties rigides extérieures. Les calculs y sont identiques à ceux employés dans le cas précédent ; la relation correspondante entre le moment limite et le paramètre géométrique est montrée en ligne pleine sur la figure 112; on l'appliquera pour $\frac{h}{h+a} \geqslant 0{,}398$.

3. Entaille angulaire profonde (fig. 115). La construction du champ de glissement apparaît clairement sur la figure 115. Les frontières libres étant rectilignes, les états de contrainte homogènes sont réalisés dans les triangles OBD, CAA (traction de $+2k$ dans $\triangle OBD$ et compression de $-2k$ dans $\triangle CAA$). Les champs centrés

ODE relient les triangles *OBD* avec le carré *OECE* soumis à un état de contrainte homogène; pour des raisons de symétrie, il est clair que seule la traction q agira dans *OECE* suivant les sections verticales.

Le paramètre η est constant le long de la ligne β *CB* (et le long des lignes β qui lui sont parallèles), par conséquent, $\eta_C = \eta_B$, c.-à-d.

$$\frac{\sigma}{2k} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \gamma.$$

Mais $q = \sigma + k$ dans le carré *OECE* et on obtient donc $q = k(2 + \pi - 2\gamma)$. On trouvera la position du point de discontinuité C, définissant l'ensemble de la solution, à partir de la condition d'équilibre: $qh_1 - 2k(h - h_1) = 0$.

Le moment limite est égal à

$$M_* = \frac{1}{2} qh_1^2 + k(h - h_1)^2. \tag{42.4}$$

En y portant les valeurs de q et h_1, on trouve la relation

$$\frac{M_*}{M_*^0} = 1 + \frac{\pi - 2\gamma}{4 + \pi - 2\gamma}, \tag{42.5}$$

qui est représentée en pointillé sur la figure 116. Tout comme auparavant, les parties rigides tournent autour du point C; le champ des vitesses est déterminé par solution pas à pas des problèmes caractéristiques.

Envisageons maintenant un autre type de champ de glissement (fig. 115, *b*); la rotation y a lieu suivant les lignes de glissement circulaires *PQ* autour du « tourillon » fixe et rigide *OPQQP*. Un état de traction uniforme de $+2k$ a lieu dans $\triangle OBD$ et un état de compression uniforme de $-2k$ dans le domaine adjacent à la face inférieure. Le domaine triangulaire *OBD* est lié au champ centré *ODP* qui est réuni à son tour à la zone plastique dans la partie inférieure par les lignes de glissement circulaires *PQ*. Le long de *A'QPO*, $\eta = \text{const}$, donc $\eta_P = \eta_Q$; étant donné que

Deux entailles
Une entaille
M_*/M_*^0
1,3
1,2
1,1
1
90 70 50 30 ← γ

Fig. 116

$$\eta_P = \frac{\sigma_P}{2k} + \frac{\pi}{4} - 2\delta, \quad \eta_Q = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

on a $\sigma_P = k(4\delta - 1)$; on voit clairement d'après les considérations géométriques que $\delta + \varepsilon + \frac{\pi}{4} + \gamma = \pi$; ensuite, $\xi = \text{const}$

dans les domaines *OPD*, *ODB* et il en découle que $3\delta = 1 - \gamma + \frac{3}{4}\pi$.

La solution est maintenant déterminée par deux paramètres, à savoir la distance $O'A'$ et le rayon R de l'arc circulaire, qui peuvent être trouvés, comme ci-dessus, à partir de deux équations d'équilibre. Sans nous arrêter sur des calculs simples mais assez encombrants, donnons les résultats définitifs. Le rayon R se réduit à zéro

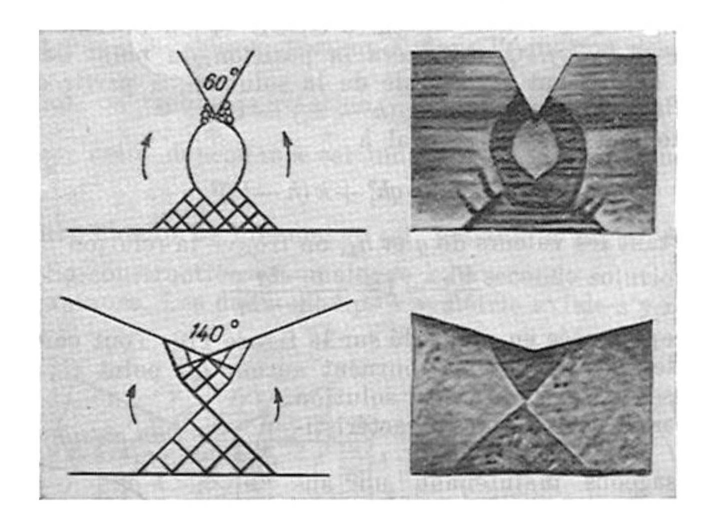


Fig. 117

pour $\gamma = 1$ et le deuxième type de champ passe au premier. Pour $\gamma < 1$, la seconde solution donne une valeur moindre du moment limite. La relation correspondante est montrée en ligne pleine sur la figure 116. Lorsque les angles γ sont petits, le moment limite ne dépend pratiquement pas de γ, la charge limite étant par ailleurs la même que pour une rainure à base circulaire avec un rayon de l'arrondi infinitésimal.

4. Entailles angulaires profondes bilatérales symétriquement disposées. Ce cas peut être examiné de la même manière. La relation entre le moment limite et l'angle d'entaille est portée sur la figure 116.

5. Données expérimentales. Les zones plastiques deviennent observables moyennant un traitement spécial (polissage, décapage) des éprouvettes d'acier déformées. Les photos obtenues par Hundy [76] pour les cas où $2\gamma = 60°$ et $2\gamma = 140°$ sont montrées sur la figure 117. Les données expérimentales confirment bien les conclusions théoriques relatives à deux types différents des champs de glissement (ce qui est montré dans la partie gauche de la figure 117).

43. FLEXION D'UNE CONSOLE COURTE SOLLICITÉE PAR UNE FORCE

1. Enoncé du problème. Dans le paragraphe 24, nous avons considéré le problème de la flexion plastique d'une poutre sous l'effet des couples. Cependant, comme dans le cas du matériau élastique, on peut appliquer également les relations obtenues à la flexion provoquée par des charges transversales si la poutre est suffisamment longue, l'influence des contraintes tangentielles étant alors négligeable.

Si l'on ne prend pas en considération les contraintes tangentielles pour des poutres courtes, cela peut conduire à des erreurs importantes.

Soit une poutre en porte-à-faux de section transversale rectangulaire constante, qui fléchit sous l'effet d'une force P (par unité

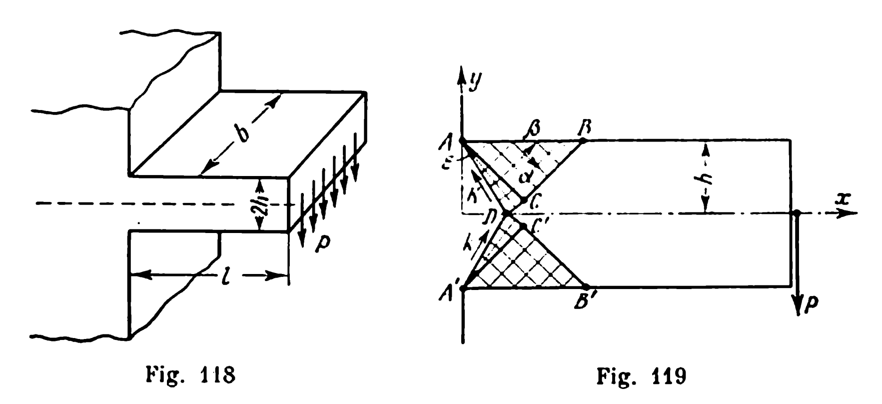


Fig. 118 Fig. 119

de largeur) appliquée à son extrémité (fig. 118) ; l'extrémité gauche de la poutre est solidement encastrée. La largeur b est constante dans la direction horizontale et dépasse de beaucoup (de six fois au moins [150]) la hauteur $2h$ de la poutre. Dans ces conditions, on peut considérer la déformation comme plane. Comme d'habitude, on part du schéma d'un matériau rigide-plastique.

2. Premier type du champ de glissement. Dans le problème donné, il peut y avoir le champ de glissement représenté sur la figure 119. Dans les triangles ABC et $A'B'C'$, les contraintes sont définies par les frontières libres AB et $A'B'$, le triangle ABC étant caractérisé par la traction uniaxiale de $+2k$ et le triangle $A'B'C'$ par la compression de $-2k$. Dans $\triangle ABC$ on a $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\sigma = k$, $\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. A ce triangle confine le champ centré ACD dans lequel $\eta = \text{const} = \eta_1$. Désignons par d la longueur de AD (le point D appartient à l'axe de la poutre) et par ε l'angle DAC. Il est évident

que

$$d\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)=h.$$

Le long de AD, $\theta = -\frac{\pi}{4} - \varepsilon$, la pression moyenne qui est égale sur la ligne de glissement AD à la contrainte normale sera donc (puisque $\eta = \eta_1$) égale à $\sigma_1 = k(1 + 2\varepsilon)$; la contrainte tangentielle sur AD est évidemment égale à k. Le long de $A'D$, la pression moyenne $\sigma_1' = -k(1 + 2\varepsilon)$. Les contraintes sont discontinues au point D.

Envisageons maintenant l'équilibre d'une partie de la console à droite de la ligne ADA'. La condition de nullité de la somme des projections des forces sur l'axe des y conduit à l'équation

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)-(1+2\varepsilon)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)=\frac{P}{2kd},$$

qui définit l'angle ε. La longueur l de la console ne peut être arbitraire et on la trouve à partir de la condition de nullité de la somme des moments par rapport au point D:

$$k(1+2\varepsilon)d^2=P\left[l-d\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right].$$

Ces équations définissent la relation entre $\frac{P}{2kh}$ et $\frac{l}{2h}$.

Dans l'état limite, la partie rigide de la console (à droite de BDB') tourne par rapport au point D. Comme il est aisé de le voir, le champ des vitesses dans les zones plastiques est compatible avec les vitesses sur les frontières.

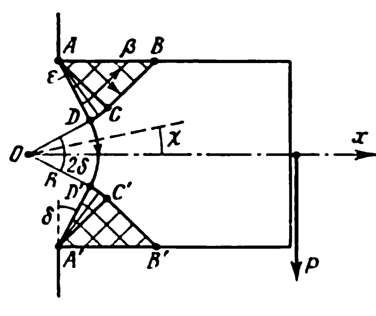


Fig. 120

3. Deuxième type du champ de glissement (fig. 120). Ici on a également dans les domaines triangulaires ABC et $A'B'C'$ une traction et une compression respectivement. Confinant à ces zones, les champs centrés ADC et $A'D'C'$ sont réunis par une ligne de glissement circulaire isolée DD' de rayon R. Dans l'état limite, la partie droite de la console glisse suivant cet arc.

Désignons par d la longueur de AD, par ε l'angle DAC et par 2δ l'angle d'ouverture de l'arc DD'. Dans $\triangle ABC$ on a $\sigma = k$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. Dans le secteur ACD on a $\eta = \eta_1$ et il est donc facile de voir que le long de AD $\sigma_1 = k(1 + 2\varepsilon)$ et $\xi_{AD} = \frac{1+2\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} + \varepsilon$. Nous avons respectivement sur $A'D'$:

$\sigma_1' = -k(1 + 2\varepsilon)$, $\xi_{A'D'} = -\frac{1+2\varepsilon}{2} + \frac{3\pi}{4} - \varepsilon$. En partant des raisonnements géométriques, il est clair que $\delta = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$. La ligne $ADD'A'$ est une ligne de glissement α continue; sur cette ligne ξ = const, par conséquent, on a $\xi_{AD} = \xi_{A'D'}$, d'où

$$2\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 16°20'.$$

Alors, $2\delta = 73°40'$. La longueur d est déduite de la relation géométrique

$$R \sin \delta + d \cos \delta = h.$$

Le rayon inconnu R est déterminé de la condition de nullité de la somme des projections sur la verticale de toutes les forces agissant sur la partie de la poutre qui se trouve à droite de la ligne $ADD'A'$. La contrainte tangentielle est égale à k le long de l'arc DD'; quant à la contrainte normale, elle est calculée selon la condition ξ = const $= \xi_{AD}$; étant donné que $\xi = \frac{\sigma}{2k} - \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right)$, on a alors $\sigma = 2k\chi$ sur DD', où l'angle χ est compté à partir de l'horizontale. Ainsi,

$$kd \cos \delta - \sigma_1 d \sin \delta + kR \int_0^\delta \cos \chi \, d\chi - 2kR \int_0^\delta \chi \sin \chi \, d\chi = \frac{P}{2}$$

ou bien

$$0{,}03d + 0{,}43R = \frac{1}{2} \frac{P}{k}.$$

Formons ensuite l'équation des moments par rapport au point O:

$$k\,dR + \frac{1}{2} \sigma_1 d^2 + k\delta R^2 = \frac{1}{2} Pl',$$

où l' est la distance entre l'extrémité chargée et le centre O:

$$l' = l + R \cos \delta - d \sin \delta.$$

Le rayon R s'accroît avec l'augmentation de la force (pour des poutres de plus en plus courtes) et les domaines $ABCD$ décroissent rapidement, la déformation plastique se localisant essentiellement le long d'une ligne de glissement circulaire isolée. Les équations écrites établissent la relation entre $\frac{P}{2kh}$ et $\frac{l}{2h}$.

Seule la première solution est valable pour $2\varepsilon < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; pour $2\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, la deuxième solution conduit à des valeurs plus petites et, de ce fait, plus acceptables de la charge limite $\frac{P_*}{2kh}$ (car ces

solutions, comme cinématiquement admissibles, conduisent à la borne supérieure de la charge). Le premier type du champ est réalisé pour les poutres longues $\frac{l}{2h} \geqslant 13{,}73$; les deux champs se confondent pour $\frac{l}{2h} = 13{,}73$, car $R = 0$. Les observations faites sur les poutres déformées [76] confirment l'existence de deux types des champs de glissement. La figure 121 représente le champ théorique et le tableau obtenu dans l'essai de flexion d'une console courte.

La solution élémentaire qu'on obtient quand on néglige les contraintes tangentielles (paragraphe 24) conduit à la relation

$$\frac{P_*^0}{2kh} = \frac{h}{l}.$$

La relation des charges limites $\frac{P_*}{P_*^0}$ en fonction du paramètre $\frac{l}{2h}$ est donnée sur la figure 122. On voit aisément

Fig. 121

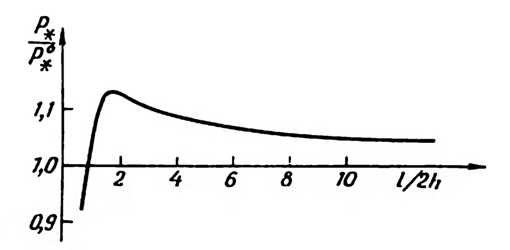


Fig. 122

que dans le cas de la déformation plane, pour $\frac{l}{2h} = 10$, la charge approximative P_*^0 est, selon un calcul élémentaire, d'environ 5 % inférieure à la charge « exacte » P_*.

Cette divergence augmente pour les poutres courtes, mais elle ne dépasse pas toutefois 13 % pour $\frac{l}{2h} \geqslant 1$. Avec l'accroissement de la longueur $P_* \to P_*^0$.

4. Considérations finales. Selon un schéma à peu près identique, il est facile d'examiner la flexion d'une console cunéiforme et d'une console limitée par des arcs de cercle. Dans ce dernier cas, le champ de glissement éventuel (type II) est montré dans la partie gauche de la figure 123. Par suite de la hauteur variable de la poutre, le domaine de la déformation plastique apparaît

à une certaine distance de l'encastrement. Les observations faites au cours des expériences (cf. photo dans la partie droite de la figure 123) confirment bien les hypothèses. On envisage également la flexion d'une console sollicitée par une charge uniformément répartie [165].

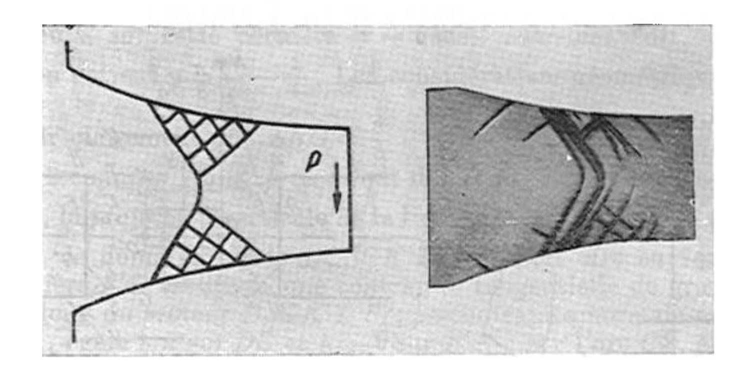


Fig. 123

Notons finalement que la déformation plastique est fortement influencée par le procédé de l'encastrement [140].

La borne inférieure de la charge limite est indiquée dans l'ouvrage [136].

44. CISAILLEMENT D'UN RÉTRÉCISSEMENT RECTANGULAIRE

On a examiné ci-dessus les déformations plastiques dans une section affaiblie de la bande en traction ou flexion. A. P. Green [148] a étudié un cycle de problèmes portant sur l'état limite des sections affaiblies travaillant dans des conditions de cisaillement et de pression. Les problèmes de ce type apparaissent notamment lors de l'analyse du mécanisme relatif au frottement sec des métaux, qui est lié à la déformation plastique de différentes inégalités des surfaces de contact.

Considérons un de ces problèmes présentant un intérêt plus général.

Soient les parties massives *I* et *II* qui sont reliées par un rétrécissement de hauteur h et de longueur l (fig. 124); la partie supérieure *I* se déplace vers la gauche à une vitesse V, la partie inférieure *II* se déplace vers la droite à la même vitesse. Trouver la charge limite et les zones plastiques.

Une construction éventuelle d'un champ de glissement, symétrique (par construction géométrique) par rapport aux axes des x et y, est représentée sur la figure 125. Les zones plastiques, qui se trouvent dans les angles A, A', B, B', renferment les triangles ACD et $A'C'D'$ de traction uniaxiale uniforme de $+2k$ ainsi que les triangles BEF et $B'E'F'$ de compression uniaxiale de $-2k$, contigus

aux frontières libres AB' et BA'. Les champs centrés CAS, EBT, . . . dont l'angle d'ouverture est γ sont réunis aux triangles mentionnés. La zone centrale $GKG'K'$ est le domaine de cisaillement uniforme à pression nulle σ, que les lignes de glissement circulaires SG, KT, $S'G'$, $K'T'$ de rayon R unissent aux zones plastiques angulaires.

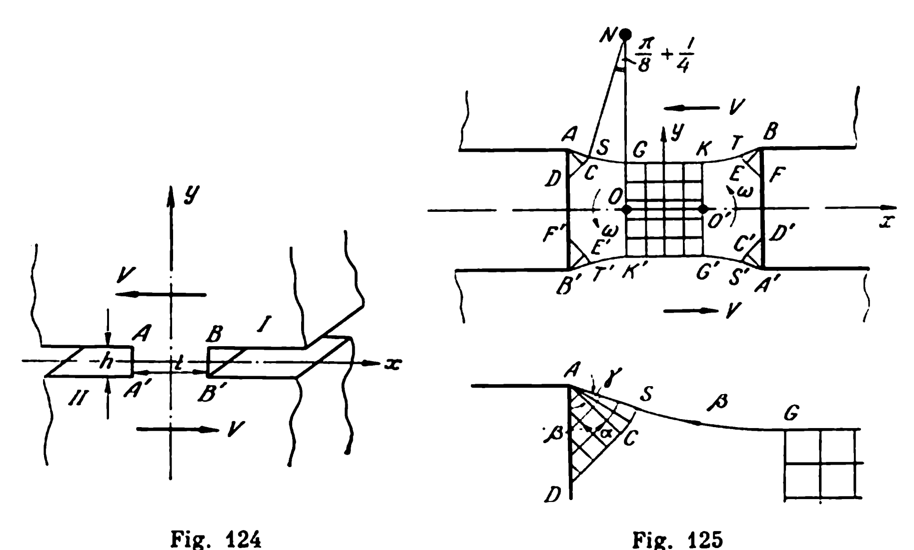


Fig. 124 Fig. 125

Désignons les longueurs des segments AC et GK' par a et b respectivement. Les domaines $DCSGK'T'E'F'$ et $KTEFD'C'S'G'$ restent rigides (c.-à-d. qu'ils ne subissent pas de déformations plastiques). Dans la partie inférieure de la figure 125, le dessin du champ de glissement, au voisinage de l'un des angles, est donné à une plus grande échelle. Dans $\triangle ACD$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma = k \quad \text{et} \quad \xi = \text{const} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \equiv \xi_1;$$

dans $\triangle BEF$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \quad \sigma = -k \quad \text{et} \quad \xi = \text{const} = -\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{4} \equiv \xi_2.$$

Le long de AS on a $\theta = \frac{\pi}{4} + \gamma$, le long de TB, $\theta = \frac{3}{4}\pi - \gamma$. Il est évident que dans chacun des domaines $ASCD$, $BTEF$ le paramètre ξ est constant et est égal à ξ_1, ξ_2 respectivement ; à partir de ces conditions on trouve la pression moyenne sur les côtés AS et TB : $\sigma_1 = k(1 + 2\gamma)$, $\sigma_2 = -k(1 + 2\gamma)$. Calculons maintenant les valeurs

du paramètre η sur les côtés AS, TB:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\gamma, \quad \eta_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\pi - 2\gamma.$$

Etant donné que $ASGKTB$ est une ligne de glissement β continue, on a sur cette dernière η = const, autrement dit, $\eta_1 = \eta_2$ d'où l'on obtient $\gamma = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. Les considérations géométriques nous font voir clairement que $\widehat{SNG} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Les inconnues R, a, b résultent des conditions suivantes. Tout d'abord, la projection verticale de la ligne ASG est égale à $\frac{1}{2}(h-b)$. Ensuite, le domaine rigide $DCSGK'T'E'F'$ doit être en équilibre; sa frontière $F'D$ est libre, une contrainte tangentielle de grandeur k agit le long du secteur $DSGK'T'F'$; la contrainte normale est nulle sur GK', égale à k sur DC et à $-k$ sur $F'E'$; sur l'arc CS, elle augmente de la valeur k à $k(1+2\gamma)$ comme une fonction linéaire de la pente de la ligne de glissement et sur l'arc SG, elle décroît de cette dernière valeur à zéro; les contraintes normales subissent des variations analogues le long de la ligne $E'T'K'$.

Pour des raisons de symétrie, la somme des projections des contraintes sur l'axe des x est égale à zéro ($\sum X = 0$), et il ne reste que deux conditions: $\sum Y = 0$ et $\sum \text{mom} = 0$. Omettant les calculs simples, mais quelque peu encombrants, on fournit les valeurs des paramètres trouvées à partir des trois conditions indiquées ci-dessus:

$$\frac{a}{h} = 0{,}052, \quad \frac{R}{h} = 1{,}076, \quad \frac{b}{h} = 0{,}739.$$

Cela étant, la largeur du secteur GK ne dépend que du rapport $\frac{l}{h}$ et, comme on s'en aperçoit aisément, se réduit à zéro pour $\frac{l}{h} = 0{,}68$. C'est pourquoi le champ de glissement envisagé doit satisfaire à la condition $\frac{l}{h} \geqslant 0{,}68$.

Calculant la somme des projections horizontales des contraintes agissant suivant la ligne de glissement $ASGKTB$, on obtient l'effort tranchant limite

$$Q_* = Q_*^0 \left(1 - 0{,}249 \frac{h}{l}\right), \tag{44.1}$$

où $Q_*^0 = kl$ est l'effort tranchant selon le schéma élémentaire de la résistance des matériaux. Il est évident que $Q_* \to Q_*^0$ pour $\frac{h}{l} \to 0$.

Adressons-nous maintenant à la représentation cinématique.

Désignons par U les discontinuités de grandeur égale dans la composante tangentielle de la vitesse le long des lignes β supérieure

AGKB et inférieure *A'G'K'B'*. La zone centrale subit un cisaillement uniforme ; les points sont fixes sur la ligne OO' et la vitesse de cisaillement est égale à $\frac{2}{b}(V - U)$. Les domaines rigides pivotent par rapport aux points O (O') dans le sens positif avec une vitesse angulaire ω. D'autre part, ces domaines subissent une rotation par

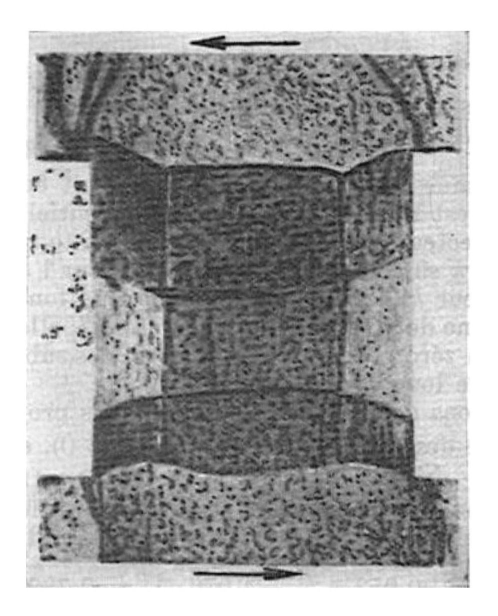


Fig. 126

rapport aux parties inférieure et supérieure autour des centres des arcs circulaires respectifs (SG, KT, . . .) avec une certaine vitesse angulaire ω'.

On obtient aisément de la condition de continuité de la composante normale de la vitesse que:

$$V - U = \omega \frac{b}{2}, \quad R\omega' = U, \quad \left(R + \frac{b}{2}\right)\omega' = V,$$

d'où

$$\omega = \frac{U}{R}, \quad V = \left(1 + \frac{b}{2R}\right)U.$$

Une photo des champs de déformation plastique, observés dans le rétrécissement après décapage, est représentée sur la figure 126. On voit parfaitement bien le domaine du cisaillement uniforme dans la partie moyenne de ce rétrécissement.

Pour conclure, nous noterons que l'on peut construire des solutions analogues [148] pour des rétrécissements symétriques de configurations différentes (par exemple, avec des côtés circulaires).

45. ENFONCEMENT D'UN POINÇON PLAT

Envisageons le problème relatif à l'établissement de l'écoulement plastique lors de l'enfoncement d'un poinçon solide à base plane (fig. 127) ; le milieu plastique est limité par le plan et il n'y a pas de frottement sur la surface de contact. Dans l'état limite, le poinçon se

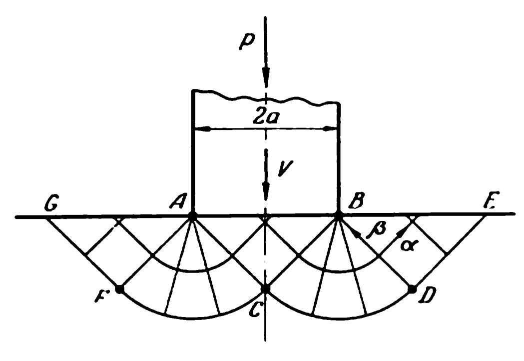


Fig. 127

déplace vers le bas à une vitesse V. La déformation étant supposée petite, on peut donc négliger le changement de forme de la surface libre.

1. Solution de Prandtl. La solution de Prandtl se rapporte aux premiers travaux sur le problème plan. Supposons que dans l'état limite la distribution de la pression sous le poinçon est uniforme. Alors le champ de glissement (fig. 127) peut être construit comme suit: les domaines triangulaires de l'état de contrainte homogène se trouvent sous le poinçon et de part et d'autre de celui-ci ; en particulier, les triangles BDE et AFG éprouveront une compression simple, parallèle à la frontière. La pression σ est inconnue dans $\triangle ABC$ et

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \xi = \text{const} = \frac{\sigma}{2k} + \frac{\pi}{4} \equiv \xi_1,$$

dans $\triangle\, BDE$:

$$\sigma = -k, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Les domaines triangulaires sont réunis par des champs centrés. Le paramètre ξ est constant le long de la ligne α, on a donc $\xi_1 = \xi_2$, d'où $\sigma = -k\,(1 + \pi)$. D'après les formules (32.1) on trouve les

contraintes dans $\triangle ABC$:

$$\sigma_x = -k\pi, \quad \sigma_y = -k(2+\pi).$$

La charge limite est égale à

$$P_* = 2ak(2+\pi). \tag{45.1}$$

Trouvons la distribution des vitesses; le triangle ABC se déplace vers le bas comme un solide à la vitesse du poinçon V. La composante tangentielle de la vitesse est discontinue le long de BC, tandis que la composante normale est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Le long de CD, la composante tangentielle de la vitesse est discontinue et la composante normale est nulle. Alors, conformément à (38.7), nous avons $v = 0$ et $u = \frac{1}{\sqrt{2}}V$ dans le champ centré. Enfin, le domaine BDE glisse comme un solide dans la direction DE à la vitesse de $\frac{1}{\sqrt{2}}V$. Un champ analogue est construit dans la partie gauche de la figure 127.

2. Solution de Hill. Une autre solution, proposée assez récemment par Hill, est représentée sur la figure 128. On suppose ici également qu'une pression uniforme s'exerce suivant la ligne de contact AB. Nous aurons alors dans le domaine $OCDEB$ le même champ des contraintes que dans le domaine $ACDEB$ pour la solution de Prandtl (fig. 127). Pour ce qui est du domaine $OFGHA$ (fig. 128), le champ des contraintes y est le même que celui du domaine $BCFGA$ (fig. 127).

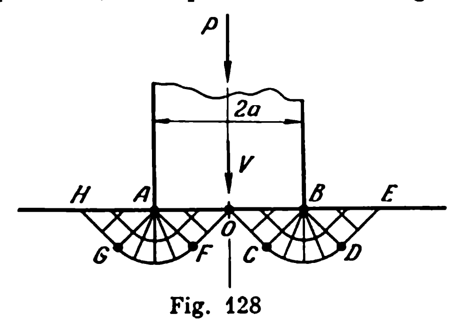


Fig. 128

Il est évident que la même pression uniforme $\sigma_y = -k(2+\pi)$ s'exercera suivant la ligne AOB. La charge limite P_* a la valeur précédente (45.1). Cependant le champ de glissement et l'image cinématique seront différents (fig. 128). Le triangle OCB y glisse comme un solide le long de OC à la vitesse $\sqrt{2}V$; la vitesse est continue sur BC, dans le champ centré BCD on a $v = 0$, $u = \sqrt{2}V$. le domaine triangulaire BDE se déplace vers DE à la vitesse $\sqrt{2}V$. A la différence de la solution de Prandtl, le champ des vitesses est continu dans les zones plastiques.

Comme le remarqua Prager, on peut élaborer une solution représentant une combinaison des solutions de Prandtl et de Hill et comportant un paramètre arbitraire caractérisant la superposition mutuelle des domaines OBC et OAF.

Le problème envisagé illustre la non-univocité des solutions obtenues d'après le schéma du corps rigide-plastique. Par conséquent, pour construire des champs éventuels de glissement et des vitesses il est indispensable d'utiliser des raisonnements complémentaires différents ainsi que des résultats expérimentaux.

En particulier, il est utile d'essayer de se représenter le caractère de l'apparition et de l'évolution des zones plastiques en se basant sur les solutions de la théorie de l'élasticité ou sur d'autres raisonnements quelconques. Sous ce point de vue, la solution de Hill donne une meilleure image, car, si l'on part de la solution du problème correspondant relatif à la pression du poinçon rigide sur un demi-plan élastique, les zones plastiques apparaissent dans le voisinage des angles A, B et s'étendent par la suite vers le milieu.

Un autre point de vue concernant le choix de la solution est discuté dans l'ouvrage de J. Rychlewski [184].

46. EFFET D'UNE PRESSION UNILATÉRALE EXERCÉE SUR UN COIN

Envisageons le problème relatif à la recherche d'une charge limite pour le coin lorsque la pression uniforme p est appliquée à la face droite (fig. 129).

1. Cas du coin obtus. Considérons au début le cas du coin obtus $2\gamma > \frac{\pi}{2}$. Un état de contrainte homogène se réalise dans le domaine triangulaire OCD, formé par les lignes de glissement qui sont issues des extrémités du segment OD. Il est évident que dans le triangle OAB, contigu à la frontière libre OA, il y aura également un état de contrainte homogène.

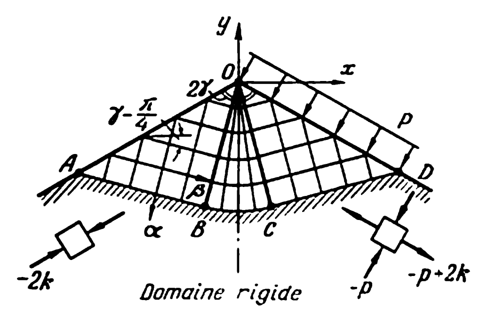


Fig. 129

Conformément à (35.4), on a $\sigma_t = -p \pm 2k$; le signe est choisi à la suite de raisonnements complémentaires quelconques (ou en essayant toutes les variantes). Supposons que le coin « fléchit » sous l'effet d'une charge unilatérale; on devra alors s'attendre à trouver une contrainte de traction σ_t sur le côté OD et une contrainte de compression sur le côté OA. Cela étant, nous admettons que $\sigma_t = -p + 2k$ dans le $\triangle\, OCD$ et $\sigma_t = -2k$ dans le $\triangle\, OAB$ (fig. 129). Réunissons ces deux domaines par le champ centré OBC

(paragraphe 33) ; les contraintes y sont constantes le long de chacun des rayons et varient (comme les fonctions linéaires de la pente du rayon) à partir des valeurs qu'elles présentent sur la ligne de glissement OC aux valeurs qu'elles ont sur la ligne de glissement OB. La contrainte tangentielle $\tau = k$ s'exerce le long de la ligne de partage $ABCD$ qui est une ligne de glissement ; la contrainte normale est égale à $\sigma = -p + k$ sur le tronçon CD et $\sigma = -k$ sur le tronçon AB ; elle varie suivant une loi linéaire sur le tronçon BC.

Les domaines considérés ne seront en équilibre que pour une valeur déterminée de la pression $p = p_*$, appelée *valeur limite*; pour calculer cette valeur, on peut utiliser la condition de constance du paramètre η sur les lignes β :

$$\text{dans } \triangle OCD\text{: } \theta = \gamma - \frac{3}{4}\pi, \quad \eta = \frac{-p+k}{2k} + \gamma - \frac{3}{4}\pi,$$

$$\text{dans } \triangle OAB\text{: } \theta = -\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), \quad \eta = -\frac{1}{2} - \gamma - \frac{\pi}{4}.$$

Egalant ces valeurs de η entre elles, on obtient la formule de Prandtl

$$p_* = 2k\left(1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2}\right). \tag{46.1}$$

Sur le plan ξ, η, la solution est représentée par un segment de droite η = const. Lorsque $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (coin rectangulaire), le champ centré dégénère en une ligne droite et la solution a une forme simple qui réside partout en une compression uniaxiale uniforme (fig. 130).

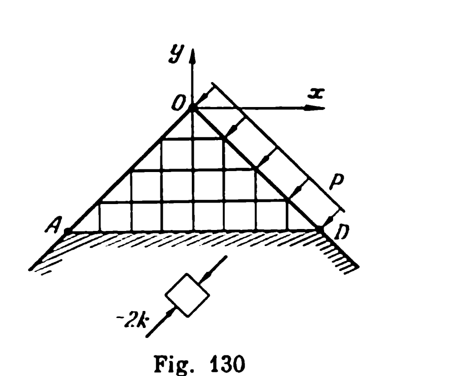


Fig. 130

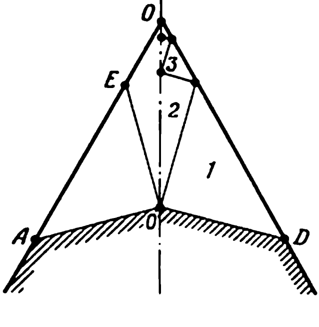


Fig. 131

Soit une composante normale de la vitesse définie le long de OD ; la base du coin étant immobile, la composante normale de la vitesse sera nulle sur la ligne $ABCD$. On voit aisément que le champ des vitesses est déterminé par solution successive des problèmes aux limites pour les domaines OCD, BCO, BAO.

2. Cas du coin acutangle. La construction perd sa signification lorsque $\gamma < \frac{\pi}{4}$ puisque les triangles OAB et OCD se recouvrent mutuellement, conduisant de la sorte à la non-univocité de l'état de contrainte. Dans ce cas, la continuité du champ des contraintes est impossible et la solution se caractérise par un champ discontinu qui est représenté sur la figure 131. Par ailleurs, à droite et à gauche de la ligne de discontinuité nous avons toujours des états de contrainte homogènes:

$$\text{dans } \triangle\, OO'D\text{:}\quad \theta^+ = \gamma - \frac{3}{4}\pi, \quad \sigma^+ = -p + k,$$

$$\text{dans } \triangle\, OO'A\text{:}\quad \theta^- = -\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), \quad \sigma^- = -k.$$

Conformément à la condition (39.3), on obtient sur la ligne de discontinuité;

$$p_* = 2k\,(1 - \cos 2\gamma) \tag{46.2}$$

(pour $\varphi = 0$).

Notons que l'on peut également construire un champ de contraintes discontinu pour le coin obtus, mais, comme il sera montré plus bas, cela mènerait à une contradiction. Pour établir l'exactitude de solution, il faut voir si les autres conditions sont satisfaites par les champs construits.

Envisageons sommairement l'analyse du champ des vitesses pour le cas du coin acutangle. Les lignes de partage AO' et $O'D$ (fig. 131) sont des lignes de glissement sur lesquelles la composante normale de la vitesse $v_n = 0$. Le long de la ligne de discontinuité OO' on a $v_y = \text{const}$ (paragraphe 39); la base du coin étant fixe, nous avons alors $v_y = 0$ en un point O' et, par suite, $v_y = 0$ en tout point de la ligne de discontinuité. Soit une composante normale de la vitesse donnée sur la face OD. Partageons la partie droite du coin à l'aide des lignes de glissement en une suite infinie de triangles décroissants (fig. 131). On peut trouver un champ des vitesses dans chacun d'entre eux si l'on résout successivement le problème mixte (paragraphe 38) en passant du triangle *1* au triangle *2*, etc. On trouvera alors la composante de la vitesse v_x sur la ligne de discontinuité OO'.

Passons à la construction du champ des vitesses dans la partie gauche du coin. Dans le triangle $OO'E$, les vitesses sont définies par solution du problème de Cauchy suivant les valeurs connues de v_x, v_y sur la droite OO'. Nous avons le problème caractéristique pour le $\triangle O'EA$.

La construction analogue du champ des vitesses pour la solution discontinue dans le coin obtus conduit à des contradictions. En

effet, nous avons le problème mixte dans le $\triangle ODD'$ (fig. 132) déterminant le champ des vitesses dans le triangle mentionné (les composantes normales de la vitesse sont données sur la ligne OD et la caractéristique DD'). On doit maintenant résoudre le problème caractéristique pour le $\triangle OO'D'$, les vitesses seront alors trouvées sur

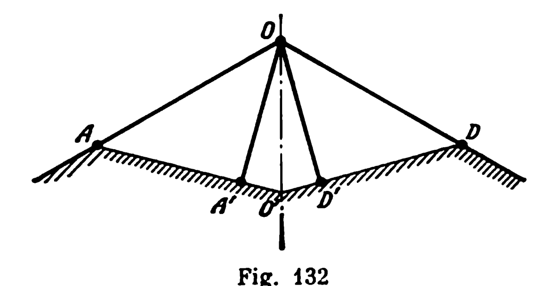


Fig. 132

la ligne de discontinuité OO' également. La définition de la vitesse $v_y = 0$ sur OO' découlant de l'hypothèse sur l'existence de la solution discontinue est inadmissible et, par conséquent, la construction envisagée est erronée.

Pour conclure, notons que le problème élasto-plastique du coin a été abordé également par G. Chapiro et P. Nahdi ; l'équilibre d'un coin en matériau écrouissable selon la loi de la puissance a été étudié par V. Sokolovski [33]. Nous mentionnons encore ici les travaux récents de E. Najar, J. Rychlewski et G. Chapiro [116a].

47. COMPRESSION D'UNE COUCHE ENTRE DEUX PLAQUES RIGIDES

Considérons le problème relatif à la compression d'une couche plastique entre deux plaques parallèles rigides et rugueuses (fig. 133).

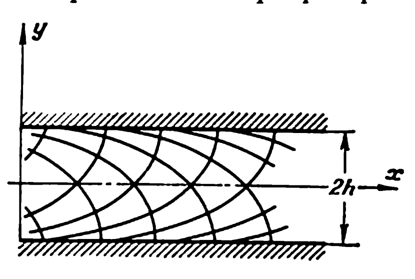


Fig. 133

La couche plastique, refoulée vers l'extérieur par écrasement, coule du centre à la périphérie avec des contraintes tangentielles élevées apparaissant sur les surfaces de contact. Tout laisse croire que ces contraintes tangentielles atteignent leur valeur maximale k pour des déformations plastiques évoluées.

1. Solution de Prandtl pour les couches minces. Admettons que l'épaisseur $2h$ de la couche soit bien inférieure à l'étendue $2l$ de la couche. Dans les sections aux extrémités de la couche, les charges équilibrées ne peuvent alors exercer une influence notable sur l'état

de la couche à une certaine distance des extrémités. Les solutions qui ne satisfont pas exactement aux conditions aux limites sur les extrémités de la couche présentent également de l'intérêt dans ces conditions.

On s'aperçoit aisément que les contraintes

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p-k\left(\frac{x}{h}-2\sqrt{1-\frac{y^2}{h^2}}\right), \\ \sigma_y &= -p-k\frac{x}{h}, \\ \tau_{xy} &= k\frac{y}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (47.1)$$

satisfont aux équations différentielles d'équilibre (31.9) et à la condition de plasticité (31.8) pour n'importe quelle valeur de la constante arbitraire p. Les composantes du vecteur vitesse

$$\left.\begin{aligned} v_x &= V+c\left(\frac{x}{h}-2\sqrt{1-\frac{y^2}{h^2}}\right), \\ v_y &= -c\frac{y}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (47.2)$$

satisfont à leur tour à la condition d'incompressibilité (31.11) et à l'équation (31.10), quelles que soient les valeurs des constantes c, V. Il découle de (47.2) que chacune des plaques avance vers la couche à la vitesse c.

Trouvons les lignes de glissement. Comparant la dernière des formules (32.1) avec la formule $\tau_{xy} = k\frac{y}{h}$, on obtient:

$$y = h \cos 2\theta.$$

D'où

$$\frac{dy}{dx} = -2h \sin 2\theta \frac{d\theta}{dx}.$$

On peut maintenant, à l'aide de (31.7), trouver les équations différentielles des lignes de glissement:

$$2h \sin 2\theta \frac{d\theta}{dx} = -\operatorname{tg}\theta, \quad 2h \sin 2\theta \frac{d\theta}{dx} = \operatorname{cotg}\theta.$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient les équations paramétriques des familles de lignes de glissement:

$$x = -h(2\theta + \sin 2\theta) + \text{const}, \quad y = h \cos 2\theta; \qquad (\alpha)$$

$$x = h(2\theta - \sin 2\theta) + \text{const}, \quad y = h \cos 2\theta. \qquad (\beta)$$

Le champ des lignes de glissement est constitué par deux familles orthogonales de cycloïdes dont le rayon du cercle générateur est égal à h. Les droites $y = \pm h$ sont les enveloppes de ces familles de cycloïdes et, par suite, les lignes de discontinuité. Il est facile de voir que le long de ces dernières les dérivées $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ tendent

vers l'infini. La vitesse de cisaillement η_{xy} n'est pas limitée non plus sur les lignes $y = \pm h$.

Faisons en sorte que les conditions sur le bord libre $x = 0$ soient satisfaites au sens de Saint-Venant, autrement dit, exigeons que pour $x = 0$

$$\int_{-h}^{h} \sigma_x \, dy = 0.$$

Portant ici les composantes de la contrainte, on obtient $p = k\frac{\pi}{2}$. La distribution de la pression $(\sigma_y)_{y=h}$ est linéaire. On calculera aisément l'effort de compression limite que nous désignerons par $2P$:

$$2P = 2\int_0^l \sigma_y \, dx = -kl\left(\frac{l}{h} + \pi\right). \qquad (47.3)$$

Ensuite, les paramètres c et V sont liés par la condition d'incompressibilité du matériau: le flux du matériau passant par la section $x = 0$ doit être égal à la quantité de matériau refoulée par unité de temps sur une longueur l lors du rapprochement des plaques:

$$-\int_0^h v_x \, dy = lc.$$

Portant v_x de (47.2) pour $x = 0$, on obtient:

$$V = c\left(\frac{\pi}{2} - \frac{l}{h}\right).$$

La contrainte normale σ_y est constante suivant l'épaisseur de la couche et elle est une fonction linéaire de x. *A distance du bord libre*, la contrainte σ_x ne diffère de σ_y que d'une petite valeur de l'ordre

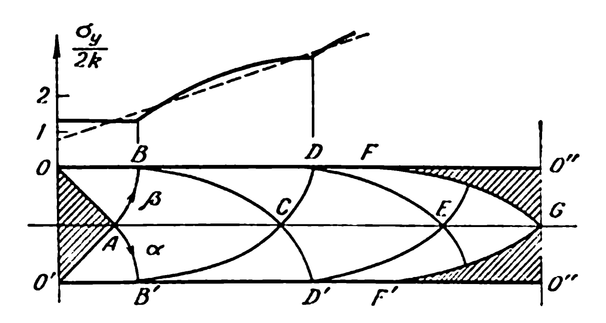


Fig. 134

de $\frac{h}{l}$ par rapport à l'unité; avec la même précision la vitesse de l'écoulement dans la direction des x est constante suivant l'épaisseur. Les contraintes tangentielles sont petites par comparaison aux contraintes normales.

La solution de Prandtl n'est satisfaisante ni au voisinage des extrémités (pour $x = 0$, la condition aux limites n'est vérifiée qu'au sens de Saint-Venant), ni dans la partie moyenne (au voisinage de $x = l$), car les contraintes tangentielles doivent se réduire à zéro sur l'axe de symétrie. On est en droit de penser qu'il y a un domaine rigide dans la partie moyenne de la couche et que le matériau est refoulé de part et d'autre de ce domaine (fig. 134). Néanmoins, la solution de Prandtl est une bonne approximation pour la couche mince.

2. Couche d'épaisseur moyenne. Pour les couches d'épaisseur finie, on ne peut négliger l'influence des conditions sur les extrémités et dans la partie centrale de la couche; la solution doit satisfaire à toutes les conditions aux limites pour les contraintes et les vitesses. La construction du champ de glissement avait déjà été ébauchée par Prandtl et par la suite ce problème fut étudié par V. Sokolovski [[33]], Hill, Lee et Tupper [[47]], etc.

Admettons que la ligne de glissement α, séparant le domaine plastique et le domaine rigide, est une droite OA (fig. 134); on se convaincra plus tard de la justesse de ce raisonnement. Pour des raisons de symétrie, il n'y a pas de contraintes tangentielles sur l'axe de la couche et la ligne OA est donc inclinée sous un angle de $\frac{\pi}{4}$. Le champ des contraintes a une singularité au point O, et la solution, dans le domaine OAB, est représentée par le champ centré qui, conformément à la condition à la surface de contact, est limité par la ligne de glissement α, celle-ci étant confondue avec la frontière. Examinons les forces agissant sur la partie rigide OAO'. Les contraintes tangentielles de valeur k, dirigées vers le sommet A, sont réparties uniformément sur les faces OA, $O'A$; la contrainte normale est égale à la pression moyenne. On trouve facilement à partir des conditions d'équilibre de la partie rigide OAO' que la pression moyenne sera égale à $-k$ le long du segment OA de la ligne α. Selon le théorème de Hencky, on a $\sigma = -2k\theta +$ $+$ const le long de la ligne circulaire β; définissant cette constante d'après les valeurs de σ et θ sur OA et passant, par la suite, à la ligne de contact OB pour laquelle $\theta = 0$, on trouve que la pression est constante et égale à $-k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ le long de OB. Les valeurs ξ, η sont connues maintenant sur les segments AB et AB' des caractéristiques β, α, et l'état de contrainte dans le domaine $ABCB'$ est déterminé par la solution du problème caractéristique. On a le

problème mixte dans le domaine BCD (l'angle $\theta = 0$ est donné le long de BD, car sur la ligne de contact $\tau_{xy} = k$ et les éléments de glissement coïncident avec la frontière).

On poursuit la construction jusqu'à ce que l'on n'atteigne l'axe $O''O''$. Pour des raisons de symétrie, les contraintes tangentielles sont nulles sur la ligne $O''O''$ et, par conséquent, la condition $\tau_{xy} = \text{const} = k$ sur la ligne de contact ne peut être vérifiée au voisinage du milieu de la couche. Une zone rigide y apparaît et elle est limitée par la ligne de contact et la ligne de glissement FG venant au point G. La distribution de la pression sur le segment FO'' reste indéterminée et on peut seulement calculer la pression moyenne d'après les contraintes s'exerçant le long de la ligne de partage FG. La construction examinée est possible si le point C ne passe pas de l'autre côté de l'axe de symétrie $O''O''$. Comme le montrent les calculs, cela aura lieu pour $\frac{l}{h} > 3{,}64$. A droite de AB, la solution sera élaborée par des méthodes numériques.

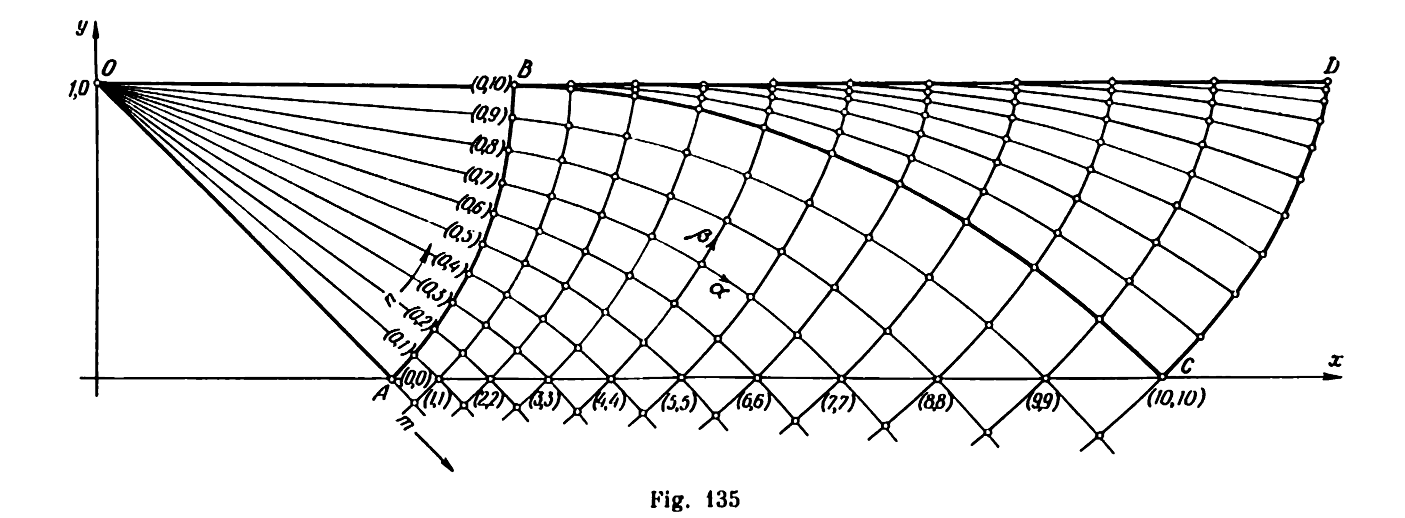
U n e x e m p l e d e c o n s t r u c t i o n n u m é r i q u e d'un réseau de glissement est représenté sur la figure 135 (l'épaisseur de la couche est considérée comme égale à 2, c.-à-d. $h = 1$). Dans le secteur OAB, la solution est connue; divisons l'arc AB en 10 parties égales par les points (0, 0), (0, 1), . . ., (0, 10); la valeur de θ dans chacun de ces nœuds est égale à l'angle d'inclinaison du rayon α correspondant, par exemple, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ au point (0, 0), $\theta = -\frac{\pi}{8}$ au point (0, 5), etc. La pression moyenne sur l'arc AB est égale à $\sigma = -k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$.

Divisons l'arc AB' en 10 parties égales par les points (0, 0), (1,0), ..., (10, 0). La pression σ aux points symétriques prend les valeurs précédentes; on trouve facilement l'angle θ. Calculons ensuite les coordonnées des nœuds $x_{0,1}$, $y_{0,1}$, $x_{0,2}$, $y_{0,2}$, etc., et notons toutes les données sur les arcs AB, AB' respectivement sur la ligne supérieure et dans la colonne gauche du tableau. Calculons, selon les formules (37.1), (37.2), (37.3), (37.4), les coordonnées du nœud (m, n) et les valeurs des fonctions inconnues $\theta_{m,n}$, $\sigma_{m,n}$ dans ce dernier. Pour des raisons de symétrie, il suffit de calculer le champ en amont de AC (notons que $\theta = -\pi/4$ sur AC; utilisant ce fait on peut résoudre le problème mixte pour le domaine ABC). On trouve successivement les points $(1, n)$ (c.-à-d. que l'on remplit la deuxième ligne du tableau), les points $(2, n)$, etc.

Réunissant les nœuds par des lignes droites (ou courbes suivant un pistolet), on obtient un réseau des lignes de glissement (fig. 135). Dans le domaine BCD, le champ est défini d'après le schéma de la solution du problème mixte (paragraphe 37), puisque maintenant σ, θ nous sont connues sur BC dans les nœuds $(m, 10)$ et $\theta = 0$ sur la ligne $y = 1$.

La distribution de la pression calculée sur la surface de contact est tracée en ligne pleine sur la figure 134. La pression obtenue d'après la solution de Prandtl est montrée en pointillé. Il est évident que la solution de Prandtl est une bonne approximation pour $l \gg h$.

Le champ de glissement construit doit être accordé avec le champ des vitesses qui lui correspond. Penchons-nous sur cette question.



y
O
1,0
B
D
x
A
C
m
n
β
α
(0,10)
(0,9)
(0,8)
(0,7)
(0,6)
(0,5)
(0,4)
(0,3)
(0,2)
(0,1)
(0,0)
(1,1)
(2,2)
(3,3)
(4,4)
(5,5)
(6,6)
(7,7)
(8,8)
(9,9)
(10,10)

Fig. 135

Calcul de la compression d'une couche plastique entre des plaques rigides

	m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\theta_{0,\,n}$	0	0,785	0,706	0,628	0,550	0,471	0,392	0,314	0,235	0,157	0,078	0,00
$-\sigma_{0,\,n}/k$		1,00	1,16	1,31	1,47	1,63	1,78	1,94	2,10	2,26	2,41	2,57
$x_{0,\,n}$		1,00	1,07	1,14	1,21	1,26	1,31	1,34	1,37	1,40	1,41	1,41
$y_{0,\,n}$		0,00	0,08	0,17	0,26	0,36	0,46	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00
$-\theta_{1,\,n}$	1		0,785	0,706	0,628	0,550	0,417	0,392	0,314	0,235	0,157	0,078
$-\sigma_{1,\,n}/k$			1,31	1,47	1,63	1,78	1,94	2,10	2,26	2,41	2,57	2,73
$x_{1,\,n}$			1,16	1,24	1,32	1,39	1,45	1,50	1,54	1,57	1,60	1,61
$y_{1,\,n}$			0,00	0,09	0,18	0,29	0,39	0,51	0,62	0,74	0,86	0,99
$-\theta_{2,\,n}$	2			0,785	0,706	0,628	0,550	0,417	0,392	0,314	0,235	0,157
$-\sigma_{2,\,n}/k$				1,63	1,78	1,94	2,10	2,26	2,41	2,57	2,73	2,88
$x_{2,\,n}$				1,34	1,43	1,51	1,59	1,66	1,71	1,76	1,80	1,82
$y_{2,\,n}$				0,00	0,10	0,20	0,32	0,43	0,56	0,69	0,82	0,96
$-\theta_{3,\,n}$	3				0,785	0,706	0,628	0,550	0,471	0,392	0,314	0,235
$-\sigma_{3,\,n}/k$					1,94	2,10	2,26	2,41	2,57	2,73	2,88	3,04
$x_{3,\,n}$					1,53	1,63	1,73	1,81	1,88	1,95	2,00	2,04
$y_{3,\,n}$					0,00	0,11	0,22	0,35	0,48	0,62	0,77	0,92
$-\theta_{4,\,n}$	4					0,785	0,706	0,628	0,550	0,471	0,392	0,314
$-\sigma_{4,\,n}/k$						2,26	2,41	2,57	2,73	2,88	3,04	3,20
$x_{4,\,n}$						1,75	1,86	1,96	2,05	2,14	2,21	2,26
$y_{4,\,n}$						0,00	0,12	0,25	0,39	0,53	0,69	0,85
$-\theta_{5,\,n}$	5						0,785	0,706	0,628	0,550	0,471	0,392
$-\theta_{5,\,n}/k$							2,57	2,73	2,88	3,04	3,20	3,36
$x_{5,\,n}$							1,98	2,10	2,12	2,32	2,42	2,49
$y_{5,\,n}$							0,00	0,13	0,27	0,43	0,59	0,77
$-\theta_{6,\,n}$	6							0,785	0,706	0,628	0,550	0,471
$-\sigma_{6,\,n}/k$								2,88	3,04	3,20	3,36	3,51
$x_{6,\,n}$								2,24	2,38	2,50	2,62	2,72
$y_{6,\,n}$								0,00	0,15	0,31	0,48	0,66
$-\theta_{7,\,n}$	7								0,785	0,706	0,628	0,55
$-\sigma_{7,\,n}/k$									3,20	3,36	3,51	3,67
$x_{7,\,n}$									2,53	2,68	2,82	2,95
$y_{7,\,n}$									0,00	0,17	0,34	0,53
$-\theta_{8,\,n}$	8									0,785	0,706	0,628
$-\sigma_{8}\,n/k$										3,51	3,67	3,83
$x_{8,\,n}$										2,86	3,02	3,18
$y_{8,\,n}$										0,00	0,18	0,38
$-\theta_{9,\,n}$	9										0,785	0,706
$-\sigma_{9,\,n}/k$											3,83	3,98
$x_{9,\,n}$											3,22	3,41
$y_{9,\,n}$											0,00	0,20
$-\theta_{10,\,n}$	10											0,785
$-\sigma_{10,\,n}/k$												4,14
$x_{10,\,n}$												3,62
$y_{10,\,n}$												0,00

En raison de la symétrie $u = v$ sur AG; nous avons la condition aux limites $v = -c$ sur OF (fig. 134). Etant donné que la zone rigide dans la partie moyenne se déplace en direction verticale à la vitesse c et la composante normale de la vitesse v est continue sur la frontière FG, on a alors sur cette dernière $v = -c \cos \theta$. Intégrant maintenant l'équation (38.4) et définissant une constante arbitraire d'après la condition $u = v$ au point G pour lequel $\theta = -\pi/4$, on trouve sur la frontière FG la deuxième composante de la vitesse:

$$u = -c\,(\sqrt{2} + \sin \theta).$$

La composante tangentielle de la vitesse u subit ainsi un saut de grandeur $c\sqrt{2}$ lorsqu'elle passe par la ligne de partage FG, ce qui implique une vitesse de cisaillement infinie. Construisons un champ des vitesses d'après les valeurs calculées de u et v en s'avançant

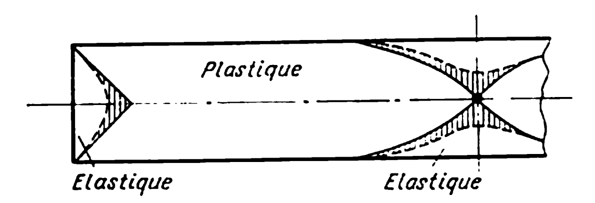


Fig. 136

successivement de droite à gauche jusqu'à la ligne AB, les vitesses sur AB étant définies d'une façon unique. Par la suite, dans le secteur OAB, on trouve les vitesses d'après les données relevées sur les segments AB et OB. La vitesse u est constante le long de chaque rayon, c.-à-d. $u = u(\theta)$; alors, le long de la ligne β, on aura (cf. paragraphe 38):

$$v = -\int u(\theta)\, d\theta + \psi(\rho).$$

La vitesse v étant constante sur OB, nous aurons $\psi(\rho) = \text{const}$ et, par suite, $v = v(\theta)$. Ainsi, les vitesses u et v sont constantes le long de la ligne de partage OA. La condition de constance de la composante normale de la vitesse v sur AO correspond au mouvement voulu de la partie rigide OAO' de la couche.

L'image de la déformation d'une *couche élasto-plastique* réelle est montrée schématiquement sur la figure 136. La particularité des zones hachurées consiste en ce que les déformations élastiques et plastiques y sont du même ordre.

Notons que, dans la solution obtenue, on peut considérer h comme épaisseur à l'instant donné; cette solution sera donc valable également pour les déformations finies. On peut d'ailleurs facilement définir la forme de la partie

refoulée d'après la condition d'incompressibilité. En effet, soit dh la grandeur de laquelle se déplace la plaque, alors $h\,dx + l\,dh = 0$, où dx est le déplacement de la partie refoulée de la couche (fig. 137); d'où

$$h = h_0 e^{-\frac{x}{l}},$$

où h_0 est l'épaisseur initiale de la couche et x est compté à partir de l'extrémité de la couche.

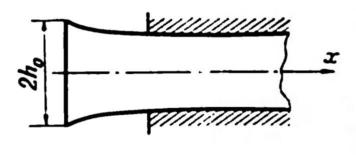
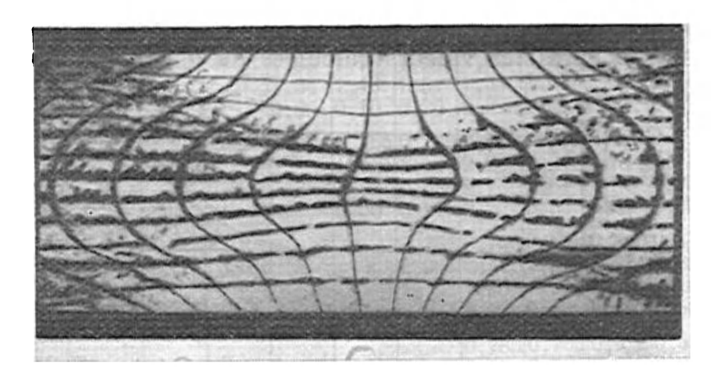


Fig. 137

Les calculs [47] ont montré que les vitesses ne subissent des variations notables que dans une bande étroite, au voisinage de la ligne de contact, et changent peu dans le reste de la couche. Ces résultats sont confirmés par les observations faites sur le gauchissement d'un réseau initialement carré de la couche serrée entre des plaques rugueuses. Les zones « rigides » apparaissent nettement sur la figure 138.


Fig. 138

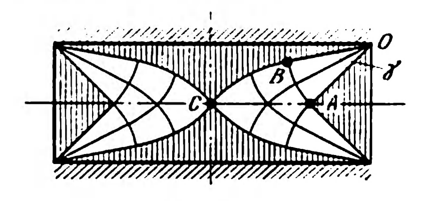


Fig. 139

3. Couche courte. La solution exposée n'est pas valable pour une couche courte $\left(\frac{l}{h} < 3{,}64\right)$. Ici, pour $1 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 3{,}64$, le champ de glissement a la forme représentée sur la figure 139. Les droites

de glissement OA coupent l'axe horizontal sous un angle de $\frac{\pi}{4}$. L'angle d'ouverture γ du champ centré est défini par la condition d'arrivée de la ligne de glissement OBC au centre de la bande. Les domaines sombres restent rigides; la distribution de la pression suivant la ligne de contact est indéterminée et l'on ne peut indiquer que sa valeur moyenne. Les points A et C sont confondus pour $\frac{h}{l} = 1$; la construction du champ de glissement sera différente pour $\frac{h}{l} < 1$ (cf. [47]).

4. **Considérations finales.** On avait supposé ci-dessus que la contrainte tangentielle maximale $\tau_{xy} = k$ se développe suivant la surface de contact. V. Sokolovski [33] a étudié le cas où la contrainte tangentielle est constante mais inférieure à k.

Sur la base des solutions envisagées, des méthodes approchées ont été développées pour le calcul de la compression de la couche. Ainsi, la solution approchée du problème de la compression des couches de formes variées dans le plan (circulaires, rectangulaires, etc.) est donnée dans l'ouvrage de Meyerhof et Chaplin [176], où elle a été confirmée par des résultats expérimentaux. A. Iliouchine [99] s'est penché sur le problème de l'écoulement d'une couche plastique intercalée entre deux surfaces indéformables.

L'état de contrainte d'une intercalation plastique mince, fixée à des parties rigides, est d'un intérêt pratique notable. De tels problèmes se posent, par exemple, lorsque l'on aborde la question du travail de la brasure (collage) ou celle du travail des soudures, etc.

Les solutions exposées pour la couche mince se rapportent *au stade final* de l'écoulement plastique, quand des contraintes tangentielles, égales à la limite d'écoulement, se développent sur la surface de contact. Cependant, l'état de contrainte dans ces couches varie en fonction de la charge, allant de la compression (traction) uniaxiale simple à l'état de contrainte fini complexe étudié plus haut. L'analyse approchée du phénomène de l'évolution de l'état de contrainte dans une intercalation mince est donnée dans l'ouvrage [107]; cf. également paragraphe 60.

Notons finalement que la présence d'une force déplaçant les plaques réduit notablement l'effort de compression limite $2P$. Ce problème sera envisagé sommairement dans le paragraphe 66.

48. PROBLÈME ÉLASTO-PLASTIQUE SUR L'EXTENSION D'UN PLAN À OUVERTURE CIRCULAIRE

1. **Enoncé du problème.** Envisageons le problème de l'extension d'un plan à ouverture circulaire de rayon a, éprouvant des tractions différentes à l'infini dans les directions des axes des x, y (fig. 140), c.-à-d. pour $r \to \infty$ on a $\sigma_x \to p$, $\sigma_y \to q$, $\tau_{xy} \to 0$, et $q \geqslant p$; l'ouverture est libre de contraintes.

Des domaines plastiques apparaissent lorsque les charges p et q sont d'une valeur suffisante. Sans entrer dans les détails de l'histoire du développement progressif de ces domaines (qui peut être accompagné d'une décharge dans diverses parties des zones plastiques),

posons que la zone plastique englobe entièrement l'ouverture. La condition de plasticité (31.8) sera valable si l'on admet que le matériau est incompressible. La solution, dans la zone plastique, n'étant alors définie que par la géométrie du contour, dans les coordonnées polaires r, φ, les composantes de la contrainte seront (paragraphe 34):

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = 2k\left(1 + \ln \frac{r}{a}\right). \tag{48.1}$$

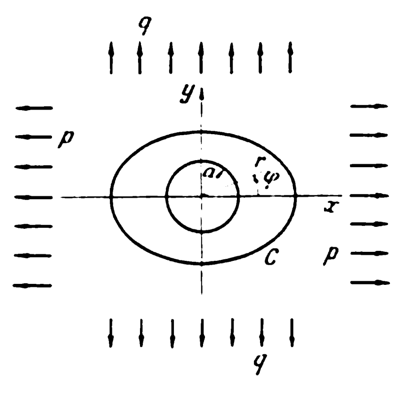


Fig. 140.

Pour construire la solution dans la zone élastique, appliquons la fonction des contraintes $F = F(x, y)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}.$$

Dans les coordonnées polaires, les composantes de la contrainte sont exprimées à l'aide de la fonction des contraintes $F = F(r, \varphi)$ par les formules:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial \varphi}. \tag{48.2}$$

On voit aisément qu'à la solution (48.1) correspond la fonction « plastique » des contraintes F_p:

$$\frac{1}{k} F_p = -\frac{1}{2} r^2 + r^2 \ln \frac{r}{a}. \tag{48.3}$$

Dans la zone élastique, la fonction des contraintes F_e satisfait à l'équation biharmonique. D'ailleurs toute fonction biharmonique peut être représentée par la formule de Goursat

$$F = \operatorname{Re}\left[\bar{z}\Phi_*(z) + \Psi_*(z)\right], \tag{48.4}$$

où $\Phi_*(z)$, $\Psi_*(z)$ sont les fonctions analytiques de la variable complexe $z = x + iy$. Comme toujours, la grandeur complexe conjuguée est représentée par un trait. Les composantes de la contrainte sont calculées suivant les formules de Kolossov — Mouskhélichvili

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi_1(z),$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right], \tag{48.5}$$

où l'on a posé

$$\Phi_1(z) = \Phi_*'(z), \quad \Psi_1(z) = \Psi_*''(z).$$

Pour simplifier l'ècrifure on utilisera par la suite les opérateurs L et M correspondant aux expressions (48.5), à savoir:

$$L(F)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$M(F)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Il faut appliquer les conditions aux limites pour déterminer les fonctions analytiques Φ_1 et Ψ_1. En particulier, sur la frontière inconnue C des zones élastique et plastique les contraintes doivent être continues.

2. Solution de L. Galine [91]. On s'assure aisément que la fonction plastique des contraintes F_p, écrite ci-dessus pour le champ à symétrie axiale, satisfait à l'équation biharmonique. Cette propriété permet d'élaborer une solution fermée élégante pour le problème envisagé à l'aide d'une représentation complexe (48.4).

Introduisons une nouvelle fonction biharmonique: $F = F_e - F_p$, où F_p est définie par la formule (48.3) et peut être représentée également sous la forme (rappelons que $z = re^{i\varphi}$):

$$F_p = k\,\mathrm{Re}\left[z\bar{z}\left(\ln\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{48.6}$$

Il est évident que

$$L(F) = L(F_e) - L(F_p),\quad M(F) = M(F_e) - M(F_p).$$

Formulons les conditions aux limites pour la fonction F. Notons, tout d'abord, qu'à l'infini:

$$L(F_e)=q+p,\quad M(F_e)=q-p,$$

$$L(F_p)=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)F_p=2k\left(1+2\ln\frac{r}{a}\right),$$

$$M(F_p)=2k\frac{\bar{z}}{z}=2ke^{-2i\varphi}.$$

Donc, à l'infini, $L(F)$ et $M(F)$ tendent vers les expressions

$$L(F)=q+p-2k\left(1+2\ln\frac{r}{a}\right),$$

$$M(F)=q-p-2ke^{-2i\varphi}.$$

Par suite de la continuité des contraintes, nous aurons sur le contour inconnu C:

$$L(F) = 0,\quad M(F) = 0. \tag{48.7}$$

Représentons maintenant le domaine élastique dans le plan z (c.-à-d. l'extérieur de C) sur l'extérieur du cercle unité γ du plan ζ. Supposons alors que le point infiniment éloigné du plan z passe

au point infiniment éloigné du plan ζ. La fonction de représentation $\omega(\zeta)$ aura alors la structure

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + g(\zeta),$$

où c est une constante positive réelle et $g(\zeta)$ une fonction analytique en dehors du cercle γ; on peut alors poser $g(\infty) = 0$.

La fonction de représentation peut être décrite par la série de Laurent

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}, \tag{48.8}$$

où les coefficients a_n sont réels par suite de la symétrie du contour C par rapport à l'axe des x.

Introduisons les notations

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1[\omega(\zeta)], \quad \Psi(\zeta) = \Psi_1[\omega(\zeta)].$$

Les formules (48.5) se réduisent alors à la forme:

$$\begin{aligned} L(F) &= 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta), \\ M(F) &= 2\left[\frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right]. \end{aligned} \tag{48.9}$$

Compte tenu du comportement de $L(F)$ et $M(F)$ à l'infini ainsi que des conditions (48.7) sur le contour γ, on en vient aux conditions suivantes pour définir les fonctions $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$:

$$4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta) = \begin{cases} 0 \text{ sur } \gamma, \\ p+q-4k\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{c}{a}-\ln|\zeta|\right) \text{ pour } \zeta\to\infty, \end{cases} \tag{48.10}$$

$$2\left[\frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right] = \begin{cases} 0 \text{ sur } \gamma, \\ q-p-2ke^{-2i\varphi_1}, \ \varphi_1 = \arg\zeta, \text{ pour } \zeta\to\infty. \end{cases} \tag{48.11}$$

Conformément aux conditions (48.10), la fonction $\Phi(\zeta)$ présente la structure

$$\Phi(\zeta) = -k\ln\zeta + h(\zeta), \tag{48.12}$$

où $h(\zeta)$ est une fonction analytique en dehors du cercle unité γ et qui est limitée à l'infini; sa partie réelle étant nulle sur γ, $h(\zeta)$ sera donc partout nécessairement nulle. Confrontant alors (48.12) avec la condition à l'infini, on aboutit à l'exigence

$$p+q-4k\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{c}{a}\right) = 0,$$

d'où il découle que

$$c = a \exp\left(\frac{p+q}{4k} - \frac{1}{2}\right). \tag{48.13}$$

Ensuite, pour $\zeta \to \infty$, on a $\omega(\zeta) = c\zeta$, $\omega'(\zeta) = c$. Portant ces valeurs dans la condition (48.11), on obtient que pour $\zeta \to \infty$

$$2\left[-k\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} + \Psi(\zeta)\right] = q - p - 2ke^{-2i\varphi_1}.$$

Etant donné que $2k\bar{\zeta}/\zeta = 2ke^{-2i\varphi_1}$, il y aura alors à l'infini

$$\Psi(\zeta) = \frac{q-p}{2}. \tag{48.14}$$

Par hypothèse, on a sur le cercle unité γ:

$$\Psi(\zeta) = \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\frac{k}{\zeta}. \tag{48.15}$$

Vu que $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ sur le cercle unité, on aura sur γ:

$$\bar{\omega}(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n.$$

Par conséquent, la condition (48.15) peut être représentée sous la forme

$$\frac{c}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n = \frac{1}{k}\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\zeta. \tag{48.16}$$

Le deuxième membre est une fonction qui est analytique en dehors du cercle unité, sauf en un point infiniment éloigné où l'on trouve un pôle de premier ordre, car pour $\zeta \to \infty$ on a:

$$\frac{1}{k}\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\zeta = \varkappa c\zeta, \quad \varkappa = \frac{q-p}{2k}. \tag{48.17}$$

Pour définir les facteurs de décomposition a_n formons le produit de l'égalité (48.16) par ζ^{-m-1} ($m = 1, 2, 3, \ldots$) et intégrons suivant le contour du cercle unité:

$$\int_\gamma \left[\frac{c}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n\right]\zeta^{-m-1}\,d\zeta = \int_\gamma \left[\frac{1}{k}\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\zeta\right]\zeta^{-m-1}\,d\zeta.$$

Le théorème des résidus de Cauchy nous donne:

$$\int_\gamma \left[\frac{c}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n\right]\zeta^{-m-1}\,d\zeta = 2\pi i a_m.$$

D'autre part, la quantité $\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\zeta^{-m}$ est une fonction analytique sur tout le plan en dehors de γ; donc, l'intégrale prise

sur γ doit être égale à l'intégrale prise sur le cercle de grand rayon, c'est pourquoi

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\infty} \frac{1}{k} \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \zeta^{-m} d\zeta.$$

Calculant cette intégrale, on trouve que

$$a_m = \begin{cases} \varkappa c & \text{pour } m = 1, \\ 0 & \text{pour } m > 1. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\omega(\zeta) = c\left(\zeta + \frac{\varkappa}{\zeta}\right). \quad (48.18)$$

Comme on le sait, cette fonction représente l'extérieur d'une ellipse et la frontière C sera donc elliptique (fig. 141). Calculant conformément à (48.15) la fonction Ψ sur le contour du cercle unité, on obtient :

$$\Psi(\zeta) = k\frac{1+\varkappa\zeta^2}{\zeta^2-\varkappa}.$$

Pour $\varkappa = 1$, la contrainte τ_{max} sera égale à k à l'infini et l'ensemble du plan sera dans un état plastique. Il convient donc de considérer que $\varkappa < 1$; les pôles de Ψ se trouveront alors à l'intérieur de γ et $\Psi(\zeta)$ sera réellement régulière en dehors de γ.

L'équation de l'ellipse C est de la forme

$$\frac{x^2}{c^2(1+\varkappa)^2} + \frac{y^2}{c^2(1-\varkappa)^2} = 1.$$

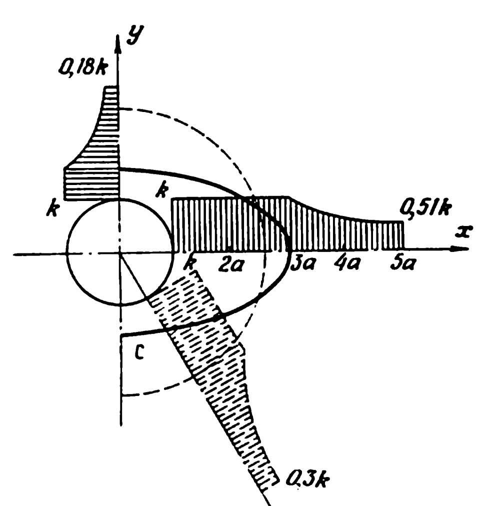


Fig. 141

La solution est possible si la zone plastique entoure complètement l'ouverture. Cette condition est vérifiée pour

$$c(1-\varkappa) > a.$$

Il en découle qu'il n'y a pas de grande différence entre les contraintes p et q à l'infini. Dans le domaine élastique, les contraintes sont calculées d'après les potentiels trouvés Φ et Ψ. Renvoyant le lecteur à l'article de L. Galine, présentant une analyse détaillée du problème, citons quelques résultats des calculs du champ des contraintes pour le cas $p = 2{,}4k$ et $q = 3{,}0k$. Les demi-axes de l'ellipse y seront respectivement égaux à $3{,}04a$ et à $1{,}64a$. Le

long des axes des x, y, les courbes de distribution de l'intensité des contraintes tangentielles sont tracées en lignes pleines (fig. 141). Le cercle de rayon $2,72a$, qui est la ligne de partage dans le problème élasto-plastique à symétrie axiale (pour $p = q = 3k$), est montré en pointillé à titre de comparaison; la distribution de l'intensité des contraintes tangentielles le long du rayon vecteur est tracée également en pointillé.

3. **Considérations finales.** Dans la solution exposée ci-dessus, on utilise largement la propriété de biharmonie de la fonction des contraintes dans la zone plastique confinant à l'ouverture circulaire. Pour certaines conditions supplémentaires, la solution de L. Galine est généralisée pour le cas du milieu plastique non homogène (A. Kouznetsov) et pour celui du champ thermique non uniforme (V. Fomine). La méthode de solution approchée des problèmes élasto-plastiques pour le plan à fente a été développée par P. Perline dans l'énoncé inverse (pour une zone plastique donnée). Les méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe sont appliquées également dans les publications récentes de G. Tchérépanov; on notera par ailleurs que la condition de biharmonie de F_p n'y est pas utilisée.

49. ÉCOULEMENT PLASTIQUE PERMANENT. ÉTIRAGE D'UNE BANDE

1. **Ecoulement plastique permanent.** Dans les paragraphes précédents (40 à 47), on a envisagé les problèmes relatifs à l'évaluation de la portance, qui sont liés aux problèmes de la résistance des constructions. On a pu de la sorte se borner à l'étude des petites déformations.

Un autre domaine important de l'application de la théorie de la plasticité est celui qui se rapporte à l'analyse des processus technologiques continus de traitement des métaux par pression (laminage, étirage, extrusion, usinage, etc.) qui sont d'un usage courant dans l'industrie. Les faits les plus intéressants y sont la prévision de forces nécessaires à la réalisation du processus de traitement donné et l'analyse des déformations connexes. Il est naturel de supposer que, dans les problèmes de ce type, les contraintes et les vitesses restent invariables en chaque point fixe de l'espace.

En guise d'exemple, nous envisagerons l'étirage d'une bande (fig. 142). Cette dernière, d'épaisseur initiale H, est tirée à une vitesse constante U à travers une fente rigide de plus en plus étroite (matrice); par suite des déformations plastiques subies par la bande lorsqu'elle passe à travers la fente, son épaisseur diminue jusqu'à la valeur h et sa longueur augmente en conséquence; la partie de la bande qui se trouve à gauche de la matrice se déplace à une vitesse constante $V < U$. Les champs de vitesses et de contraintes ne changent pas avec le temps (sont stationnaires); enfin, on peut considérer les parties de la bande éloignées de la matrice comme non déformables.

15—0653

Un exemple de *pressage* (ou refoulement) d'une feuille d'un container passant par une fente (matrice) est montré sur la figure 143, *a*. A la différence du cas précédent, l'effort (pression) y sera

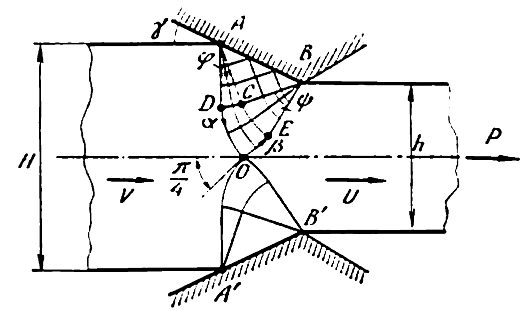


Fig. 142

appliqué à la partie large de la feuille. Une feuille de métal d'épaisseur h s'écoule de la fente. Les zones de déformation plastique sont hachurées sur la figure 143, *a*.

Le phénomène de pressage présente de nombreuses variétés. Un exemple de *pressage inverse* (poinçonnage) est montré sur la

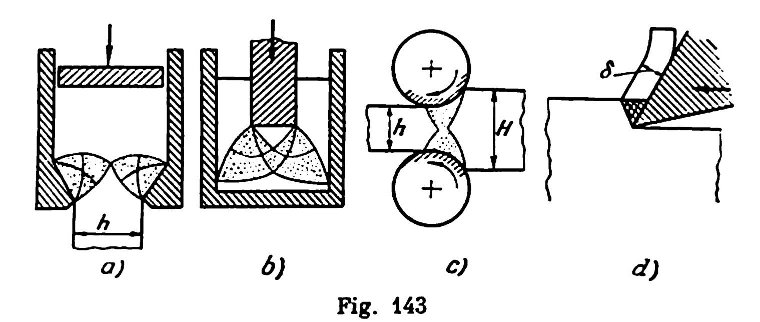


Fig. 143

figure 143, *b*. Il réside en ce qu'un outil rigide (poinçon) 'enfonce dans le métal qui se trouve dans un container. Le métal s'écoule alors vers le haut de part et d'autre du poinçon.

Le *laminage*, couramment utilisé dans diverses modifications, présente une grande importance. La variante la plus simple du laminage est montrée sur la figure 143, *c*. Les cylindres tournant en sens inverse entraînent une feuille d'épaisseur H et l'aplatissent jusqu'à l'épaisseur h.

On peut également considérer les différents procédés d'*usinage* (tournage, rabotage, perçage, etc.) comme un écoulement plastique permanent. Le schéma du traitement d'une surface plane est montré

sur la figure 143, *d*. Le copeau d'une épaisseur δ se déplace suivant la face d'attaque de l'outil. La zone de déformation plastique (hachurée sur le dessin) est localisée au voisinage immédiat de l'arête tranchante de l'outil. Dans toutes les autres parties de la pièce et du copeau on peut considérer le métal comme rigide.

L'analyse des différents procédés technologiques, fondée sur les solutions du problème plan, occupe une place importante dans les monographies de R. Hill [47], V. Sokolovski [33], W. Prager [56], ainsi que dans de nombreux articles publiés dans les revues périodiques.

Les problèmes de l'écoulement plastique permanent sont étroitement liés aux particularités des procédés technologiques et doivent faire l'objet d'un examen spécial. Notons que les méthodes approchées (unidimensionnelles) du calcul des phénomènes continus ont reçu un développement considérable. Nous mentionnerons ici les livres de Hoffmann et Sachs [49] et de A. Tomlionov [39], consacrés au calcul des différents procédés technologiques relatifs au traitement des métaux par pression. On peut y trouver aussi des références bibliographiques complémentaires.

Revenant au cas général, nous noterons que le domaine, occupé par le milieu, se divise en zones rigide et plastique; le schéma du corps rigide-plastique est parfaitement applicable puisque les déformations plastiques sont grandes. Les grandes déformations sont liées au développement de l'écrouissage; cependant, on part en général du schéma d'écoulement parfait en prenant une valeur moyenne quelconque pour la constante k. Il y a une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et théoriques pour les procédés de traitement des métaux à froid lorsque l'écrouissage est négligeable, et la différence maximale entre les efforts calculés et expérimentaux est de 10 %.

Dans les procédés de traitement des métaux à chaud, les variations de température exercent une grande influence et les données expérimentales peuvent différer ici notablement de celles théoriques.

Dans la plupart des problèmes téchnologiques de l'écoulement plastique permanent on a affaire aux conditions de contact aux limites. Il est généralement difficile de deviner la distribution de la pression sur les lignes de contact. On n'y parvient que dans les cas les plus simples (en particulier, quand les lignes de contact avec l'outil sont des droites). En général, on doit d'ailleurs envisager conjointement les équations pour les contraintes et les vitesses (cf. paragraphe 51).

Le problème portant sur l'étirage d'une bande passant par une matrice conique lisse est examiné plus bas; la méthode semi-inverse s'avère ici efficace.

2. Etirage d'une bande. La bande (d'épaisseur initiale H) est tirée à une vitesse U à travers une ouverture (une matrice) rigide et lisse rétrécissante. La bande éprouvera alors une déformation plastique dans le domaine contigu à la matrice, et l'épaisseur de la bande décroîtra jusqu'à la valeur h. L'angle entre les plans de la

fente est égal à 2γ (fig. 142). A une certaine distance de la fente, les parties de la bande se déplacent à la manière d'un solide aux vitesses U et V. Par suite de l'incompressibilité du matériau la vitesse $V = \frac{h}{H} U$.

Pour des raisons de simplicité on néglige le frottement (il est facile de tenir compte de la force de frottement constante) et la contrainte de contact sera donc normale à AB. Admettons que la pression uniforme p agit le long de AB et montrons que toutes les conditions seront alors satisfaites.

Le triangle ABC est alors le domaine de l'état de contrainte homogène; raccordons les champs centrés ACD et BCE le long de AC et BC, les angles φ et ψ étant encore inconnus. L'état de contrainte dans ces domaines dépend de la pression cherchée p. Pour le quadrilatère $CDOE$, on a le problème caractéristique initial selon les données sur les lignes de glissement CD et CE. Pour des raisons de symétrie, le point O se trouve sur la ligne axiale de la bande, tandis que les lignes de glissement coupent l'axe sous un angle de 45°. Ces conditions déterminent les valeurs des angles φ, ψ. En particulier, il découle de la deuxième condition que

$$\gamma = \psi - \varphi. \tag{49.1}$$

En effet, dans le triangle ABC on a $\theta = -\frac{\pi}{4} - \gamma$, quant à la valeur de la pression moyenne, on la désigne par σ'; les paramètres ξ, η sont constants et égaux respectivement à $\xi' = \frac{\sigma'}{2k} + \frac{\pi}{4} + \gamma$, $\eta' = \frac{\sigma'}{2k} - \frac{\pi}{4} - \gamma$. Ensuite, dans le domaine ADC, on a $\eta = \text{const} = \eta'$; le long de AD on a $\theta = -\frac{\pi}{4} - \gamma - \varphi$, et la pression moyenne est constante; désignons-la par σ''. Comparant la valeur correspondante de η à la valeur de η' écrite ci-dessus, on trouve $\frac{\sigma''}{2k} = \frac{\sigma'}{2k} - \varphi$. Il y aura $\xi_D = \frac{\sigma'}{2k} + \varphi + \frac{\pi}{4} + \gamma + \varphi$ au point D.

De manière analogue, pour le domaine BCE, on a $\xi = \text{const} = \xi'$, sur BE la pression moyenne est $\frac{\sigma'''}{2k} = \frac{\sigma'}{2k} + \psi$ et la valeur du paramètre η au point E sera égale à $\eta_E = \frac{\sigma'}{2k} + \psi - \frac{\pi}{4} - \gamma + \psi$. Finalement, au point O on a $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et la pression inconnue est désignée par σ_0. Les valeurs correspondantes des paramètres ξ, η en O seront $\xi_0 = \frac{\sigma_0}{2k} + \frac{\pi}{4}$, $\eta_0 = \frac{\sigma_0}{2k} - \frac{\pi}{4}$. Mais le long de ADO $\xi = \text{const}$ et le long de BEO $\eta = \text{const}$, par conséquent, $\xi_0 = \xi_D$, $\eta_0 = \eta_E$, d'où découle immédiatement la relation (49.1).

Dans n'importe quelle section de la bande, à droite de BOB', la somme des composantes horizontales de la contrainte est égale à un effort d'étirage inconnu P; à gauche de AOA', cette somme est égale à zéro, car la partie gauche de la bande ne subit pas l'action des forces extérieures. Il est aisé de voir que

$$P = p\,(H - h).$$

On trouve la pression cherchée p et un des angles (φ par exemple) d'après les conditions suivant lesquelles la somme des composantes horizontales des contraintes est nulle suivant la section AOA' et le point O se trouve sur la ligne axiale. Cela nécessite des calculs numériques, car la solution pour le quadrilatère $ODCE$ est obtenue par intégration numérique. Les résultats des calculs pour divers angles γ et rapports $\frac{h}{H}$ sont cités dans l'ouvrage de Hill et Tupper. Une des relations construites (pour $\gamma = 15°$) est montrée sur la figure 144; l'effort d'étirage croît à mesure que l'on augmente la compression de la bande.

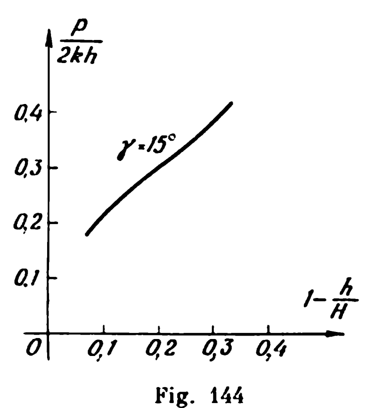


Fig. 144

Montrons maintenant que le champ des vitesses s'accorde avec le champ des contraintes envisagé. Les vitesses des parties rigides étant données, les composantes normales de la vitesse seront continues et, donc, connues le long de ADO et BEO. D'après ces données, on détermine sur DO et EO le champ des vitesses dans le quadrilatère $ODCE$. Ensuite, on trouve les vitesses dans les champs centrés et enfin dans le triangle ABC. Les composantes normales de la vitesse sont évidemment constantes le long des droites AD et BE; alors, conformément à (38.7), les composantes de la vitesse u et v sont constantes le long de chaque droite de glissement dans les champs centrés et u et v sont donc constantes sur AC et BC, mais alors en vertu de (38.6), les vitesses u et v sont constantes partout dans le triangle ABC.

Les équations du champ des vitesses sont fondées sur la condition d'incompressibilité; grâce à la relation $VH = Uh$ entre les vitesses des parties droite et gauche de la bande, le courant de la masse passant par ADO est égal au courant passant par BEO et, par suite, le courant passant par AB doit être nul. La vitesse étant constante dans le triangle ABC, elle est dirigée le long de la ligne

de contact AB [1], ce qui est une condition nécessaire de la régularité du champ des vitesses.

Notons que la composante tangentielle de la vitesse est discontinue le long des lignes de glissement ADO et BEO.

La solution trouvée est valable si, pour chaque γ, la compression relative $\frac{h}{H}$ n'excède pas une certaine valeur. Comme le montre clairement l'image géométrique, on aura un maximum pour $\varphi = 0$,

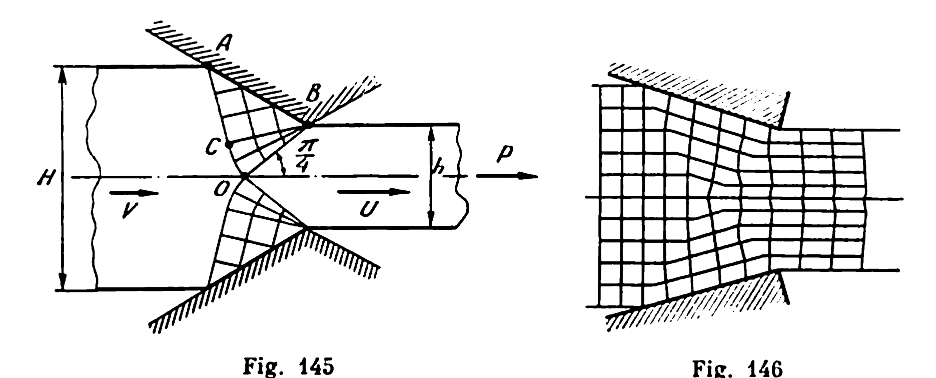


Fig. 145 Fig. 146

quand le quadrilatère $ODCE$ dégénère en un point O (fig. 145). Dans ce cas la solution est élémentaire et

$$\frac{P}{2kh} = \frac{2(1+\gamma)\sin\gamma}{1+2\sin\gamma}.$$

La déformation du réseau initialement carré, calculée pour $\varphi = 0$, $\gamma = 15°$, $\frac{h}{H} = 0{,}66$ d'après le champ des vitesses déterminé, est montrée sur la figure 146. La grandeur $2kh$ est égale à la charge limite pour la traction uniaxiale d'une bande lisse de largeur h. L'étirage est réalisable si $P < 2kh$ (sinon une rupture se produira dans la partie droite de la bande), d'où $\gamma \sin\gamma < \frac{1}{2}$, c.-à-d. $\gamma <$ $< 42°27' \equiv \gamma_1$.

Notons que nous avons pour le champ représenté sur la figure 145 la relation suivante:

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{1+2\sin\gamma}.$$

Si $\gamma < \gamma_1$, mais $\frac{h}{H}$ excède la valeur citée, la construction envisagée dans ce paragraphe est impossible; dans ce cas, la solution aura une autre forme.

[1] On peut ne pas supposer que la pression est uniforme; on voit aisément que la condition pour la vitesse sur AB n'est vérifiée que pour des lignes AC et BC rectilignes, mais alors la pression sur AB sera constante.

50. ÉCOULEMENT PLASTIQUE TRANSITOIRE À SIMILITUDE GÉOMÉTRIQUE. ENFONCEMENT DU COIN

1. Ecoulement plastique transitoire à similitude géométrique. A la suite des travaux de Hill, Lee et Tupper [47, 170], nous envisagerons une classe de problèmes relatifs à l'écoulement plastique transitoire, se prêtant à une analyse relativement simple. Il s'agit de problèmes dans lesquels le domaine plastique se transforme de sorte que sa configuration conserve tout le temps une similitude géométrique à une position initiale quelconque. Les exemples les plus simples sont les problèmes de la dilatation des cavités cylindrique et sphérique dans un espace illimité, les dimensions initiales des orifices étant nulles ; on donne ci-dessous la solution du problème sur l'enfoncement du coin.

Dans les problèmes de ce type, la déformation commence par un point ou par une ligne et le milieu n'est pas limité ne fût-ce que dans une seule direction.

2. Enfoncement d'un coin dur. Envisageons le problème de l'enfoncement d'un coin dur (indéformable) symétrique dont l'angle d'ouverture est de 2γ dans le milieu rigide-plastique limité par un plan. Le frottement à la surface de contact est absent (la surface est graissée).

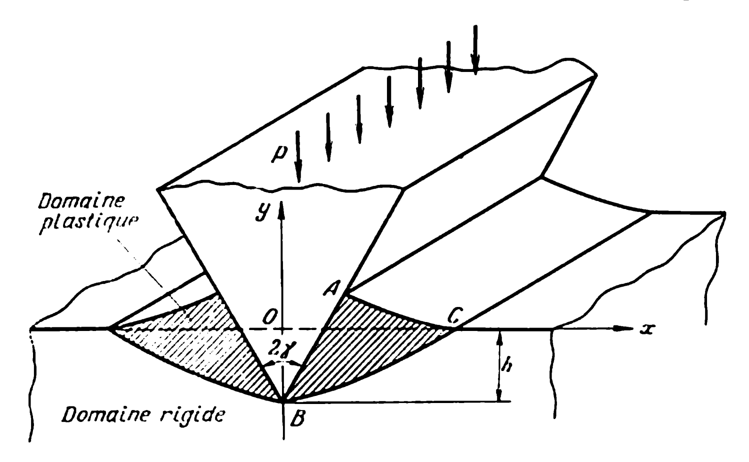


Fig. 147

Le milieu est refoulé de part et d'autre du coin lorsque celui-ci s'enfonce dans ce milieu, l'image de la déformation ayant l'aspect qui est schématiquement montré sur la figure 147. Le domaine hachuré ABC se trouve dans l'état plastique. Avec une approximation satisfaisante la ligne frontière AC est confondue avec une droite. Le champ de glissement peut être alors construit comme suit (fig. 148). Supposons que le long de AB la pression de contact p est constante ;

alors, comme le montrera clairement l'analyse ultérieure, toutes les conditions du problème seront satisfaites. Dans les triangles ABD et AEC, on aura alors un état de contrainte homogène. Désignons par h la profondeur de pénétration OB, par l la longueur de la génératrice AC (qui est égale à AB en vertu de l'égalité des triangles ABD

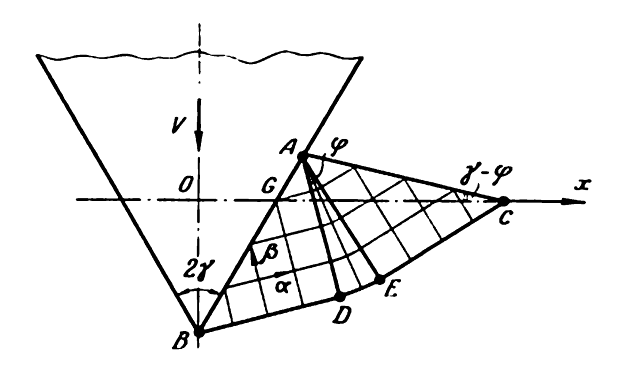


Fig. 148

et ACE); la pression p et la longueur l sont des inconnues. Les domaines de l'état de contrainte homogène sont réunis par le champ centré ADE dont l'angle d'ouverture est φ.

Dans le triangle ABD on a $\theta = \frac{\pi}{4} - \gamma$, et la pression moyenne sera désignée par σ'; le paramètre ξ y sera constant et égal à $\xi' = \frac{\sigma'}{2k} - \frac{\pi}{4} + \gamma$. Dans le triangle ACE on a $\theta = \frac{\pi}{4} - \gamma + \varphi$, $\sigma = -k$ et le paramètre ξ est constant et égal à $\xi'' = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \gamma - \varphi$. Dans l'ensemble du domaine plastique $\xi = \text{const}$, par conséquent, $\xi' = \xi''$, d'où l'on obtient:

$$\sigma' = -k\,(1 + 2\varphi). \tag{50.1}$$

La ligne AC forme l'angle $\gamma - \varphi$ avec l'axe horizontal; conformément au dessin

$$l \cos \gamma - h = l \sin (\gamma - \varphi). \tag{50.2}$$

Ici, γ, h sont des grandeurs données, la dernière relation établit donc une liaison entre l et φ. Finalement, en vertu de l'incompressibilité du milieu, les aires des triangles OBG et ACG sont égales, c.-à-d.

$$h^2 \operatorname{tg} \gamma = (l \cos \gamma - h)\,[l \cos (\gamma - \varphi) + (l \cos \gamma - h) \operatorname{tg} \gamma]. \tag{50.3}$$

Eliminant l/h entre les équations (50.2) et (50.3) et opérant des

simplifications, on obtient la relation

$$2\gamma = \varphi + \arccos \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

déterminant φ.

La pression p étant l'une des contraintes principales, elle sera donc égale à $\sigma' - k$ (paragraphe 31), c.-à-d.

$$p = -2k(1 + \varphi). \tag{50.4}$$

Dans la direction de l'axe des z, l'effort complet rapporté à l'unité de longueur du coin est égal à

$$P = 2pl \sin \gamma$$

et représente la fonction de l'angle γ et de la profondeur de pénétration h. La variation de p en fonction de γ est montrée sur la figure 149.

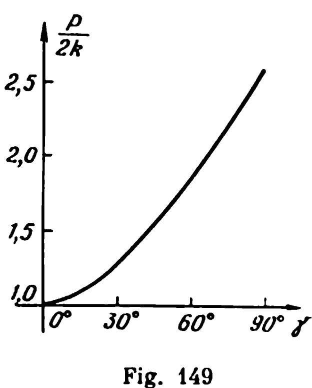


Fig. 149

Passons à l'analyse du champ des vitesses. Il est connu (paragraphe 38) que la vitesse v est constante le long de chacune des droites β; mais la composante normale de la vitesse étant nulle sur la ligne de partage $BDEC$ (la zone rigide du milieu est au repos), on aura $v = 0$ partout dans le domaine plastique. L'autre composante de la vitesse est $u = c + \psi(\rho)$ dans le champ centré et $u = u(\beta)$ dans les triangles de l'état de contrainte homogène; il est évident que la vitesse u est constante sur chacune des lignes α (constituées de segments de droites et d'arcs circulaires). Soit V la vitesse de pénétration du coin; projetant alors les vitesses V et u sur la normale à la ligne de contact AB, on trouve $u = \sqrt{2}V \sin \gamma$, c.-à-d. que la composante de la vitesse u est constante en chaque point du domaine plastique. Vu que $v = 0$, le module du vecteur vitesse est constant et égal à $\sqrt{2}\, V \sin \gamma$.

Il est difficile de définir directement la trajectoire d'une particule du milieu d'après le champ des vitesses trouvé, car ce dernier n'est pas fixe (à la différence du cas de l'écoulement permanent) et il faut tenir compte de la dilatation continue du domaine plastique et de la variation du champ des vitesses qui en découle.

Cette difficulté est surmontée à l'aide d'une transformation assez simple utilisant la condition de dilatation similaire du domaine plastique.

Soit $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur d'une particule M quelconque par rapport à l'origine des coordonnées O pour une profondeur de pénétration h.

Envisageons le plan Π^* sur lequel à un certain point M correspond le point M^* qui est défini par le rayon vecteur

$$r^* = \frac{1}{h} r. \qquad (50.5)$$

Vu la condition de similitude, le domaine de la déformation plastique sur le plan Π^* ne varie pas avec l'accroissement de h et la profondeur de pénétration du coin reste toujours égale à l'unité. Pour cette raison l'image fixée sur le plan Π^* est appelée *diagramme unitaire* (fig. 150). Avec l'introduction du coin dans le milieu la

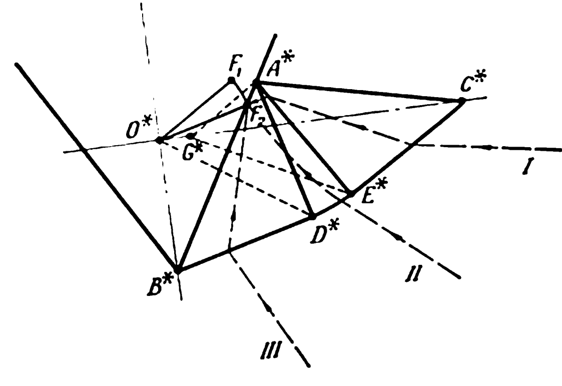


Fig. 150

particule M subit un certain déplacement. L'ensemble de la situation étant déterminé par la profondeur croissante h de la pénétration, on peut considérer cette profondeur comme un « temps ». La « vitesse » du point M sera alors égale à $v = \frac{dr}{dh}$.

Le mouvement de la particule M dans le plan physique implique le déplacement du point figuratif M^* sur le diagramme unitaire à la vitesse $v^* = \frac{dr^*}{dh}$. Par exemple, si dans le plan physique la particule M est immobile ($r = \text{const}$), alors sur le diagramme unitaire r^* décroît de façon inversement proportionnelle à h.

La dérivation de (50.5) par rapport au « temps » h donne

$$v^* = -\frac{1}{h}(r^* - v). \qquad (50.6)$$

Ainsi, la vitesse du point M^* est dirigée du point M^* vers le point dont le rayon vecteur est v et que nous conviendrons d'appeler le foyer. La valeur de la vitesse v^* est déterminée par le rapport de la distance entre le point figuratif M^* et le foyer (« distance focale ») à la profondeur de pénétration h.

Comme nous l'avons déjà noté, dans le problème en question le vecteur vitesse a une longueur constante de $\sqrt{2}V \sin\gamma$. Par la suite, pour des raisons de simplicité nous considérons que $V = 1$; si $V \neq 1$, les résultats définitifs changeront de façon proportionnelle. Les foyers se trouveront alors sur un cercle de rayon $\sqrt{2} \sin\gamma$ centré en O^*. La direction du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ variant très peu, de la direction B^*D^* dans le triangle $A^*B^*D^*$ à la direction E^*C^* dans le triangle $A^*C^*E^*$, on obtient sur le diagramme unitaire un arc de cercle F_1F_2 avec les rayons O^*F_1 et O^*F_2 parallèles à E^*C^* et B^*D^* respectivement. Le segment O^*F_2, égal à $\sqrt{2} \sin\gamma$, fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec la ligne A^*B^*.

Examinons l'image de la trajectoire de la particule M sur le diagramme unitaire. Tant que la ligne de partage $BDEC$ qui s'avance n'aura pas atteint M, la vitesse $\boldsymbol{v} = 0$ et, conformément à (50.6), le point figuratif M^* se déplace en ligne droite vers le centre O^* jusqu'à l'intersection avec la frontière $B^*D^*E^*C^*$. Le caractère du mouvement ultérieur du point figuratif dépend de la position du point d'intersection de cette frontière. Il convient de distinguer trois cas.

Dans le premier cas (ligne I en pointillé), l'intersection affecte un secteur de la frontière E^*C^* ; la vitesse $\boldsymbol{v}$ étant constante dans le domaine ECA, le point figuratif dans $E^*C^*A^*$ se déplace suivant une droite vers le foyer F_1 jusqu'à l'intersection de la ligne A^*E^*. Dans le secteur $A^*E^*D^*$, la vitesse $\boldsymbol{v}$ est variable, le foyer se déplace suivant l'arc de cercle de F_1 à F_2 et la trajectoire s'infléchit. Après avoir traversé la ligne A^*D^*, le point figuratif se déplace de nouveau suivant une droite mais cette fois vers le foyer F_2.

Dans le deuxième cas (ligne II), c'est l'arc de cercle D^*E^* qui est coupé ; dans le secteur $A^*E^*D^*$ la trajectoire s'infléchit ; après avoir franchi la ligne A^*D^* le point figuratif se déplace suivant une droite vers le foyer F_2.

Enfin, dans le troisième cas (ligne III) où on traverse le secteur B^*D^*, nous avons un mouvement simple dirigé suivant une droite vers le foyer F_2.

Dans le triangle $D^*B^*F_2$, le matériau, qui occupait tout d'abord le domaine $B^*D^*O^*$, se déplace dans la direction de O^*F_2. De manière analogue, dans le triangle $A^*E^*C^*$ le matériau, qui se trouvait initialement dans le triangle $G^*E^*C^*$, se déplace dans la direction de O^*F_1 (notons que $A^*G^* \parallel O^*F_1$). Dans ces domaines il se produit la déformation de cisaillement pur, parallèle à B^*D^* et à E^*C^* respectivement.

Le matériau occupant au début le domaine $E^*D^*O^*G^*$ subit une déformation complexe et passe dans le quadrilatère $E^*D^*A^*F_2$. La déformation d'un réseau initialement carré peut être calculée à l'aide du diagramme unitaire. Il faut pour cela trouver la position

finale (pour une profondeur de pénétration h) d'un angle initialement droit caractérisé dans l'état initial par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_0$. Soit

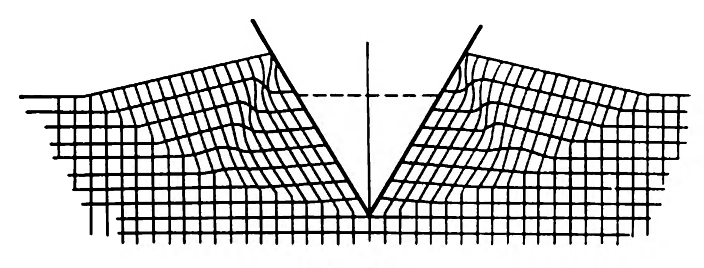


Fig. 151

$h_0 < h$ une certaine valeur pour laquelle la frontière de la zone plastique atteint le point $\boldsymbol{r}_0$; le point figuratif correspondant M_0^* sera défini par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_0^* = \frac{1}{h_0}\boldsymbol{r}_0$. Soient s la distance parcourue

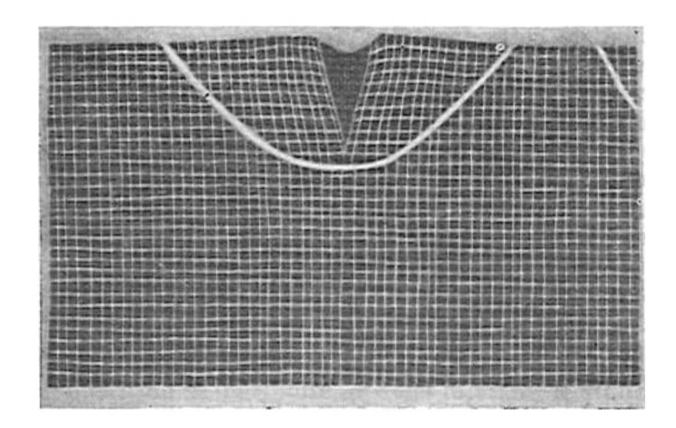


Fig. 152

à partir du point M_0^* le long de la trajectoire lorsque le coin atteint la profondeur h et $F(s)$ la distance focale; alors d'après (50.6)

$$\ln\frac{h}{h_0} = \int_0^s \frac{ds}{F(s)},$$

étant donné que la valeur de la vitesse du point figuratif est égale à $\frac{ds}{dh}$.

La relation obtenue définit s comme la fonction de h et, par conséquent, le rayon vecteur de la particule M est égal à $\boldsymbol{r} = h\boldsymbol{r}^*$.

Dans les triangles $D^*B^*F_2$ et $A^*C^*E^*$, l'intégrale est facile à calculer, car on y a $F(s) = d - s$, où d est la distance respective entre le point M_0^* et les foyers F_2, F_1 ; ici

$$\frac{h}{h_0} = \frac{d}{d-s}.$$

Dans le quadrilatère $E^*D^*O^*G^*$, on trouve l'intégrale par des méthodes numériques. La déformation d'un réseau initialement carré, calculée pour $\gamma = 30°$, est montrée sur la figure 151 ; on y voit bien les trois zones de déformation envisagées plus haut. On peut les distinguer également sur la photo (fig. 152) d'un réseau déformé que l'on obtient en enfonçant un coin d'acier graissé dans du plomb. Les points expérimentaux confirment la relation théorique (ligne pleine de la figure 153) entre le paramètre de pénétration $\frac{kh}{p}$ et l'angle γ.

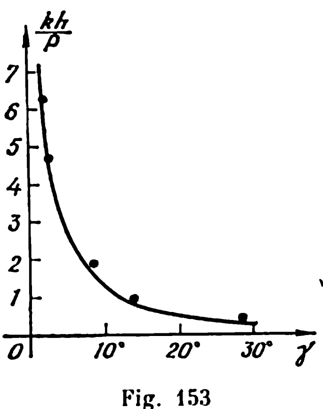


Fig. 153

D'autres problèmes de l'écoulement transitoire à similitude géométrique (pénétration en biais d'un coin dur, écrasement d'un coin plastique par un plan rigide, enfoncement d'un poinçon arrondi, etc.) ont été étudiés par Hill et d'autres auteurs [47].

51. SUR LA CONSTRUCTION DES CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE VITESSES HARMONISÉS

1. Sur la méthode semi-inverse. La méthode semi-inverse a été appliquée plus haut pour résoudre les problèmes rigides-plastiques. On a défini au début le champ de contraintes en devinant les conditions aux limites manquantes pour les contraintes. L'application de ce shéma pour les problèmes de contact est en général difficile. Un tel choix est néanmoins réalisable si les lignes de contact sont des droites et si l'on pose des conditions simples sur ces dernières (absence de frottement ou contrainte tangentielle constante).

Des exemples de tels problèmes de contact sont cités dans le paragraphe 45 (enfoncement d'un poinçon plat pour une pression considérée comme constante), le paragraphe 47 (étreinte d'une couche entre deux plaques ; on considère que la pression est constante sur le secteur OB, fig. 134) et le paragraphe 49 (problème relatif à l'étirage d'une bande ; la pression est supposée constante sur la surface de l'outil).

La méthode semi-inverse est inefficace si le contact s'exerce le long d'une ligne courbe, car il est pratiquement impossible de prédire

exactement la distribution des contraintes de contact. On peut parfois calculer ces contraintes en résolvant le problème mixte. En général, on utilisera le procédé de la construction conjointe des champs de contraintes et de vitesses, qui est indiqué dans les ouvrages de B. Drouianov [97] et V. Sokolovski [130].

2. Construction des champs de contraintes et de vitesses harmonisés. On suppose que, sur le plan physique x, y, on peut indiquer la structure du champ de glissement; à cette dernière répond une certaine image sur le plan des caractéristiques ξ, η. On construit tout d'abord le champ de vitesses. Les composantes de la vitesse u et v satisfont aux équations (38.10)

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{1}{2}v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}u=0. \tag{51.1}$$

Les lignes qui séparent le domaine plastique des domaines rigides sont des caractéristiques. Les vitesses de mouvement des parties rigides étant données, et la pente de la normale à la ligne de partage étant calculée à l'aide de $\theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$, on connaîtra les composantes normales de la vitesse (u ou v) le long de la ligne de partage. Bien que le réseau des lignes de glissement ne soit pas connu sur le plan physique x, y, on peut, sur la base des données indiquées, trouver les fonctions $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$. Les conditions aux limites pour les vitesses sur la ligne de contact seront alors redondantes et permettront de trouver sur le plan ξ, η l'image de la ligne de contact. Connaissant x et y le long de cette ligne, on connaît donc également les « coordonnées » $\bar{x}$, $\bar{y}$ (cf. paragraphe 33).

Pour $\bar{x}$, $\bar{y}$, nous avons les équations différentielles (33.3)

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}-\frac{1}{2}\bar{x}=0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\bar{y}=0. \tag{51.2}$$

Connaissant les valeurs limites $\bar{x}$, $\bar{y}$ le long de l'image de la ligne de contact on peut en fin de compte trouver les fonctions $\bar{x}$, $\bar{y}$ et, par conséquent x, y, c.-à-d. le réseau des lignes de glissement sur le plan physique.

En guise d'exemple, envisageons le schéma de la solution du problème sur l'enfoncement d'un poinçon convexe lisse dans une couche plastique qui se trouve sur un soubassement lisse [130]. On négligera le flambage de la surface de la couche au voisinage du poinçon. Celui-ci pénètre dans le matériau à la vitesse V; les domaines latéraux rigides s'écartent à la vitesse U. La construction proposée du champ de glissement est montrée sur la figure 154. La représentation de ce champ sur le plan des caractéristiques ξ, η est donnée sur la figure 155.

Le long de la ligne de partage OA_0B_0C (ou $OA_0'B_0'C'$) la composante normale de la vitesse est continue et on la calcule moyennant

U et l'angle $\theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$. Ainsi, le long du segment de la caractéristique $OA_0B_0C_0$ (ou $OA'_0B'_0C'_0$) la composante de la vitesse u (ou v) est connue. En résolvant successivement les problèmes caractéristiques pour les équations (51.1), on trouve $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ dans le domaine $OC_0C_2B_2C'_2C'_0O$ (fig. 155).

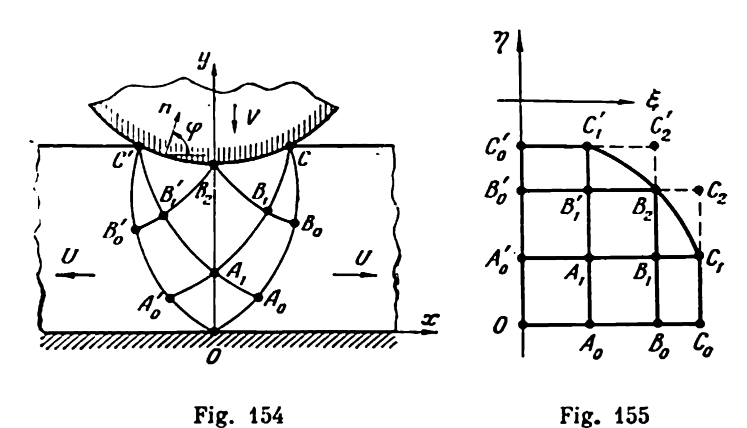


Fig. 154 Fig. 155

Le long de la ligne de contact $C'C$, la composante normale de la vitesse est égale à $v_n = -V \sin \varphi$ ou

$$u - v = V \sin \varphi. \tag{51.3}$$

Mais la contrainte tangentielle étant nulle sur la ligne de contact, les lignes de glissement s'approchent du contour sous des angles de $\pm\frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \theta - \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}(\eta - \xi) - \frac{3}{4}\pi$. La condition (51.3) définit alors, sur le plan caractéristique, la représentation de la ligne de contact par la courbe $C'_1B_2C_1$; les points C' et C se reflètent sur les segments $C'_0C'_1$ et C_0C_1. Les équations de la ligne de contact $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ étant données, on peut calculer les valeurs limites des fonctions $\bar{x}$, $\bar{y}$ (cf paragraphe 33) le long de $C'_0C'_1B_2C_1C_0$. Dans le domaine $C'_1A_1C_1$, les fonctions $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont définies par la solution du problème de Cauchy d'après les données sur l'arc $C'_1B_2C_1$. Pour les autres domaines nous aurons les problèmes caractéristiques.

Il convient de noter que l'on ne pourra trouver la solution que dans le domaine $OA_1B_2CB_0A_0O$ ayant recours aux conditions sur l'axe de symétrie Oy. Les problèmes aux limites pour les équations (51.1) et (51.2) peuvent être résolus par différents procédés. La plus simple sera la méthode des différences finies de Massot. Les fonctions u, v; $\bar{x}$, $\bar{y}$ satisfont à l'équation des télégraphistes. La solution analytique

des problèmes aux limites correspondants peut être obtenue également à l'aide de la formule de Riemann.

Pour ce qui est des détails des calculs, le lecteur pourra les trouver dans les ouvrages cités plus haut.

Exercices du chapitre V

1. Soit $\eta = \text{const} = \eta_0$ dans un domaine quelconque (état de contrainte simple); une des familles des lignes de glissement est la famille des lignes droites. Trouver l'équation de la deuxième famille des lignes de glissement (en tant que famille des lignes orthogonales).

2. Ecrire les formules nécessaires pour calculer les champs de glissement et de vitesses en prenant la pente de la corde selon la valeur de θ au point d'origine.

3. Trouver la charge limite pour le coin symétrique $(\widehat{2\gamma})$ à sommet tronqué, soumis à une pression uniforme sur l'élément de cisaillement (« écrasement du tranchant obtus »).

Réponse. $p_* = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$.

4. Trouver le moment fléchissant limite pour une bande affaiblie par des fentes angulaires disposées symétriquement (paragraphe 42,4), pour le champ du premier type.

Réponse. $M_* = M_*^0\left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$.

5. Trouver la charge limite à la flexion pour une console cunéiforme courte sollicitée par une force (paragraphe 43,4); on se bornera à examiner le champ de glissement du premier type.

6. Déduire la formule (41.2) pour la charge limite à la traction d'une bande à fentes angulaires.

7. Déduire la formule (41.5).

8. Trouver la charge limite pour une bande tendue munie de rainures angulaires profondes à base circulaire, ménagées symétriquement.

9. Trouver la charge limite pour une bande tendue munie de fentes rectangulaires.

10. Construire dans le problème sur la compression d'une couche un réseau de glissement dans le domaine $ABCB'$ (fig. 134) après avoir divisé l'arc AB en un petit nombre (4 à 5) de parties.

11. Calculer le champ de glissement dans le problème de l'étirage d'une bande pour le cas $1 - \frac{h}{H} = 0{,}2$, $\gamma = 15°$. Diviser les arcs circulaires DC et CE en un petit nombre (3 à 5) de parties.

12. Trouver la charge limite à la flexion d'une console limitée par des arcs de cercles de rayon R (fig. 123) pour le champ de glissement de deuxième type.

13. Idem, mais à condition que l'une des faces de la console soit rectiligne.

14. Trouver la charge limite à la flexion d'une console (fig. 118) sollicitée par une pression uniformément répartie sur la face supérieure (les champs seront asymétriques par rapport à l'axe des x et analogues aux figures 119, 120).

15. Touver la charge limite pour un demi-anneau circulaire $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, fléchi par des forces P qui sont tangentes aux extrémités $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

CHAPITRE VI

ÉTAT DE CONTRAINTE PLAN

52. ÉQUATIONS DE L'ÉTAT DE CONTRAINTE PLAN

1. Etat de contrainte plan. Dans ce cas les composantes de la contrainte σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} (dans le système de coordonnées x, y, z) sont nulles et les composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} sont indépendantes de la coordonnée z.

L'état de contrainte plan est réalisé de façon approximative dans une plaque mince qui se déforme sous l'action des forces se trouvant dans son plan moyen. Comparées aux autres composantes, les composantes de la contrainte σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} sont petites, car les faces latérales de la plaque $z = \pm\frac{h}{2}$ ne sont pas chargées et l'épaisseur h de la plaque est petite par rapport aux dimensions transversales. Pour cette même raison, les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} changent peu suivant l'épaisseur de la plaque. Par la suite, on désignera par σ_x, σ_y, τ_{xy} les valeurs moyennes des composantes correspondantes de la contrainte, prises sur l'épaisseur, tandis que les composantes σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} sont considérées comme nulles.

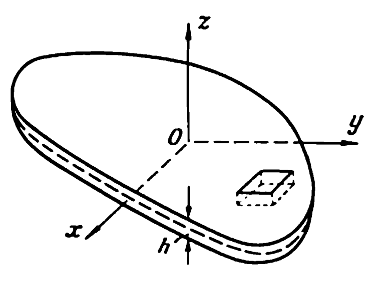


Fig. 156

Dans ces conditions, les équations différentielles d'équilibre de l'élément de la plaque (fig. 156) $h\,dx\,dy$, pour une épaisseur h constante et en l'absence de forces de volume, ont la forme:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{52.1}$$

2. Equations de l'état de contrainte plan pour la condition d'écoulement de von Mises. Dans le cas envisagé la condition de von Mises prend la forme

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2, \tag{52.2}$$

16—0653

ou bien dans les axes principaux

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_s^2.$$

La constante k est égale à la limite d'écoulement pour un cisaillement pur τ_s.

La dernière équation représente dans le plan σ_1, σ_2 une ellipse inclinée sous un angle de $\frac{\pi}{4}$ vers les axes des coordonnées (fig. 157) et découpant sur ces axes des segments σ_s, la valeur des contraintes principales ne pouvant être supérieure à $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s=2k$. Les demi-axes de l'ellipse sont respectivement égaux à $\sqrt{2}\sigma_s$ et $\sqrt{2}\tau_s$.

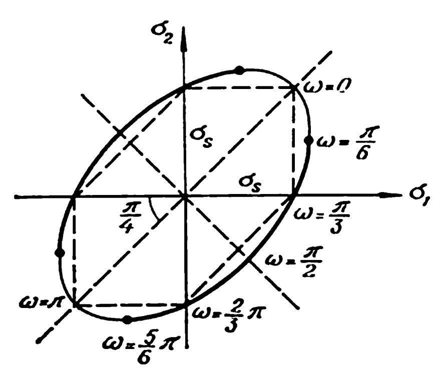


Fig. 157

Lorsque les déformations plastiques sont évoluées, on peut négliger les composantes de la déformation élastique dans les équations de l'écoulement plastique et partir des relations de Saint-Venant — von Mises (13.12) pour le corps rigide-plastique. Dans le problème en question, on peut écrire ces relations sous la forme (v_x et v_y étant indépendants de z):

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x}}{2\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\frac{\partial v_y}{\partial y}}{2\sigma_y-\sigma_x}=\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}}{6\tau_{xy}}. \tag{52.3}$$

On a maintenant, conjointement avec les équations d'équilibre (52.1) et la condition d'écoulement (52.2), un système de cinq équations pour cinq fonctions inconnues σ_x, σ_y, τ_{xy}, v_x, v_y.

3. Equations de l'état de contrainte plan pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant. Les contraintes tangentielles maximales se développent sur les différents éléments de surface en fonction du signe des contraintes principales σ_1, σ_2. Si σ_1, σ_2 sont de signes opposés, la contrainte tangentielle maximale, comme dans le cas de la déformation plane, est égale à

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2},$$

et s'exerce sur les éléments de surface normaux au plan x, y et divisant en deux l'angle fait par les axes principaux σ_1, σ_2 (fig. 158, a). On aura alors deux familles orthogonales de lignes de glissement sur le plan x, y.

Si, par contre, σ_1, σ_2 sont du même signe (par exemple $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ avec $\sigma_1 > \sigma_2$), la contrainte tangentielle maximale sera égale à

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_1$$

et agira sur les éléments de surface parallèles à l'axe σ_2 et inclinés sous un angle de $\frac{\pi}{4}$ vers le plan x, y (fig. 158, *b*). Les éléments de glissement laissent sur ce dernier plan une trace qui représente une famille de lignes que nous conviendrons également d'appeler lignes

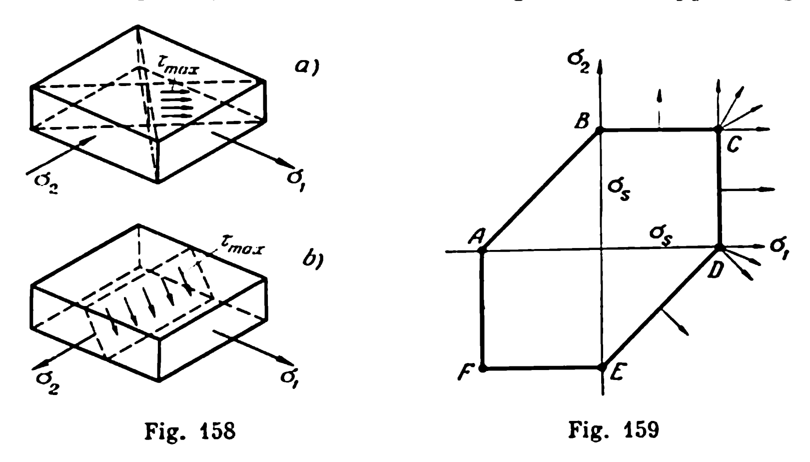


Fig. 158 Fig. 159

de glissement. La direction d'une telle ligne de glissement est confondue avec la direction principale σ_2. Par suite de ce qui précède la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant prend la forme

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm\sigma_s \text{ si } \sigma_1\sigma_2 \leqslant 0; \\ \sigma_1 = \pm\sigma_s \text{ ou } \sigma_2 &= \pm\sigma_s \text{ si } \sigma_1\sigma_2 \geqslant 0. \end{aligned} \quad (52.4)$$

Ces équations représentent sur le plan σ_1, σ_2 un hexagone (cf. ligne en pointillé, fig. 157) qui est inscrit dans l'ellipse de von Mises.

Le problème de la liaison existant entre les vitesses de déformation et les contraintes pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant a été discuté au paragraphe 16. Pour l'état de contrainte plan, on a $\sigma_3 = \sigma_z = 0$; la section du prisme hexagonal régulier représentant dans l'espace des contraintes σ_1, σ_2, σ_3 la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant par le plan $\sigma_3 = 0$ est l'hexagone envisagé plus haut. La normale au prisme n'est pas contenue dans le plan du dessin, cependant la projection de la normale est perpendiculaire aux côtés de l'hexagone (fig. 159). Par conséquent, le rapport des vitesses de déformation principales

$\xi_1 : \xi_2$ est égal au rapport des cosinus directeurs de la normale à l'hexagone au point envisagé. Ajoutant ici la condition d'incompressibilité

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \tag{52.5}$$

on peut trouver aussi la vitesse de déformation principale ξ_3.

Nous conviendrons d'appeler les points intérieurs des segments AB, BC, ... respectivement *régimes* AB, BC, ..., et les sommets A, B, ... de l'hexagone, *régimes* A, B, ... Envisageons plus en détail quelques cas typiques.

Le *cas* $\sigma_1\sigma_2 < 0$ correspond aux faces inclinées AB, DE (aux régimes AB, DE). Pour fixer les idées, arrêtons-nous *sur le régime* DE. Nous aurons alors $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, et la condition d'écoulement a la forme

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s. \tag{52.6}$$

D'après la loi associative (16.10), on obtient:

$$\xi_1 = \lambda, \ \xi_2 = -\lambda, \tag{52.7}$$

c.-à-d. $\xi_1 = -\xi_2$.

Il résulte maintenant de la condition d'incompressibilité:

$$\xi_3 = 0,$$

autrement dit, l'épaisseur de la plaque reste invariable. La quantité $\lambda \geqslant 0$ est une fonction inconnue que l'on détermine lors de la solution de chaque problème concret. Les équations citées sont valables également pour le cas de la déformation plane (paragraphe 31).

En effet, les lignes de glissement introduites dans le paragraphe 31 gardent leur signification. Soit un angle φ, formé par la première direction principale et l'axe des x, on a alors suivant des formules de transformation connues

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\xi_x \\ \xi_y\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2) \pm \frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2)\cos 2\varphi, \\ \eta_{xy} &= (\xi_1-\xi_2)\sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{52.8}$$

Dans le cas envisagé

$$\xi_x = \lambda\cos 2\varphi, \quad \xi_y = -\lambda\cos 2\varphi, \quad \eta_{xy} = 2\lambda\sin 2\varphi.$$

Eliminant λ, on en vient à l'équation (31.10)

$$\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}} = -\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

et à la condition précédente d'incompressibilité

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Ainsi, pour le régime *DE* envisagé, le système d'équations pour les contraintes et les vitesses coïncide avec le système d'équations dans le cas de la déformation plane.

Une conclusion analogue est vraie pour le régime *AB*.

Le *cas* $\sigma_1\sigma_2 > 0$ correspond aux faces verticales et horizontales de l'hexagone (fig. 159). Pour fixer les idées, posons $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, ce qui répond au *régime CD*. La condition d'écoulement est:

$$\sigma_1 = \sigma_s. \tag{52.9}$$

D'après la loi associative, l'écoulement ne se développe que dans la première direction principale, c.-à-d.

$$\xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = 0. \tag{52.10}$$

Il découle de la condition d'incompressibilité que

$$\xi_3 = -\xi_1. \tag{52.11}$$

Si l'on envisage le *régime BC*, on a

$$\sigma_2 = \sigma_s, \tag{52.12}$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \lambda, \tag{52.13}$$

avec

$$\xi_3 = -\xi_2. \tag{52.14}$$

Régime C. Adressons-nous maintenant au point anguleux *C*. Ici

$$\sigma_1 = \sigma_s, \ \sigma_2 = \sigma_s, \tag{52.15}$$

tandis que les vitesses de déformation sont des combinaisons linéaires à coefficients d'écoulement non négatifs λ_1, λ_2 dans les régimes voisins *CD* et *BC*, c.-à-d.

$$\xi_1 = \lambda_1, \ \xi_2 = \lambda_2, \ \xi_3 = -\lambda_1 - \lambda_2. \tag{52.16}$$

Les coefficients λ_1, λ_2 sont des fonctions inconnues qui sont déterminées lorsque l'on résout chaque problème concret; une fonction arbitraire complémentaire est introduite à cause de « deux conditions d'écoulement » (52.15) sur l'arête du prisme. Par suite de l'égalité des contraintes principales, nous avons:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Un écoulement analogue est réalisé dans le régime *F*.

Finalement, envisageons la traction uniaxiale répondant au *régime D*:

$$\sigma_1 = \sigma_s, \ \sigma_2 = 0. \tag{52.17}$$

Les vitesses de déformation seront des combinaisons linéaires avec des coefficients d'écoulement λ_1, λ_2 non négatifs dans les régimes voisins *CD* et *DE*, c.-à-d.

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \ \xi_2 = -\lambda_1, \ \xi_3 = -\lambda_2. \tag{52.18}$$

Les écoulements dans les autres régimes uniaxiaux *A*, *B*, *E* sont de la même forme.

4. Considérations finales. Les équations développées plus haut sont facilement généralisées pour le cas d'une plaque à épaisseur variable $h = h(x, y)$ à condition que celle-ci change lentement. Les équations différentielles d'équilibre prendront alors la forme:

$$\frac{\partial h\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial h\tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial h\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial h\sigma_y}{\partial y}=0.$$

Notons ensuite que l'état de contrainte plan est réalisé dans les voiles minces sans moment. Dans les voiles et les plaques soumises à la flexion, il existe un état de contraint eplan qui varie selon l'épaisseur (les composantes non nulles de la contrainte σ_x, σ_y, τ_{xy} dépendent de z, où z est compté suivant la normale vers la surface médiane).

53. SOLUTIONS OBTENUES POUR LA CONDITION D'ÉCOULEMENT DE VON MISES. SOLUTIONS DISCONTINUES

1. Généralités. La solution conjointe du système d'équations non linéaire (52.1), (52.2), (52.3) présente de grandes difficultés. Cependant, comme dans le cas de la déformation plane, la méthode semi-inverse s'avère souvent utile. Notamment, on peut essayer d'envisager la solution successive des équations pour les contraintes (52.1), (52.2) et des équations pour les vitesses (52.3). Si les contraintes sont déterminées, le système d'équations sera linéaire pour les vitesses v_x, v_y; il faut construire un champ de vitesses compatible avec le champ de contraintes trouvé.

2. Equations pour les contraintes. Examinons le système d'équations pour les contraintes (52.1), (52.2) étudié par V. Sokolovski.

On peut satisfaire à la condition d'écoulement (52.2) dans les axes principaux en posant

$$\sigma_1=2k\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_2=2k\cos\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right), \tag{53.1}$$

où $\omega = \omega(x, y)$ est une nouvelle fonction inconnue caractérisant la position du point sur l'ellipse (fig. 157). L'angle ω varie dans les limites de $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ à condition que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$. On voit aisément que l'angle ω est lié à la valeur de la pression moyenne $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$, à savoir:

$$\cos\omega=\frac{\sqrt{3}\,\sigma}{2k}. \tag{53.2}$$

On peut maintenant à l'aide des formules connues

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi, \quad \tau_{xy}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\varphi, \tag{53.3}$$

où φ est l'angle entre la première direction principale et l'axe des x, exprimer les composantes de la contrainte σ_x, σ_y, τ_{xy} au moyen des

fonctions ω, φ:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = k\left(\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\varphi\right), \quad \tau_{xy} = k\sin\omega\sin 2\varphi. \qquad (53.4)$$

Il en découle que (à la différence du cas de la déformation plane) les composantes de la contrainte sont limitées :

$$|\sigma_x| \leqslant 2k, \quad |\sigma_y| \leqslant 2k, \quad |\tau_{xy}| \leqslant k.$$

En portant les composantes de la contrainte dans les équations différentielles d'équilibre et en procédant à des transformations simples on obtient un système de deux équations pour deux fonctions inconnues: $\varphi(x, y)$, $\omega(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned}&(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \\ &\qquad + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} - 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,\\ &\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - \\ &\qquad - (\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (53.5)$$

Définissons le type de ce système en suivant la « méthode déterminante » (cf. Appendice). Soient des fonctions $\varphi = \varphi(s)$, $\omega = \omega(s)$ définies le long d'une ligne quelconque $x = x(s)$, $y = y(s)$. Pour la surface intégrale passant par L on a:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = d\varphi, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy = d\omega. \qquad (53.6)$$

Le long de L, le plan tangent à la surface intégrale est déterminé par les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}$ que l'on peut trouver à partir de (53.5) et (53.6), car, sur L, ce seront des équations linéaires algébriques par rapport aux dérivées mentionnées.

Si la ligne L est une caractéristique des équations (53.5), les dérivées sont alors indéterminées le long de cette ligne, par conséquent, le déterminant du système algébrique mentionné et les numérateurs appropriés se réduisent à zéro. Egalant à zéro le déterminant du système, on trouve les équations différentielles des lignes caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi \pm \Sigma(\omega)}{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega}, \qquad (53.7)$$

où on a introduit la notation

$$\Sigma(\omega) = \sqrt{3 - 4\cos^2\omega}.$$

Egalant à zéro les numérateurs, on obtient (après quelques transformations et intégration) les relations entre les fonctions inconnues φ, ω vérifiées le long des caractéristiques:

$$\Omega \pm \varphi = \text{const}, \tag{53.8}$$

où l'on a posé

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\omega} \frac{\Sigma(\omega)}{\sin \omega} d\omega. \tag{53.9}$$

Le système de départ (53.5) aura deux familles différentes de caractéristiques réelles (c.-à-d. qu'il sera *hyperbolique*) si $3 - 4\cos^2 \omega > > 0$, c.-à-d.

$$\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6}.$$

Les points d'hyperbolicité sur l'ellipse (fig. 157) remplissent sa plus grande partie qui est dessinée en lignes grasses.

Le système (53.5) n'aura qu'une seule famille de caractéristiques réelles (c.-à-d. qu'il sera *parabolique*) dans le cas où $\Sigma(\omega) = 0$, c.-à-d. si la fonction ω prend une des valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. Enfin, pour $3 - 4\cos^2 \omega < 0$, il n'y a pas de caractéristiques réelles, et le système (53.5) est du type *elliptique*. A ce type répondent les points intérieurs des arcs de l'ellipse qui sont représentés en lignes fines.

Il est aisé de voir que dans le domaine de l'hyperbolicité $|\sigma| < < \tau_{max}$, dans les points paraboliques $|\sigma| = \tau_{max}$ et dans le domaine elliptique $|\sigma| > \tau_{max}$. Le type du système d'équations est déterminé par la relation entre les valeurs de la pression moyenne et de la contrainte tangentielle maximale.

Ainsi, on peut trouver, dans la solution, des domaines hyperboliques, paraboliques et elliptiques, la frontière de la transition n'étant pas connue à l'avance. Cela crée de grandes difficultés pour résoudre les problèmes de l'état de contrainte plan par comparaison avec la solution des problèmes correspondants dans le cas de la déformation plane.

3. Cas d'hyperbolicité. Propriétés des caractéristiques. Considérons plus en détail les propriétés des solutions dans le domaine de l'hyperbolicité. Ici $\Sigma(\omega) > 0$, la fonction Ω est facile à calculer:

$$\Omega = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2\cos\omega}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{4\cos\omega + 3}{\Sigma(\omega)} - \\ - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{4\cos\omega - 3}{\Sigma(\omega)} < 0. \tag{53.10}$$

On envisage les valeurs principales des fonctions trigonométriques inverses $\left(\text{dans l'intervalle } -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. La courbe de la fonction

$-\Omega$ est représentée sur la figure 160. Introduisons une nouvelle fonction inconnue $\psi(x, y)$ égale à

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\operatorname{cotg} \omega}{\sqrt{3}}. \qquad (53.11)$$

Les équations des caractéristiques prennent alors la forme

$$(\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi), \\ \Omega - \varphi = \text{const} \equiv \xi; \end{array} \right\} \quad (\beta) \quad \left. \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi), \\ \Omega + \varphi = \text{const} \equiv \eta. \end{array} \right\} \qquad (53.12)$$

Les caractéristiques se coupent sous un angle de 2ψ (fig. 161) et forment un réseau de courbes non orthogonal qui, évidemment, ne coïncide pas avec le réseau des lignes de glissement. Les directions

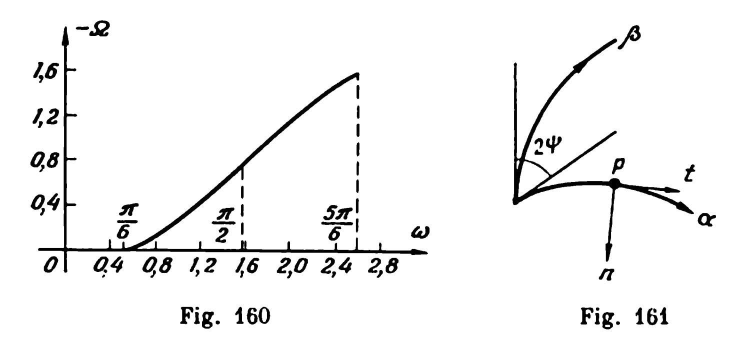


Fig. 160 Fig. 161

principales divisent en deux parties égales les angles situés entre les caractéristiques. Nous distinguerons les caractéristiques de ces deux familles, comme précédemment, par les paramètres α, β (ayant en vue qu'ils auront une valeur différente de celle qu'ils avaient dans le chapitre V). Les caractéristiques de la première famille (dites *caractéristiques* α) correspondent aux valeurs fixées du paramètre β ; le paramètre α est constant le long de la *caractéristique* β. L'angle d'intersection 2ψ varie en général d'un point à l'autre. Le paramètre ξ change lorsque l'on passe d'une caractéristique de famille α à une autre ; le paramètre η varie de façon analogue lorsque l'on passe d'une caractéristique de famille β à une autre.

Le long des caractéristiques les composantes de la contrainte sont liées par une condition simple (rappelons que, dans le cas de la déformation plane, les contraintes normales dans les directions caractéristiques sont égales à la pression moyenne σ, cf. paragraphe 31).

En effet, soient des composantes continues de la contrainte définies sur une ligne quelconque L. Traçons, en un point arbitraire P de la ligne L, un système de coordonnées t, n en dirigeant l'axe des t suivant la tangente à L et l'axe des n suivant la normale. Les

équations différentielles d'équilibre (52.1) et la condition d'écoulement (52.2) gardent leur ancienne forme dans ce nouveau système de coordonnées également. En un point P les dérivées $\frac{\partial\sigma_t}{\partial t}$, $\frac{\partial\sigma_n}{\partial t}$, $\frac{\partial\tau_{nt}}{\partial t}$ prises le long de L sont calculées. Partant des équations différentielles, on détermine les dérivées suivant la normale $\frac{\partial\sigma_n}{\partial n}$, $\frac{\partial\tau_{nt}}{\partial n}$. Quant à la dérivée $\frac{\partial\sigma_t}{\partial n}$, elle peut être trouvée à partir de la condition d'écoulement dérivée par rapport à n:

$$\frac{\partial\sigma_t}{\partial n}(2\sigma_t-\sigma_n)+\frac{\partial\sigma_n}{\partial n}(2\sigma_n-\sigma_t)+6\tau_{nt}\frac{\partial\tau_{nt}}{\partial n}=0$$

si $2\sigma_t - \sigma_n \neq 0$. Si la condition

$$2\sigma_t - \sigma_n = 0$$

est vérifiée, la solution du problème de Cauchy est impossible, et la ligne L est une caractéristique.

Une condition identique est satisfaite également le long des caractéristiques de la deuxième famille.

Les caractéristiques présentent une série de propriétés, analogues à certaines propriétés des lignes de glissement dans le problème de la déformation plane (paragraphe 32). Nous les citerons sans démonstrations détaillées que le lecteur reproduira facilement lui-même.

1) *Si l'on passe d'une caractéristique de famille β à une autre le long de toute caractéristique de famille α, la pente de la première direction principale φ et la fonction Ω varieront d'une même valeur* (analogue du premier théorème de Hencky).

Pour la démonstration, il suffira d'appliquer les relations

$$2\Omega = \xi + \eta, \quad 2\varphi = \eta - \xi. \tag{53.13}$$

2) *Si un segment quelconque de la caractéristique est une droite, le long de celle-ci seront constants ω, φ, l'angle d'intersection ψ, les paramètres ξ, η et les composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} de la contrainte.*

3) *Si un segment quelconque d'une caractéristique (par exemple de famille α) est une droite, tous les segments correspondants des caractéristiques de la même famille seront des droites; l'état de contrainte simple est réalisé dans un tel domaine et le paramètre η y est constant.*

En effet, prenons une construction analogue à celle de la figure 67; la caractéristique $A_{21}A_{22}$ étant rectiligne, il résulte de la première propriété que $\varphi_{11} = \varphi_{12}$, $\Omega_{11} = \Omega_{12}$, mais alors $\omega_{11} = \omega_{12}$, $\psi_{11} = \psi_{12}$. Les caractéristiques β coupent la droite α sous le même angle (qui varie, bien sûr, d'une ligne α à l'autre).

4) *Si les deux familles de caractéristiques sont rectilignes, les contraintes, dans un tel domaine, sont distribuées uniformément et les paramètres ξ, η sont constants.*

Le système des équations différentielles (53.5) est réductible et se linéarise par inversion des variables (de manière analogue à la déformation plane). Aux états de contrainte simple et homogène correspondent les intégrales:

1. ξ = const,
2. η = const,
3. ξ = const, η = const.

Il convient pour la solution, comme dans le cas de la déformation plane, d'examiner différents problèmes aux limites. Dans le cas général, on construit le champ des caractéristiques par des méthodes numériques (ou graphiques), similaires à celles exposées dans le chapitre précédent, les relations de base étant alors les équations des caractéristiques (53.12).

Pour les états de contrainte simples, les problèmes aux limites ont une solution élémentaire.

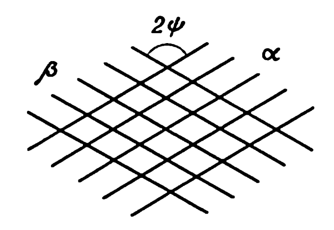


Fig. 162

4. Etats de contrainte simples. Envisageons plus en détail les états de contrainte simples jouant un rôle important dans les applications.

La solution la plus simple de ce type est l'*état de contrainte homogène*. Dans un tel domaine, le réseau des caractéristiques est formé par deux familles non orthogonales de droites parallèles (fig. 162) et les paramètres ξ, η sont constants ($\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$). Alors, $\Omega = \frac{1}{2}(\xi_0 + \eta_0)$, $\varphi = \frac{1}{2}(\eta_0 - \xi_0)$, avec ω et l'angle ψ calculés par la suite.

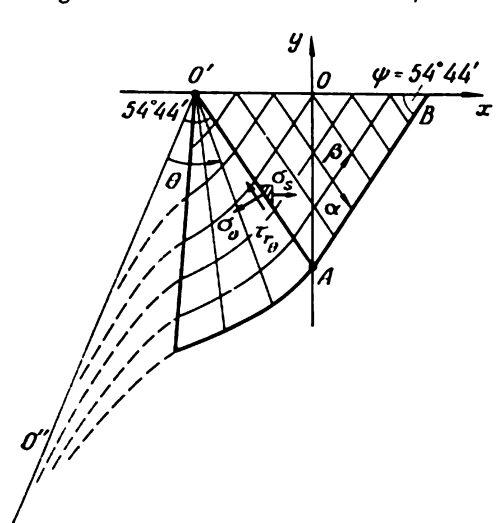


Fig. 163

Près de la frontière rectiligne libre il y aura toujours un champ de traction ou de compression uniaxiale uniforme de valeur $\sqrt{3}k$, parallèle à la frontière (fig. 163). Par exemple, si l'axe des x est parallèle à la frontière, on aura alors dans le domaine attenant $\sigma_x = \pm\sqrt{3}k$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. En effet, la normale au contour libre est confondue avec une des directions principales, $\varphi = 0$, et les points frontières

éprouvent soit une traction uniaxiale, soit une compression uniaxiale. Examinons le cas de la traction; on aura alors sur la frontière $\omega = \frac{\pi}{3}$ (fig. 157), c.-à-d. que le point figuratif se trouve dans le domaine d'hyperbolicité. Conformément à (53.11) on trouve que

$$\psi = 54°44' \equiv \psi_1.$$

Ainsi, le contour n'est pas une caractéristique, et nous avons le problème de Cauchy pour trouver le champ de contraintes au voisinage de la frontière. La solution est définie dans le domaine triangulaire $O'AB$.

Soit une contrainte normale uniforme p agissant sur la frontière rectiligne. La deuxième contrainte principale est calculée d'après la condition d'écoulement (52.2). Si l'état de contrainte à la frontière correspond aux points d'hyperbolicité sur l'ellipse (fig. 157), il est alors facile de construire la solution au voisinage de cette frontière par analogie au cas précédent (lorsque $p = 0$).

Dans l'état de contrainte simple, il n'y a qu'une seule famille de caractéristiques constituée des lignes droites. Comme dans le cas de la déformation plane (paragraphe 33), le théorème suivant est valable:

Seul un domaine à l'état de contrainte simple peut confiner au domaine présentant un état de contrainte homogène.

En effet, soit $O'A$ (fig. 163) la caractéristique marginale d'un domaine à l'état de contrainte homogène. Si, le long de $O'A$, un domaine de solution différente confine au domaine en question, en vertu de la propriété 3, exposée dans la division précédente, toutes les caractéristiques de la famille qui est celle de la caractéristique $O'A$ seront des droites.

Considérons plus en détail le cas particulier important où les caractéristiques rectilignes sont issues d'un seul centre (*champ centré*). Admettons que ce champ soit attenant au domaine $O'AB$ de la traction uniforme uniaxiale. Introduisons un système auxiliaire de coordonnées polaires r, θ avec le pôle en un point O' et un axe polaire $O'O''$ dont la position sera choisie par la suite.

Les équations différentielles d'équilibre en coordonnées polaires

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0, \quad (53.14)$$

et la condition d'écoulement

$$\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2+3\tau_{r\theta}^2=3k^2 \quad (53.15)$$

sont satisfaites si l'on prend

$$\sigma_r = k\cos\theta, \quad \sigma_\theta = 2k\cos\theta, \quad \tau_{r\theta} = k\sin\theta. \tag{53.16}$$

Il est évident que les contraintes sont constantes le long du rayon vecteur. Les composantes σ_θ, $\tau_{r\theta}$ de la contrainte seront nécessairement continues le long de la ligne de transition $O'A$ (d'après la condition d'équilibre de l'élément de la ligne $O'A$, cf. paragraphe 39). Examinant l'équilibre de l'élément triangulaire hachuré confinant à la frontière $O'A$ (fig. 163), on trouve aisément que $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, c.-à-d. que l'axe polaire $O'O''$ doit faire un angle de 54°44′ avec la ligne $O'A$. Dans ce système de coordonnées, l'équation des caractéristiques de la deuxième famille a une forme simple

$$r^2 \sin\theta = \text{const.} \tag{53.17}$$

Les caractéristiques curvilignes s'approchent asymptotiquement de $O'O''$ pour lequel $\theta = 0$; ceci est montré en pointillé sur la figure 163. Le long de $O'O''$, les deux familles de caractéristiques se confondent en une seule, et $\sigma_\theta = 2k$, $\sigma_r = k$ $\left(\text{le point parabolique } \omega = \frac{\pi}{6} \text{ sur l'ellipse de von Mises, fig. 157}\right)$.

5. **Champ à symétrie axiale.** Envisageons l'état de contrainte à symétrie axiale pour la condition $\tau_{r\theta} = 0$ (en l'absence de torsion). Les composantes σ_r, σ_θ de la contrainte seront alors les contraintes principales et conformément à (53.1) nous aurons:

$$\sigma_r = 2k\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_\theta = 2k\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right). \tag{53.18}$$

On a choisi ici la variante des formules (53.1) pour le cas $\sigma_\theta > \sigma_r$. Portant (53.18) dans l'équation d'équilibre

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{53.19}$$

on obtient l'équation différentielle

$$(\sqrt{3} + \operatorname{cotg}\omega)\, d\omega + 2\frac{dr}{r} = 0,$$

dont la solution a la forme

$$r^2 = \frac{C}{\sin\omega} e^{-\sqrt{3}\,\omega}, \tag{53.20}$$

où C est une constante arbitraire. Supposons, par exemple, que le contour d'ouverture $r = a$ (fig. 164) soit libre, c.-à-d. que l'on ait sur ce contour $\sigma_r = 0$, donc $\omega = \frac{\pi}{3}$ pour $r = a$. Il est aisé de

voir que

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin\omega}e^{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)}. \qquad (53.21)$$

Les axes r, θ étant les axes principaux, les relations (53.8) ont pour expression

$$\Omega \pm \theta = \text{const},$$

et, compte tenu de la relation (53.21), elles définissent les équations des caractéristiques dans la forme paramétrique. L'angle entre les caractéristiques décroît au fur et à mesure de l'éloignement du contour $r = a$ et les deux familles de caractéristiques se confondent en une seule (fig. 164) pour $\omega = \frac{\pi}{6}\left(\text{avec } \frac{r}{a} = 2{,}07\right)$.

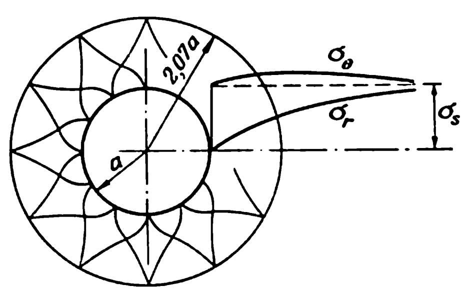


Fig. 164

Lorsque $\frac{r}{a} > 2{,}07$, la solution est déterminée par les mêmes formules (53.18), (53.20), mais il n'y a pas de caractéristiques réelles (domaine de l'ellipticité).

La distribution des contraintes σ_r, σ_θ est montrée sur la figure 164. Pour $r \to \infty$ on a $\omega \to 0$, et $\sigma_r \to \sigma_s$, $\sigma_\theta \to \sigma_s$, c.-à-d. que la plaque est sollicitée par une traction uniforme à l'infini.

6. Cas de parabolicité et d'ellipticité. *Dans les points de parabolicité* $\Sigma(\omega) = 0$, et alors ω a une valeur constante de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{5\pi}{6}$ (fig. 157). Les deux familles de caractéristiques (53.7) se confondent en une seule ($\psi = 0$). Il découle du système des équations différentielles (53.5) que $\varphi = \text{const}$. La famille de caractéristiques est une famille de droites parallèles. Ainsi, cette solution conduit aux états de contrainte homogènes de forme particulière, par exemple, seule la direction principale est arbitraire pour $\omega = \frac{\pi}{6}$, $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_2 = k$.

Dans le cas d'ellipticité, l'élaboration des solutions du système des équations non linéaires (53.5) est liée à de grandes difficultés; il n'y a pas de méthodes générales et les seules solutions existantes sont celles des problèmes à symétrie axiale.

7. Définition du champ de vitesses. Considérons maintenant le système d'équations (52.3) pour les vitesses en supposant, comme d'habitude, que l'état de contrainte soit connu; le système (52.3)

est alors linéaire à coefficients variables. Ecrivons ce système sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}(2\sigma_x-\sigma_y)\frac{\partial v_y}{\partial y}&=(2\sigma_y-\sigma_x)\frac{\partial v_x}{\partial x},\\(2\sigma_x-\sigma_y)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)&=6\tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\qquad(53.22)$$

Dans le domaine d'hyperbolicité des équations pour les contraintes, *les équations pour les vitesses seront elles aussi hyperboliques, les caractéristiques des deux systèmes étant confondues.*

En effet, soit une vitesse définie sur la ligne L qui n'est pas une ligne de discontinuité de la vitesse. En un point arbitraire P de la ligne L, traçons un système de coordonnées t, η en dirigeant l'axe des t suivant la tangente à L. Les équations (53.22) conservent leur forme dans le nouveau système de coordonnées également. Les dérivées $\frac{\partial v_t}{\partial t}$, $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ en un point P nous sont connues. Les dérivées $\frac{\partial v_t}{\partial n}$, $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ sont bornées et définies univoquement à partir des équations (53.22), sauf dans le cas où

$$2\sigma_t-\sigma_n=0.$$

Mais la condition $2\sigma_t-\sigma_n$ est vérifiée le long de la caractéristique de l'état de contrainte (cf. plus haut, division 3).

Donc, le problème de Cauchy pour les vitesses est insoluble le long de la ligne caractéristique de l'état de contrainte. *Les caractéristiques des équations pour les vitesses coïncident avec les caractéristiques des équations pour les contraintes.*

Ensuite, il découle des équations (53.22) que le long de la caractéristique

$$\frac{\partial v_t}{\partial t}=0,\qquad(53.23)$$

c.-à-d. *que la vitesse de l'allongement relatif est égale à zéro le long de la ligne caractéristique* (tout comme dans le cas de la déformation plane). Une condition identique est satisfaite également le long des caractéristiques de la deuxième famille. Ces conditions peuvent être exprimées par des relations différentielles, analogues aux équations de Geiringer et déduites par Hill [47].

8. **Lignes de discontinuité de vitesse.** Les solutions discontinues pouvant avoir lieu dans les domaines de l'hyperbolicité et de la parabolicité, présentent un intérêt notable dans l'état de contrainte plan tout comme dans le cas de la déformation plane. Considérons une ligne de discontinuité de la vitesse L quelconque. A la différence du cas de la déformation plane, dans l'état de contrainte

plan on doit admettre l'éventualité d'un saut non seulement dans la composante tangentielle mais aussi dans la composante normale de la vitesse. Un tel saut conduit soit à un rétrécissement brusque (fig. 165, *a*, « col »), soit à un épaississement brusque (fig. 165, *b*, « collet ») de la plaque le long de la ligne de discontinuité. Une telle ligne est une idéalisation mathématique de la formation locale d'un col, observée au cours des essais. Nous conviendrons donc d'appeler « col » une telle ligne de rupture; celle-ci doit être considérée

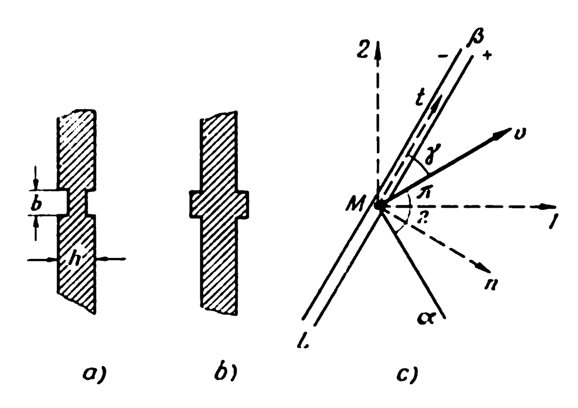


Fig. 165

comme la position limite d'une frange de déformation intense tout en estimant uniforme, conformément au schéma de l'état de contrainte plan, la vitesse de la déformation dans le col.

Etant lié par des conditions déterminées à l'état de contrainte, le saut de vitesse ne peut être arbitraire. Examinons ces conditions.

Soit un côté (+) du col L (fig. 165, *c*) se déplaçant par rapport à l'autre (—) à une vitesse $\boldsymbol{v}$. Désignons par b la largeur du col (à la limite $b \to 0$). Le vecteur $\boldsymbol{v}$ est incliné vers la ligne L sous un angle γ, ce qui signifie que les composantes tangentielle et normale de la vitesse sont discontinues. En un point arbitraire M du col, traçons un système de coordonnées local n, t, en dirigeant l'axe des t suivant la tangente; les composantes de la vitesse de déformation dans le col seront alors:

$$\xi_n = \frac{v_n}{b} = \frac{v \sin\gamma}{b}, \quad \xi_t = 0, \quad \eta_{nt} = \frac{v_t}{b} = \frac{v}{b}\cos\gamma, \qquad (53.24)$$

où v est le module de vitesse.

La vitesse de l'allongement dans la direction de α, perpendiculaire au vecteur vitesse, est évidemment nulle elle aussi: $\xi_\alpha = 0$. Par conséquent, les directions t et α sont des directions caractéristiques et l'angle entre elles est égal à 2ψ. Ainsi, *le vecteur discontinuité*

de la vitesse v *est incliné sous un angle*

$$\gamma = 2\psi - \frac{\pi}{2} \tag{53.25}$$

au col; la ligne de discontinuité passe par la caractéristique.

Les caractéristiques sont orthogonales lorsque $\gamma = 0$; on ne constate pas d'amincissement et seul un glissement relatif se manifeste. Cela aura lieu dans le cas de l'état de contrainte relatif au cisaillement pur $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$.

En se basant sur (53.24), on trouve aisément, par des procédés habituels, les vitesses principales de l'allongement dans le col:

$$\xi_1 = \frac{v}{2b}(1 + \sin\gamma), \quad \xi_2 = -\frac{v}{2b}(1 - \sin\gamma). \tag{53.26}$$

La troisième vitesse principale de déformation (dans la direction perpendiculaire au plan n, t) se déduit de l'équation d'incompressibilité

$$\xi_z = -\frac{v}{b}\sin\gamma.$$

Les directions principales 1, 2 divisent en deux parties égales les angles entre les caractéristiques.

La puissance de la déformation plastique par longueur unitaire du col est égale à

$$bh\dot{A}_p = bh(\sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2).$$

Portant les vitesses principales de déformation dans les relations de Saint-Venant — von Mises (13.12), on obtient les contraintes principales

$$\frac{\sigma_1}{k} = \frac{1+3\sin\gamma}{\sqrt{1+3\sin^2\gamma}}, \quad \frac{\sigma_2}{k} = -\frac{1-3\sin\gamma}{\sqrt{1+3\sin^2\gamma}}. \tag{53.27}$$

On verra aisément que

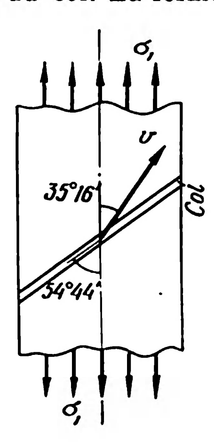
$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{3(\sigma_1-\sigma_2)}, \\ bh\dot{A}_p &= kvh\sqrt{1+3\sin^2\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{53.28}$$

Dans le cas parabolique les deux caractéristiques se confondent en coïncidant le long du col; ce dernier est dans un état de contrainte correspondant à l'un des points paraboliques sur l'ellipse (fig. 157).

Pour le point $\omega = \frac{\pi}{6}$, les contraintes $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_2 = k$ et l'angle $\gamma = \frac{\pi}{2}$; *il n'y a donc pas de saut de glissement et seule la composante normale de la vitesse présente une discontinuité*; seul un amincissement

se produit le long de la ligne de discontinuité. Pour le point $\omega = \frac{5\pi}{6}$, les contraintes $\sigma_1 = -k$, $\sigma_2 = -2k$, et l'angle $\gamma = -\frac{\pi}{2}$; il n'y a toujours pas de saut de glissement et seule la composante normale est discontinue; un épaississement se produit le long de la ligne de discontinuité.

Envisageons en guise d'exemple la *traction* d'une *éprouvette plane* (fig. 166) en supposant que le col occupe l'ensemble de sa section; nous avons ici $\sigma_2 = 0$, $\gamma = \arcsin \frac{1}{3} = 19°28'$ et $\psi = 54°44'$. Le vecteur discontinuité de la vitesse est incliné vers l'axe de l'éprouvette sous un angle de 35°16'. Le matériau est « rigide » de part et d'autre du col. La formation d'un tel col est constatée dans certaines conditions au cours des essais, sa pente à la direction de la traction étant de 55 à 60°. Cette question est traitée en détail dans la monographie de Nadaï [52] à laquelle nous devons la photo d'un col en formation (fig. 167).



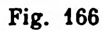


Fig. 166



Fig. 167

9. Lignes de discontinuité des contraintes. Les discontinuités des contraintes doivent satisfaire aux conditions d'équilibre et de plasticité. Profitons du dessin présenté dans le chapitre précédent (fig. 99). Considérons l'élément de la ligne de discontinuité L sur lequel agissent les composantes de la contrainte σ_n, τ_n, σ_t^+, σ_t^- ; σ_n, τ_n sont continues d'après les conditions d'équilibre et la discontinuité n'est possible que dans la composante normale σ_t. On trouve à partir

de la condition de plasticité (52.2):

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t^+ \\ \sigma_t^-\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_n}{2} \pm \sqrt{3\left(k^2 - \tau_n^2 - \frac{1}{4}\sigma_n^2\right)}\ . \tag{53.29}$$

Le saut de la composante σ_t est égal à

$$[\sigma_t] = \sigma_t^+ - \sigma_t^- = 2\sqrt{3\left(k^2 - \tau_n^2 - \frac{1}{4}\sigma_n^2\right)}.$$

L'angle de pente des caractéristiques varie brusquement sur la ligne de discontinuité des contraintes. Soient les angles δ^+ et δ^- (fig. 168) définissant la position des axes principaux de l'état de contrainte. Remplaçant φ par δ, on peut, à l'aide des formules (53.3), évaluer les composantes σ_t, σ_n, τ_{nt}. Les conditions de continuité de σ_n, τ_{nt} conduisent aux relations

$$\left.\begin{aligned} p^+ + \tau^+\cos 2\delta^+ &= p^- - \tau^-\cos 2\delta^-, \\ \tau^+\sin 2\delta^+ &= \tau^-\sin 2\delta^-, \end{aligned}\right\}$$

où par p et τ on désigne respectivement la demi-somme et la demi-différence des contraintes principales. En vertu de la condition d'écoulement (52.2), on a $p^2 + 3\tau^2 = 3k^2$.

Il résulte des relations citées que

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\delta^- &= \frac{2\sin 2\delta^+}{\cos 2\delta^+ + p^+/\tau^+}, \\ p^- &= \frac{1}{2}p^+ - \frac{3}{2}\tau^+\cos 2\delta^+. \end{aligned}\right\}$$

La grandeur τ^- est calculée au moyen de p^- selon la condition d'écoulement.

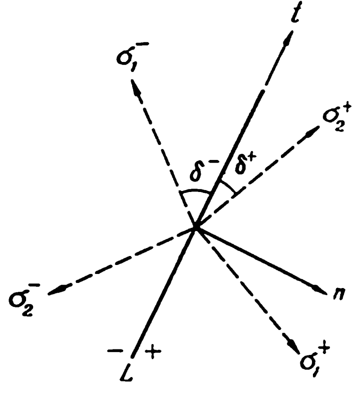


Fig. 168

Les composantes de la contrainte sont continues sur la ligne de discontinuité de la vitesse du fait que l'état de contrainte sur cette ligne (passant par la caractéristique) est déterminé par les formules (53.27).

Inversement, *le champ de vitesses est continu sur la ligne de discontinuité des contraintes* (car la discontinuité des contraintes est impossible si le champ était discontinu). Montrons ensuite que *la ligne de discontinuité des contraintes ne s'allonge pas.* En effet, d'après les équations de Saint-Venant — von Mises (13.12) on a:

$$\xi_t^+ = \lambda^+(\sigma_t^+ - \sigma^+),\quad \xi_t^- = \lambda^-(\sigma_t^- - \sigma^-).$$

Il découle de la continuité des vitesses que le long de la ligne de discontinuité $\xi_t^+ = \xi_t^-$, c.-à-d. $\lambda^+(2\sigma_t^+ - \sigma_n) = \lambda^-(2\sigma_t^- - \sigma_n)$.

En vertu de (53.29), les grandeurs entre parenthèses se distinguent par leur signe et, λ étant non négative, on a $\lambda^+ = \lambda^- = 0$, c.-à-d. $\xi_t = 0$.

10. Frontière rigide-plastique. Soit une ligne L quelconque séparant le domaine plastique du domaine rigide, ce dernier étant supposé au repos (cf. paragraphe 38.5).

Comme on l'a montré plus haut, la ligne de partage L suit la caractéristique si la vitesse sur celle-ci est discontinue.

Par contre, si la vitesse est continue, la vitesse sur L est nulle. Si, dans ce cas, L n'est pas une caractéristique, le triangle caractéristique confinant à L sera au repos lui aussi (car le champ de vitesses y est déterminé par la solution du problème de Cauchy). Une déformation ne se produira dans la zone plastique que si L est une caractéristique.

Ainsi, *la frontière rigide-plastique passe par la caractéristique* (*ou par l'enveloppe des caractéristiques*).

54. SOLUTIONS RÉSULTANT DE LA CONDITION D'ÉCOULEMENT DE TRESCA — SAINT-VENANT. SOLUTIONS DISCONTINUES

1. Généralités. Les équations de l'état de contrainte plan pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant ont été formulées dans le paragraphe 52; ces équations sont différentes pour différents régimes. Pour résoudre les problèmes concrets, il faut en général considérer les écoulements dans divers régimes réalisables en divers points de la zone plastique. Il est alors facile de commettre une erreur et de choisir un assemblage erroné de domaines différents d'état de contrainte, ce qui nous amène parfois à des conclusions paradoxales. Pour choisir une bonne construction de la solution, il convient d'élaborer soigneusement un champ de vitesses harmonisé.

Les équations pour les contraintes dans différents régimes ont été étudiées par V. Sokolovski [33]. La construction consécutive du champ de vitesses n'est devenue possible qu'après l'introduction de la loi d'écoulement associative. On doit à R. Hill [161] l'analyse des solutions discontinues.

2. Régimes DE et AB ($\sigma_1\sigma_2 < 0$). Il a été noté au paragraphe 52 que le système d'équations pour les contraintes et les vitesses dans le régime envisagé coïncide avec le système correspondant pour le cas de la déformation plane. Dans ces domaines, les caractéristiques sont orthogonales et coïncident avec les lignes de glissement. Les résultats exposés dans le chapitre précédent sont entièrement transposables pour le cas de la plaque lorsque $\sigma_1\sigma_2 < 0$. Seule la valeur des contraintes normales est limitée dans le cas de la plaque (par exemple pour le régime DE on a $\sigma_1 < \sigma_s$, $|\sigma_2| < \sigma_s$). Il n'y a pas d'amincissement de la plaque ($\xi_z = 0$).

L'impossibilité de l'amincissement exclut les discontinuités de la composante normale de la vitesse: il découle de la condition $\xi_z = 0$ (cf. formules (53.24)) que $\xi_n = \frac{v}{b} \sin \gamma = 0$, c.-à-d. $\gamma = 0$. *Tout comme dans le cas de la déformation plane, un glissement relatif se produit le long de la ligne de discontinuité de la vitesse passant par la caractéristique. Le « col » ne peut apparaître.*

Pour ce qui est de la ligne de discontinuité des contraintes, les résultats présentés au paragraphe 39 restent toujours entièrement valables. La ligne de discontinuité des contraintes est la bissectrice de l'angle entre les lignes de glissement homonymes.

3. Régimes CD et EF. Pour le régime CD (cf. paragraphe 52) on a $\sigma_1 = \sigma_s$, $0 < \sigma_2 < \sigma_s$. Posons

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_s\chi, \tag{54.1}$$

où $\chi = \chi(x, y)$ est une fonction inconnue. Alors

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_s\varkappa(1 - \chi), \tag{54.2}$$

où $\varkappa = \operatorname{sign} \sigma_1 = \operatorname{sign} \sigma_2$. Pour le régime CD on a $\varkappa = +1$; le facteur $\varkappa$ est introduit pour que l'on puisse étendre la solution obtenue au régime EF où $\varkappa = -1$. A l'aide des formules (53.3) on trouve:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma_s[\varkappa(1-\chi) \pm \chi\cos 2\varphi], \quad \tau_{xy} = \sigma_s\chi \sin 2\varphi, \tag{54.3}$$

où $\varphi = \varphi(x, y)$ est un angle inconnu situé entre la première direction principale et l'axe des x. En portant ces valeurs dans les équations différentielles d'équilibre, en se libérant des angles doubles, en multipliant les équations obtenues respectivement par $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, en additionnant et en retranchant ensuite ces équations, on trouve après quelques simplifications:

$$\left.\begin{aligned}&\sin 2\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} - (\varkappa + \cos 2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,\\ &\sin 2\varphi \frac{\partial \ln\chi}{\partial x} - (\varkappa + \cos 2\varphi)\frac{\partial \ln\chi}{\partial y} + 2\varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{54.4}$$

On trouve aisément la solution générale de ce système. Les équations des caractéristiques de la première relation ont la forme

$$\frac{dx}{\sin 2\varphi} = \frac{dy}{-(\varkappa + \cos 2\varphi)} = \frac{d\varphi}{0}$$

et sont facilement intégrables:

$$\varphi = \text{const} = C_1, \quad y = x \operatorname{tg}\left[\varphi + (\varkappa + 1)\frac{\pi}{4}\right] + C_2. \tag{54.5}$$

Les caractéristiques étant des droites inclinées vers l'axe des x sous un angle de $\left[\varphi + (\varkappa + 1)\frac{\pi}{4}\right]$, elles se confondent donc avec les

lignes de glissement, c.-à-d. avec les trajectoires droites des contraintes principales (paragraphe 52.3).

Pour le régime *CD*, les caractéristiques sont confondues avec les trajectoires rectilignes de la contrainte principale de valeur numérique plus petite σ_2 (pour le régime *EF* on a $\sigma_2 = -\sigma_s$, $\varkappa = -1$. et les caractéristiques passent par les trajectoires rectilignes de la contrainte principale σ_1). D'après la loi associative dans le régime *CD* on a $\xi_2 = 0$, c.-à-d. la caractéristique ne s'allonge pas.

La solution générale de la première des équations (54.4) peut être représentée sous la forme

$$y = x \operatorname{tg}\left[\varphi + (\varkappa + 1)\frac{\pi}{4}\right] + \Phi(\varphi), \tag{54.6}$$

où $\Phi(\varphi)$ est une fonction arbitraire qui peut être déterminée par des conditions aux limites données.

Composons maintenant l'équation des caractéristiques de la seconde équation du système (54.4):

$$\frac{dx}{\sin 2\varphi} = \frac{dy}{-(\varkappa + \cos 2\varphi)} = \frac{d \ln \chi}{-2\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Cette équation a la même famille de lignes caractéristiques, ce qui signifie que le système (54.4) est du type parabolique.

Le long de la ligne caractéristique on a:

$$d \ln \chi = -2\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{\sin 2\varphi}.$$

En dérivant la solution (54.6) par rapport à x, on calcule la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, on l'introduit dans la dernière relation et on procède à l'intégration. La solution générale de la deuxième équation (54.4) sera alors:

$$\chi = \frac{\Psi(\varphi)}{2x + (1 - \varkappa \cos 2\varphi)\Phi'(\varphi)}, \tag{54.7}$$

où $\Psi(\varphi)$ est une fonction arbitraire déterminée par des conditions aux limites données.

Notons ensuite l'intégrale évidente

$$\varphi = \text{const}, \quad \chi = \text{const},$$

décrivant la *distribution uniforme des contraintes.*

Pour trouver les fonctions arbitraires il faut définir les valeurs de φ et χ le long d'une certaine courbe C sur le plan x, y. La solution de ce problème de Cauchy sera indéterminée si la courbe C est elle-même une caractéristique.

Considérons la *discontinuité de la vitesse le long d'une ligne quelconque* L (fig. 165). Admettons que la partie droite (+) du col se déplace par rapport à la partie gauche (—) à la vitesse v. Dans le système de coordonnées local n, t, on a les formules précédentes (53.24) pour les composantes de la vitesse de déformation. Comme $\xi_t = 0$. *la ligne de discontinuité suit la caractéristique* (*rappelons que le long de cette caractéristique* $\xi_2 = 0$), *c.-à-d. qu'elle est rectiligne et coïncide avec la trajectoire de la contrainte principale numériquement plus petite*. Les directions n, t sont donc principales et $\eta_{nt} = 0$, soit $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, *la discontinuité n'est possible que dans la composante normale de la vitesse.*

Notons ensuite que *la contrainte principale numériquement plus petite peut être discontinue le long de la caractéristique*, *la valeur de la discontinuité étant arbitraire dans les limites* $(0, \sigma_s)$. Par exemple, pour le régime CD, σ_2 peut être discontinue le long de la caractéristique avec $0 < |[\sigma_2]| < \sigma_s$, $\sigma_2 < \sigma_s$.

4. **Régimes C et F.** Pour les régimes singuliers C et F, on a:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \varkappa\sigma_s, \tag{54.8}$$

où $\varkappa = +1$ pour le régime C et $\varkappa = -1$ pour le régime F. Il s'ensuit des formules (53.3) que pour tout système de coordonnées cartésiennes x, y on a:

$$\sigma_x = \sigma_y = \varkappa\sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0. \tag{54.9}$$

Les équations différentielles d'équilibre (52.1) sont évidemment satisfaites. Ainsi, les régimes considérés correspondent à l'*état de contrainte homogène hydrostatique* (*dans le plan* x, y). Toute direction est principale pour la contrainte. Pour le régime C, les vitesses de déformation sont égales à $\xi_1 = \lambda_1 \geqslant 0$, $\xi_2 = \lambda_2 \geqslant 0$.

Considérons dans un tel domaine la *discontinuité de la vitesse le long d'une ligne quelconque* L (fig. 165). Supposons que la première direction principale de la vitesse de déformation fasse un angle φ avec l'axe des n. Conformément aux formules (52.8) et (53.24) on a:

$$\xi_t = \lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi = 0.$$

Donc, $\varphi = 0$, $\lambda_2 = 0$; les axes des n et t sont les axes principaux, alors $\eta_{nt} = 0$, c.-à-d. $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, *le vecteur discontinuité* v *est normal à la ligne* L, *il n'y a pas de glissement relatif*. L'orientation de la ligne de discontinuité est arbitraire par rapport au champ de contraintes.

Dans les champs envisagés, la discontinuité des contraintes est évidemment exclue (en raison de la condition $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$).

5. **Régimes D, A (traction ou compression uniaxiale).** Ici $\sigma_1 = \varkappa\sigma_s$, $\sigma_2 = 0$. Portant les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} d'après les formules (53.3) dans les équations différentielles d'équilibre (52.1),

on trouve que l'angle de pente de la première direction principale est $\varphi = \text{const}$, ce qui correspond au champ d'une traction (ou compression) uniforme. Les vitesses de la déformation sont définies par les formules (52.18):

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \xi_2 = -\lambda_1, \quad \xi_3 = -\lambda_2,$$

avec $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$.

Considérons maintenant la *discontinuité de la vitesse le long d'une ligne quelconque L* (fig. 165, *c*). Admettons que la première direction principale fasse toujours un angle φ avec l'axe des n. Les vitesses principales de l'allongement dans le col sont données par les formules (53.26), par conséquent

$$\frac{v}{2b}(1 + \sin\gamma) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad -\frac{v}{2b}(1 - \sin\gamma) = -\lambda_1.$$

La vitesse de l'allongement étant nulle le long du col, on aura donc:

$$\xi_t = (\lambda_1 + \lambda_2)\sin^2\varphi - \lambda_1\cos^2\varphi = 0. \qquad (54.10)$$

Eliminant entre les dernières relations $\frac{v}{b}$, λ_1 et λ_2, on trouve que $\sin\gamma = \cos 2\varphi$, d'où

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\varphi, \qquad (54.11)$$

c.-à-d. que la contrainte principale $\sigma_1 = \sigma_s$ s'exerce dans la direction 1 qui est la bissectrice de l'angle entre la normale à la ligne de discontinuité et le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$.

Notons que, en vertu de (54.10), on a $\mathrm{tg}^2\,\varphi \leqslant 1$, c.-à-d. $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}$. Dans ces limites, la direction de la ligne de discontinuité de la vitesse est arbitraire par rapport à la contrainte de traction [1]. Quant au vecteur discontinuité $\boldsymbol{v}$, il est orienté suivant (54.11). *Dans le cas général, l'amincissement et le glissement se produisent simultanément.* Si la ligne de discontinuité est normale à la direction de la traction ($\varphi = 0$), il ne peut donc pas y avoir de glissement $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$, et seul un col se formera.

Les composantes de la contrainte sont continues sur la ligne de discontinuité des vitesses.

On verra aisément par la suite que la ligne de discontinuité des contraintes est parallèle à la direction de la traction, avec $\sigma_1^+ = \sigma_s$ à droite de cette ligne et $\sigma_1^- = -\sigma_s$ à gauche (cf. fig. 39). *Le champ de vitesses est continu le long des lignes de discontinuité des contraintes.*

---

[1] Ce résultat ne s'accorde pas avec les observations (cf. paragraphe 53.8) et souligne une fois de plus que le schéma d'écoulement en régime singulier est plus ou moins conventionnel.

Les résultats cités (compte tenu des changements évidents des notations) sont reportés sur deux autres régimes uniaxiaux B et E.

6. Champ à symétrie axiale. Envisageons l'état de contrainte à symétrie axiale en l'absence de torsion (c.-à-d. pour $\tau_{r\theta} = 0$). σ_r et σ_θ seront les composantes principales du tenseur des contraintes. La solution dépend du régime en jeu. Pour fixer les idées, arrêtons-nous sur le problème de la plaque infinie à ouverture circulaire (fig. 169) que nous avons déjà examiné dans le paragraphe précédent pour la condition d'écoulement de von Mises.

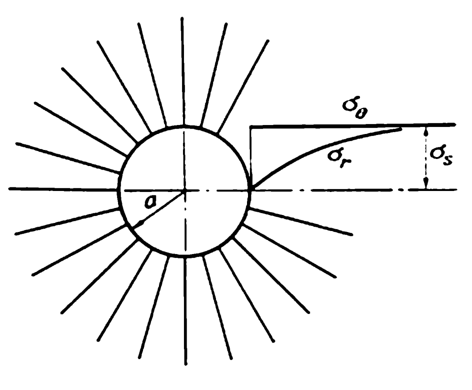


Fig. 169

Si la pression intérieure agit sur le contour de l'ouverture $r = a$ et si les contraintes sont nulles à l'infini, on aura alors $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$ au voisinage de l'ouverture et la solution sera la même que pour le cas de la déformation plane.

Si, à l'infini, la plaque à ouverture libre éprouve une traction uniforme, les contraintes σ_r, σ_θ auront le même signe (ce qui découle de l'analyse du problème élastique) et la condition d'écoulement a la forme

$$\sigma_\theta = \text{const} = \sigma_s.$$

La condition aux limites est:

$$\sigma_r = 0 \text{ pour } r = a.$$

Il résulte alors de l'équation différentielle d'équilibre pour la condition aux limites indiquée:

$$\sigma_r = \sigma_s \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Le problème se rapporte au type parabolique et l'unique famille de caractéristiques représente un faisceau de droites issues d'un centre (fig. 169). Sur la même figure on a montré la distribution des contraintes qui ne se distingue que très peu du champ de contraintes pour la condition d'écoulement de von Mises.

7. Notes sur la frontière rigide-plastique et sur les discontinuités. La frontière rigide-plastique confinant à la zone hyperbolique (régimes DE, AB) passe par la caractéristique (ligne de glissement en l'occurrence). Par contre, si la ligne de partage limite l'état parabolique (régimes CD, EF, . . .), elle passe également par la caractéristique. La démonstration est analogue à celle présentée à la fin du paragraphe précédent.

Les cas de discontinuité envisagés plus haut ne sont pas exhaustifs. En principe, le régime d'écoulement peut être quelconque de part et d'autre de la ligne de discontinuité, et il convient d'examiner les différentes variantes possibles. Nous passerons sur ce sujet en nous référant au livre [8] où les discontinuités sont envisagées en détail pour la condition de plasticité de Saint-Venant.

55. L'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE D'UNE PLAQUE À OUVERTURE CIRCULAIRE SOUS L'EFFET D'UNE PRESSION UNIFORME

Examinons à titre d'exemple simple le problème élasto-plastique à symétrie axiale pour une plaque infinie à ouverture circulaire. Une pression uniforme p est appliquée au contour de l'ouverture $r = a$ (fig. 170).

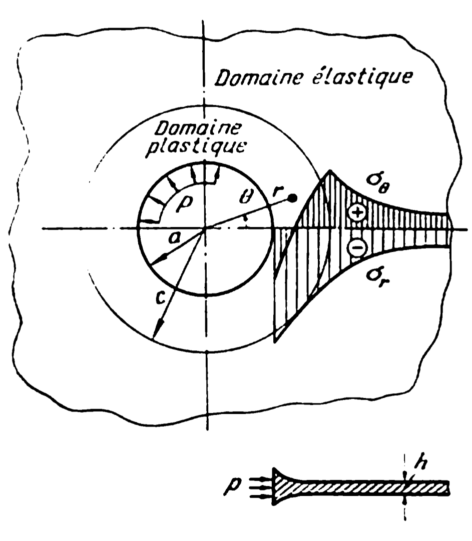


Fig. 170

1. Etat élastique. Lorsque la valeur de la pression p est petite, la plaque se trouve dans un état élastique et les contraintes (en coordonnées polaires r, θ où θ est l'angle polaire) seront

$$\sigma_r = -p\left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \sigma_\theta = = +p\left(\frac{a}{r}\right)^2. \qquad (55.1)$$

Ainsi, un état de cisaillement pur se manifeste dans la plaque lorsqu'elle est sollicitée par des déformations élastiques. La contrainte tangentielle maximale et l'intensité des contraintes tangentielles sont égales à $T = p\left(\frac{a}{r}\right)^2$, et la déformation plastique apparaît pour la première fois sur le bord de l'ouverture pour une pression $p = \tau_s = k$. Avec l'accroissement de la pression, les déformations plastiques se répandent dans l'espace annulaire $a \leqslant r \leqslant c$, dont le rayon c est à déterminer. Il est évident que dans le domaine élastique $r \geqslant c$ les contraintes seront:

$$\sigma_r = -k\left(\frac{c}{r}\right)^2, \quad \sigma_\theta = k\left(\frac{c}{r}\right)^2. \qquad (55.2)$$

2. Equilibre élasto-plastique pour la condition d'écoulement de von Mises. La solution du problème à symétrie axiale dans la zone

plastique a été obtenue dans le paragraphe 53.5. Sur la frontière $r = c$ les contraintes sont continues et correspondent à l'état de cisaillement pur, c.-à-d.

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ pour } r = c.$$

Déterminant à partir de cette condition la constante arbitraire dans la solution (53.19), on obtient :

$$\left(\frac{c}{r}\right)^2 = e^{-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)} \sin \omega. \tag{55.3}$$

Posant ici $r = a$, on trouvera la valeur ω_a correspondant à c en question ; la pression sur le bord de l'ouverture est déterminée d'après la formule (53.18) pour σ_r lorsque $\omega = \omega_a$. On s'aperçoit aisément que $\omega_a \geqslant \frac{\pi}{2}$ et croît avec $\left(\frac{c}{a}\right)$. La pression p augmentera alors en atteignant la valeur maximale de $2k$ pour $\omega_a = \frac{5}{6}\pi$. L'accroissement ultérieur de la pression et l'extension de la zone plastique sont impossibles; un épaississement se produit sans encombre au bord de l'ouverture à cette pression maximale $p = 2k$ (certes, pour de petites déformations). Pour le montrer, nous négligerons les déformations élastiques constatées au bord de l'ouverture, et alors conformément à (52.3)

$$\xi_r + \frac{\sigma_\theta - 2\sigma_r}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \xi_\theta = 0.$$

D'où, utilisant la condition d'incompressibilité :

$$\xi_r + \xi_\theta + \xi_z = 0,$$

on trouve la vitesse de l'épaississement relatif de la plaque

$$\xi_z = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r} \xi_\theta \left(\xi_\theta = \frac{v_r}{r}\right).$$

A la pression maximale $p = 2k$, les contraintes au bord de l'ouverture $r = a$ (cf. fig. 157) seront : $\sigma_r = -2k$, $\sigma_\theta = -k$ et, évidemment, $\xi_z \to \infty$. On obtient à partir de (55.3) le rayon maximal de la zone plastique pour $r = a$, $\omega = \frac{5}{6}\pi$:

$$\left(\frac{c}{a}\right)_{\max} \approx 1{,}75.$$

Les équations dans la zone plastique sont hyperboliques; pour la pression maximale $p = 2k$, les caractéristiques des familles α, β ont un point de contact sur le cercle $r = a$ ($\psi = 0$), ce qui correspond au point parabolique $\omega = \frac{5}{6}\pi$ sur la figure 157. Les caractéristi-

ques sont orthogonales sur la frontière $r = c$. La distribution des contraintes est montrée sur la figure 170.

3. Equilibre élasto-plastique pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant. En l'occurrence, le régime DE est réalisé au bord de l'ouverture (fig. 159) et la condition d'écoulement a la forme

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k,$$

où $2k = \sigma_s$. A partir de l'équation différentielle d'équilibre (53.14) et des conditions de continuité sur le cercle $r = c$, on obtient :

$$\sigma_r = -k\left(1 + 2\ln\frac{c}{r}\right), \quad \sigma_\theta = k\left(1 - 2\ln\frac{c}{r}\right). \qquad (55.4)$$

Selon la condition d'écoulement, la valeur de la contrainte radiale σ_r ne peut être supérieure à σ_s (cf. fig. 159) ; d'autre part, à partir de (55.4), on trouve le rayon maximal de la zone plastique :

$$\left(\frac{c}{a}\right)_{max} \approx 1,65.$$

Les distributions des contraintes élastique (en pointillé) et élasto-plastique (en ligne pleine ; $\frac{c}{a} = 1,40$) sont montrées sur la figure 171 où sont représentées aussi les courbes des contraintes résiduelles σ_r^0, σ_θ^0 qui apparaissent lorsque l'on supprime la pression.

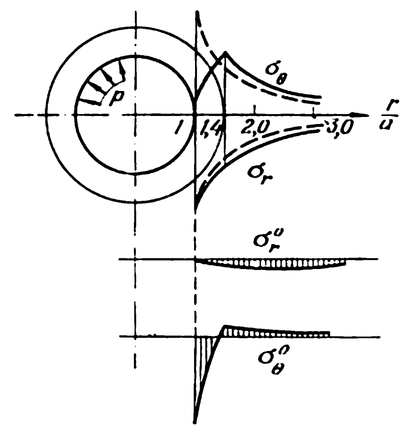


Fig. 171

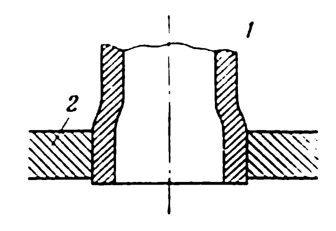


Fig. 172

Notons que la contrainte résiduelle radiale σ_r^0 est une contrainte de compression. Cette circonstance est couramment utilisée dans la construction mécanique pour fixer les tubes dans des tôles (plaques) planes (ou gauchies) par mandrinage. Cette opération consiste à évaser de l'intérieur l'extrémité du tube *1* (fig. 172) introduite dans l'ouverture de la tôle *2*. Après l'éloignement de l'outil (suppression de la pression), le tube se trouve solidement fixé dans la tôle (cf. [52], ch. XXXIII).

56. EXTENSION D'UNE PLAQUE AFFAIBLIE PAR DES RAINURES

Considérons (pour la condition d'écoulement de von Mises) deux problèmes sur la traction d'une plaque affaiblie par des rainures. La solution de ces problèmes a été obtenue par R. Hill [161]; les rainures sont supposées suffisamment profondes.

1. Extension d'une plaque à rainures circulaires. Soit une plaque affaiblie par des rainures symétriques à base circulaire de rayon a

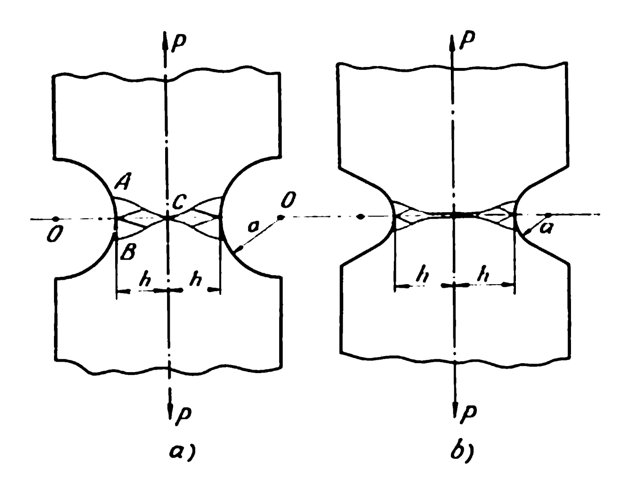


Fig. 173

(fig. 173). Des champs de contraintes à symétrie axiale apparaissent au voisinage de la partie circulaire du contour (grâce à l'hyperbolicité des équations dans ces domaines, les champs de contraintes sont entièrement définis par la forme du contour libre). Par conséquent, les contraintes dans ces zones seront décrites par les formules (53.18), la distance r du centre O et la fonction ω étant liées par l'équation (53.21). Il est évident que ces champs peuvent être prolongés de part et d'autre, mais à une distance maximale $r = 2{,}07a = c_1$; dans ce cas limite, l'angle d'ouverture de la partie circulaire de l'arc AB ne doit pas être inférieur à 38°56′.

Soit $h < 1{,}07a$; alors les champs, qui se propagent à partir de chaque rainure, ont un point de contact au centre C (fig. 173, a). Pour que la construction puisse se réaliser, l'arc AB doit présenter un angle d'ouverture suffisant (en particulier, la construction est toujours possible si l'angle d'ouverture est $\geqslant 38°56'$). Utilisant l'équation différentielle d'équilibre (53.19) et intégrant par parties

on trouve la charge limite

$$P_* = 2 \int_a^{a+h} \sigma_\theta \, dr = 2\,(a+h)\,(\sigma_r)_{r=a+h}. \tag{56.1}$$

La charge limite élémentaire est égale à $P_*^0 = 2\sigma_s h = 2\sqrt{3}\,kh$. Le rapport P_*/P_*^0 (*facteur d'amplification*) peut être représenté de façon approchée par la formule

$$\frac{P_*}{P_*^0} \approx 1 + 0{,}23\,\frac{h}{h+a} \qquad \left(0 \leqslant \frac{h}{a} \leqslant 1{,}07\right). \tag{56.2}$$

Les caractéristiques se confondent au centre C pour $h = 1{,}07a$.

Par la suite, pour $h > 1{,}07a$, les domaines plastiques à symétrie axiale ne changent pas et sont reliés suivant l'axe des x par un col (fig. 173, *b*), qui correspond à un point parabolique sur l'ellipse d'écoulement (fig. 157). Le long du col, on a:

$$\sigma_r = k, \quad \sigma_\theta = 2k.$$

A l'aide de (56.1) on calcule facilement la charge limite

$$P_* = 2 \int_a^{a+h} \sigma_\theta \, dr = 2k\,(a + 2h - c_1)$$

et le facteur d'amplification

$$\frac{P_*}{P_*^0} \approx 1{,}15 - 0{,}04\,\frac{a}{h} \qquad (h > 1{,}07a). \tag{56.3}$$

Fig. 174

Pour conclure, nous fixerons notre attention sur deux remarques.

En comparant les résultats obtenus avec le facteur d'amplification correspondant (41.4) dans le cas de la déformation plane, on découvre que *le facteur d'amplification est légèrement inférieur lorsque l'on y a affaire à un état de contrainte plan.*

Les parties supérieure et inférieure de la plaque se déplacent rigidement dans la direction de l'action des charges. La vitesse est discontinue et des cols se forment le long des lignes de séparation passant par les caractéristiques.

Les observations de B. Hundy [76] sur l'extension d'une plaque de cuivre affaiblie par des rainures circulaires (fig. 174) confirment cette conclusion qualitative. Le col se prête bien à une observation au stade de la déformation précédant la rupture.

2. Extension d'une plaque à rainures angulaires. La plaque est affaiblie par des rainures angulaires symétriques (fig. 175). Seuls les domaines de la traction uniaxiale uniforme peuvent être contigus

aux côtés rectilignes libres des rainures et $\psi = \psi_1 = 54°44'$. Envisageons le schéma de la solution montré sur la figure 175, *a*. Un champ centré (53.16) avoisine le domaine de la traction uniforme. Selon la condition de continuité des contraintes, l'angle θ sera compté à partir de l'axe polaire $O'O''$ conformément à la figure 163. L'aire rhomboédrique $ABCD$ est le domaine de l'état de contrainte homogène, les contraintes tangentielles étant nulles suivant la ligne AB pour

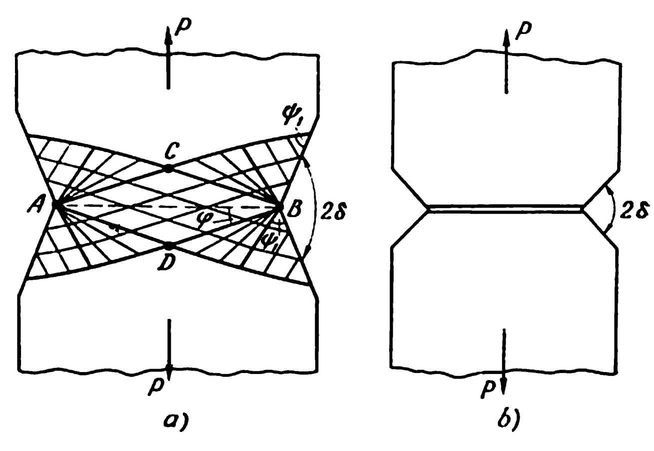


Fig. 175

des raisons de symétrie. Mais alors φ est l'angle formé par la direction principale et l'axe des r passant par la ligne BD; cette dernière est définie par l'angle $\theta = \theta_1$.

Egalant les contraintes exprimées par les formules (53.3) aux contraintes d'après (53.16) pour $\theta = \theta_1$, on trouve :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \operatorname{tg} \theta_1. \tag{56.4}$$

Il découle de la construction présentée sur la figure 175, *a* que

$$\varphi = \theta_1 - (\delta + 2\psi_1 - \pi).$$

Ainsi, l'angle θ_1 est tiré de l'équation

$$2 \operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} 2 (\delta + 2\psi_1 - \theta_1) = 0. \tag{56.5}$$

Connaissant θ_1, on trouve aisément les contraintes principales dans le domaine $ABCD$ moyennant les formules (31.4) et (53.16)

$$\sigma_1,\ \sigma_2 = \frac{k}{2}\left(3\cos\theta_1 \pm \sqrt{1+3\sin^2\theta_1}\right). \tag{56.6}$$

La construction est possible si $\varphi \geqslant 0$. Lorsque $\varphi = 0$, il découle de (56.4) que $\theta_1 = 0$. Ainsi, $\delta \geqslant \pi - 2\psi_1 = 70°32'$. Le facteur d'am-

plification sera alors égal à

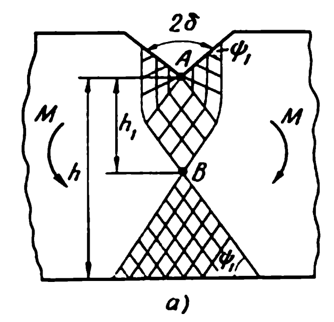
$$\frac{P_*}{P_*^0}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3\cos\theta_1+\sqrt{1+3\sin^2\theta_1}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}-2\psi_1\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \qquad (56.7)$$

Lorsque $\theta_1=0$, l'ensemble de la construction dégénère en une ligne de discontinuité (col) longeant AB ; les deux familles de caractéristiques se confondent en une seule (cf. fig. 163). Cette solution montrée sur la figure 175, *b* se conserve également pour des rainures plus aiguës, quand $\delta < 70°32'$. Le long de AB on a $\sigma_\theta = 2k$, $\sigma_r = k$ et le facteur d'amplification sera maintenant égal à

$$\frac{P_*}{P_*^0}=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \delta<70°32'. \qquad (56.8)$$

57. FLEXION D'UNE PLAQUE À ENTAILLE UNILATÉRALE

Considérons la flexion d'une plaque à entaille unilatérale (fig. 176) en nous bornant à l'examen du cas où l'entaille est angulaire. La construction du champ de caractéristiques est montrée sur



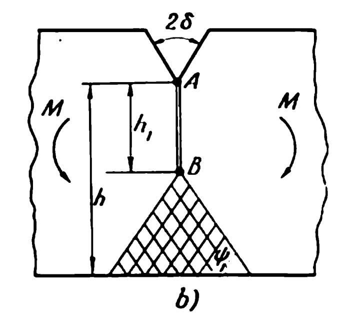


Fig. 176

la figure 176, *a*. A la frontière rectiligne inférieure confine un triangle de compression uniaxiale uniforme de $-\sqrt{3}k$. A l'entaille, le champ est le même que dans le problème précédent (fig. 175, *a*). La contrainte normale sur la ligne AB est égale à σ_1 conformément à (56.6), l'angle θ_1 étant trouvé à partir de l'équation (56.5).

La position du point B (caractérisée par le segment h_1) est déterminée par la condition de nullité du vecteur principal de contraintes agissant dans la plus petite section transversale, à savoir :

$$\sigma_1 h_1 - \sigma_s(h-h_1) = 0 \quad (\sigma_s = \sqrt{3}k).$$

Le moment fléchissant limite est égal à

$$M_* = \frac{\sigma_1 h_1^2}{2} + \frac{\sigma_s(h-h_1)^2}{2}.$$

Pour une plaque lisse de hauteur h le moment limite est égal à $M_*^0 = \frac{\delta_s}{4} h^2$. Le facteur d'amplification est égal à

$$\frac{M_*}{M_*^0} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s}. \tag{57.1}$$

Comme dans le paragraphe précédent, la solution est vraie pour $\delta \geqslant \pi - 2\psi_1 = 70°32'$. Lorsque $\delta = \pi - 2\psi_1$, l'ensemble de la construction situé au-dessus du point B dégénère en une ligne de discontinuité (col) longeant AB. Lorsque $\delta \leqslant \pi - 2\psi_1$, la solution s'accomplit suivant le schéma montré sur la figure 176, b. Les contraintes dans le col sont égales à $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_2 = k$. On s'aperçoit aisément que

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

et le facteur d'amplification est constant

$$\frac{M_*}{M_*^0} = \frac{4}{2+\sqrt{3}} = 1{,}072. \tag{57.2}$$

Fig. 177

La courbe du facteur d'amplification en fonction de l'angle de l'entaille est représentée sur la figure 177. Dans l'état limite, les parties rigides de la plaque tournent par rapport au point B.

Le problème sur la flexion d'une plaque à ouverture circulaire (cf. [161]) est un peu plus compliqué.

Exercices du chapitre VI

1. Considérer l'état élasto-plastique d'un disque rond d'épaisseur constante tournant rapidement pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant. A quelle vitesse angulaire obtiendra-t-on un état plastique pur?

2. Envisager (dans les conditions de l'état de contrainte plan) la flexion d'une console courte sous l'effet d'une force (fig. 119) pour le premier type de champ de vitesses (c.-à-d. pour les consoles « longues ») en utilisant les solutions montrées sur la figure 163.

3. Montrer, en cherchant les solutions des équations différentielles d'équilibre et de la condition d'écoulement de von Mises indépendantes du rayon vecteur r, que la fonction $w = s^2 + \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$, où $s = \sigma_\theta$, satisfait à l'équation

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 + 12w - 48k^2 = 0. \tag{*}$$

4. Montrer que l'intégrale particulière $w = 4k^2$ de l'équation (*) conduit à la solution de Hill (53.16) comportant une constante arbitraire.

5. Montrer que l'intégration de l'équation (*) conduit à la solution à deux constantes arbitraires B, ω:

$$\sigma_\theta = A + B \cos 2(\theta + \omega), \quad \sigma_r = A - B \cos 2(\theta + \omega), \quad \tau_{r\theta} = B \sin 2(\theta + \omega),$$

où $A^2 = 3(k^2 - B^2)$.

6. Envisager le problème portant sur la flexion d'une plaque à deux entailles angulaires (cf. paragraphe 57, fig. 176).

7. Envisager le problème portant sur la flexion d'une plaque à une ouverture circulaire pour le cas où le champ de compression (fig. 176, *a*) a un point de contact B avec le champ à symétrie axiale.

8. Trouver la charge limite lors de la flexion d'une console (fig. 119) sous l'effet d'une pression répartie uniformément sur la face supérieure.

9. Idem pour une poutre à deux appuis.

CHAPITRE VII

DÉFORMATION À SYMÉTRIE AXIALE

58. ÉQUATIONS DE LA DÉFORMATION À SYMÉTRIE AXIALE POUR LA CONDITION D'ÉCOULEMENT DE VON MISES

Généralités. Les problèmes à symétrie axiale de la théorie de plasticité présentent un grand intérêt pour les applications. Supposons que l'axe d'un corps de révolution envisagé se confonde avec l'axe d'un système de coordonnées cylindriques r, φ, z, et les charges (ou déplacements) données possèdent également une symétrie axiale. La déformation d'un tel corps sera alors à symétrie axiale, les composantes de la contrainte et du déplacement étant indépendantes de l'angle polaire φ.

Supprimons de l'analyse le problème de la torsion du corps; la torsion des barres rondes de diamètre variable fera l'objet d'un examen sommaire dans le chapitre VIII (paragraphe 66). On peut alors admettre l'absence de la composante tangentielle de la vitesse

$$v_\varphi = 0$$

et les composantes de la contrainte

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0.$$

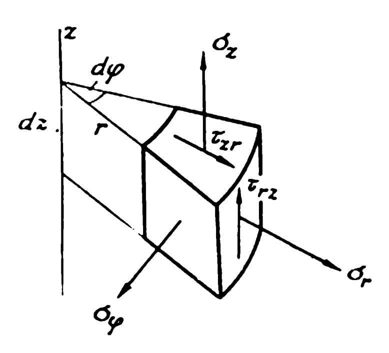


Fig. 178

Les composantes non nulles de la contrainte σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz} (fig. 178) et les composantes de la vitesse v_r, v_z (que nous désignerons par la suite par u et w dans le présent chapitre) sont fonctions des coordonnées r, z.

En l'absence de forces massiques, les équations différentielles d'équilibre ont la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ &\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (58.1)$$

Les composantes de la vitesse de déformation sont définies par les formules :

$$\xi_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \xi_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \xi_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \eta_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \tag{58.2}$$

A ces équations il faudra joindre les équations de l'état plastique. Il est facile de le faire, mais, compte tenu des difficultés de la solution, nous nous bornerons à analyser ici les équations d'un corps rigide-plastique.

Les problèmes à symétrie axiale « unidimensionnels », pour lesquels l'état de contrainte de déformation ne dépend que d'une variable indépendante, le rayon r en l'occurrence, sont relativement simples (bien qu'ils nécessitent parfois l'application des méthodes numériques). Ils ont déjà été traités ici (sphère creuse et tube cylindrique sous l'effet d'une pression, équilibre à symétrie axiale d'un voile, etc.). Dans ces problèmes, on peut tenir compte des déformations élastiques, de l'écrouissage et d'autres propriétés mécaniques.

L'analyse du problème général à symétrie axiale, même pour le corps rigide-plastique, se heurte à de grandes difficultés mathématiques, ce qui nous conduit à rechercher différentes simplifications éventuelles dans l'énoncé du problème.

2. Relations de Saint-Venant — von Mises. Pour le corps rigide-plastique, il faut partir des relations de Saint-Venant — von Mises (13.12) qui, dans le cas de symétrie axiale considéré, prennent la forme :

$$\frac{\xi_r}{H} = \frac{\sigma_r - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\xi_\varphi}{H} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\xi_z}{H} = \frac{\sigma_z - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\eta_{rz}}{H} = \frac{\tau_{rz}}{\tau_s}, \tag{58.3}$$

où l'intensité des vitesses de déformation de cisaillement est égale à

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_r - \xi_\varphi)^2 + (\xi_\varphi - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2 + \frac{3}{2} \eta_{rz}^2}. \tag{58.4}$$

Les composantes de la contrainte, représentées par les formules (58.3), satisfont à la condition d'écoulement de von Mises

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6\tau_s^2. \tag{58.5}$$

Les composantes de la vitesse de déformation vérifient l'équation d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{58.6}$$

Les relations écrites forment avec les équations différentielles d'équilibre un système de six équations à six fonctions inconnues σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}, u, w. Dans le cas général, ce système est elliptique [61].

Notons qu'il n'y a que trois équations aux contraintes (58.1), (58.5) pour trouver les quatre composantes de la contrainte σ_r,

σ_φ, σ_z, τ_{rz}. A la différence des cas de la déformation plane et de l'état de contrainte plan, le problème à symétrie axiale n'est pas un problème à détermination statique locale ; l'analyse séparée des champs de contraintes et de vitesses est donc exclue dans le schéma envisagé.

Quelques solutions particulières exactes sont obtenues par la méthode semi-inverse. Nous noterons ici le problème de l'écoulement d'une masse plastique dans le cône circulaire (V. Sokolovski [33]), le problème relatif à la compression d'un cylindre par des efforts répartis sur les faces latérales suivant une loi déterminée (Hill [47]) et le problème portant sur le refoulement depuis une bague cylindrique en compression (Hill [47]). On possède des solutions approchées de plusieurs problèmes pratiques importants, qui sont fondées sur diverses hypothèses complémentaires.

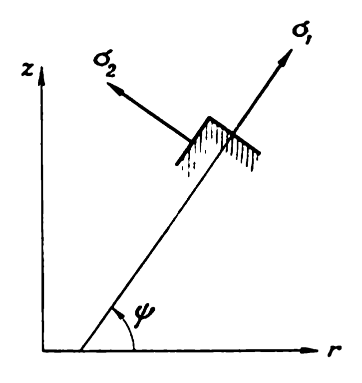


Fig. 179

3. Condition de plasticité totale. On doit à Hencky [153] un des procédés permettant en quelque sorte de surmonter les difficultés apparues et qui est devenu d'un usage courant dans les calculs technologiques.

Il proposa d'admettre que dans l'état de contrainte à symétrie axiale on voit se réaliser le régime dit *régime de plasticité totale lorsque deux contraintes principales sont égales.*

La contrainte σ_φ est évidemment la contrainte principale. Désignons par σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2$) les contraintes principales dans le plan r, z (fig. 179) et par ψ l'angle entre la première direction principale et l'axe des r. On aura alors :

$$\sigma_r,\ \sigma_z = p \pm q\cos 2\psi, \quad \tau_{rz} = q\sin 2\psi, \tag{58.7}$$

où l'on a posé

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

La condition $\sigma_1 = \sigma_2$ conduit à un état de contrainte très particulier (cf. paragraphe 59, régime A). C'est pourquoi on suppose que $\sigma_\varphi = \sigma_1$ (ou σ_2) dans le régime de plasticité totale. Superposant la pression hydrostatique $\sigma = -\sigma_1$ sur cet état, on en vient à l'état de contrainte

$$0,\ 0,\ \sigma_2 - \sigma_1,$$

correspondant à une *traction ou compression uniaxiale.* Ainsi, dans les conditions de plasticité totale, l'état de contrainte se trouve sur une

des arêtes du prisme d'écoulement de Tresca — Saint-Venant (fig. 14); on voit aisément qu'on a ici $\tau_{max} = \frac{1}{2} | \sigma_1 - \sigma_2 |$, et $T = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_{max}$.

La condition de plasticité totale simplifie beaucoup le système d'équations pour les contraintes et conduit au *problème à détermination statique locale pour l'état de contrainte.*

En effet, nous avons maintenant pour quatre composantes de la contrainte quatre équations, à savoir: les équations différentielles d'équilibre (58.1), la condition d'écoulement (58.5) et la condition $\sigma_1 = \sigma_\varphi$. Le système d'équations pour les contraintes sera alors du type hyperbolique; ses caractéristiques coïncident avec les lignes de glissement; l'analyse détaillée de ce système est envisagée dans le paragraphe suivant (régime *B*). Au moyen de procédés analogues aux procédés appliqués dans le cas de la déformation plane, on peut examiner divers problèmes particuliers.

L'analyse du champ de vitesses d'après les relations de von Mises ne semble pas possible à exécuter étant donné que le système d'équations s'avère redondant. D'ailleurs cette difficulté disparaît lorsque l'on passe à la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant et à la loi associative de l'écoulement (cf. paragraphe 59). Néanmoins, dans le cas général il est impossible de construire la solution du problème à symétrie axiale pour la seule condition de plasticité totale. Cette condition peut cependant satisfaire à certains problèmes particuliers (cf. paragraphes 60 et 61 ci-après). Notons que, pour le corps continu, nous avons $\sigma_r = \sigma_\varphi$ sur l'axe de symétrie Oz. Cette relation est parfois vérifiée de façon approchée dans l'ensemble du corps.

Il semble donc que les solutions pour la condition de plasticité totale donnent dans certains cas une approximation admissible de la charge limite.

Conformément à l'hypothèse de la plasticité totale, le problème de l'enfoncement d'une sphère rigide dans un milieu plastique a été étudié par A. Ichlinski [[101]]; ce problème est intéressant en particulier vu la méthode connue des essais de dureté des matériaux de Brinell.

La condition de plasticité totale est couramment utilisée dans les calculs technologiques pour le traitement des métaux sous pression (forgeage, estampage, pressage, cf. [[49, 39]]).

59. ÉQUATIONS DE LA DÉFORMATION À SYMÉTRIE AXIALE POUR LA CONDITION D'ÉCOULEMENT DE TRESCA — SAINT-VENANT

1. Relations principales. L'énoncé mathématique des problèmes se simplifie lorsque l'on passe à la condition de plasticité de Tresca — Saint-Venant et à la loi associative de l'écoulement; les avantages

sont particulièrement importants pour les problèmes aux directions principales connues.

La condition d'écoulement aura maintenant la forme:

$$\tau_{max} = \text{const} = k \qquad (2k = \sigma_s), \tag{59.1}$$

avec $2\tau_{max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_\varphi|, |\sigma_\varphi - \sigma_1|)$. Dans l'espace des contraintes principales, cette condition définit la surface d'un prisme hexagonal régulier (fig. 14). Selon la loi associative le vecteur vitesse de déformation est dirigé suivant la normale à la surface d'écoulement, mais l'écoulement reste indéterminé le long des arêtes du prisme (cf. paragraphe 16).

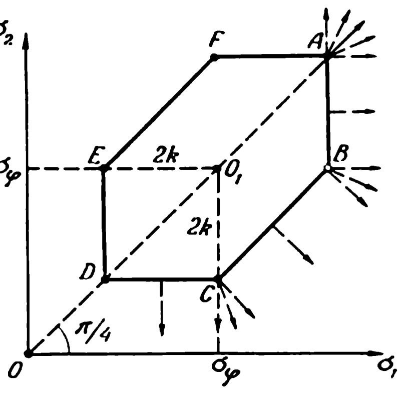


Fig. 180

Conformément à la condition d'incompressibilité

$$\xi_r + \xi_\varphi + \xi_z = 0. \tag{59.2}$$

La contrainte tangentielle σ_φ est la contrainte principale ($\sigma_\varphi = \sigma_3$). Considérons la section du prisme de Tresca — Saint-Venant par le plan $\sigma_\varphi = \text{const}$. On aura alors l'hexagone qui est montré sur la figure 180; les coordonnées de son centre O_1 sont égales à $(\sigma_\varphi, \sigma_\varphi)$.

La condition d'écoulement et les vitesses de déformation principales dans divers régimes sont données dans le tableau ci-après, où λ_1', λ_2' sont des fonctions scalaires non négatives arbitraires (chaque régime possédant ses fonctions).

Passons maintenant à l'analyse détaillée des écoulements dans différents régimes.

2. Régime *A*. Ici $\sigma_1 = \sigma_2$ et il se réalise, comme nous l'avons déjà noté, un cas très particulier de l'état de contrainte. Notamment $q = 0$ et, conformément à (58.7), on a $\tau_{rz} = 0$, tandis que $\sigma_r = \sigma_z = p$. Intégrant maintenant les équations différentielles d'équilibre (58.1), on obtient:

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{c}{r}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r - 2k, \tag{59.3}$$

où $c > 0$ est une constante arbitraire. En vertu de la loi de l'écoulement, on a $\xi_\varphi \leqslant 0$ et donc $u \leqslant 0$. Les contraintes tangentielles étant absentes dans le plan r, z, les projections de la vitesse u et w sont les fonctions continues de r, z (car la discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse ne peut se produire que sur une surface de glissement où $\tau_{max} = k$).

Condition d'écoulement et vitesses de déformation

Régime	Condition d'écoulement	Vitesses de déformation principales		
		ξ_1	ξ_2	ξ_φ
A	$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_\varphi+2k$	λ_1'	λ_2'	$-\lambda_1'-\lambda_2'$
D	$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_\varphi-2k$	$-\lambda_1'$	$-\lambda_2'$	$\lambda_1'+\lambda_2'$
AB	$\sigma_1-\sigma_\varphi=2k\ (\sigma_1>\sigma_2>\sigma_\varphi)$	λ_1'	0	$-\lambda_1'$
CD	$\sigma_2-\sigma_\varphi=-2k\ (\sigma_\varphi>\sigma_1>\sigma_2)$	0	$-\lambda_1'$	λ_1'
BC	$\sigma_1-\sigma_2=2k\ (\sigma_1>\sigma_\varphi>\sigma_2)$	λ_2'	$-\lambda_2'$	0
B	$\sigma_2=\sigma_\varphi=\sigma_1-2k$	$\lambda_1'+\lambda_2'$	$-\lambda_2'$	$-\lambda_1'$
C	$\sigma_1=\sigma_\varphi=\sigma_2+2k$	λ_2'	$-\lambda_1'-\lambda_2'$	λ_1'

Le régime D est analogue au régime A envisagé.

3. Régime AB. Dans ce cas $\xi_\varphi \leqslant 0$, par conséquent, $u \leqslant 0$. On a par la suite:

$$\xi_2 = 0. \tag{59.4}$$

Les vitesses de déformation principales étant égales à

$$\xi_1,\ \xi_2 = \frac{1}{2}(\xi_r+\xi_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\xi_r-\xi_z)^2+\eta_{rz}^2},$$

la condition (59.4) conduit à l'équation différentielle

$$4\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2. \tag{59.5}$$

Joignant ici la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{59.6}$$

on aboutit à un système de deux équations définissant les vitesses u et w pour $u \leqslant 0$. Si le champ de vitesses est trouvé, on déduit les contraintes des équations différentielles d'équilibre (58.1), de la condition d'écoulement

$$\sigma_1 - \sigma_\varphi = 2k, \tag{59.7}$$

ainsi que de la condition de coaxialité de la contrainte et de la vitesse de déformation. Ainsi, ce cas est *à détermination cinématique* locale.

Un écoulement analogue a lieu pour le régime CD (mais $u \geqslant 0$).

Revenons à l'analyse des équations (59.5) et (59.6) pour les vitesses. Soit $u \neq 0$; on aura la solution élémentaire $w = \text{const}$ pour $u = 0$.

L'équation d'incompressibilité (59.6) peut être représentée sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0.$$

Il est évident que l'on peut introduire le potentiel de vitesse

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{59.8}$$

pour lequel on tire de (59.5) l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + 4\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0. \tag{59.9}$$

Pour définir le type de cette équation, on cherche à savoir s'il est possible de construire une solution au voisinage d'une ligne L quelconque pour les valeurs des vitesses u, w définies sur cette ligne $\left(\text{c.-à-d. les valeurs des dérivées } \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$. Le long de la ligne L on a:

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}dr + \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z}dz, \quad d\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z}dr + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dz.$$

A partir de ces relations et de l'équation (59.9), on peut calculer le long de L les dérivées secondes du potentiel V. Ecrivant ensuite les accroissements des dérivées secondes le long de L et utilisant (59.9), on s'aperçoit aisément que les dérivées du troisième ordre ne sont pas définies de façon unique si la courbe L est telle que le long de cette courbe est vérifiée l'une des deux relations suivantes:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)\frac{dz}{dr} = \text{ou} \quad -\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z} + \\ + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \text{ou bien} \quad -\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z}.$$

On peut, à l'aide de (59.8) et des formules connues

$$\left.\begin{aligned} \xi_r,\ \xi_z &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \pm \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)\cos 2\psi, \\ \eta_{rz} &= (\xi_1 - \xi_2)\sin 2\psi, \end{aligned}\right\} \tag{59.10}$$

où ψ est l'angle entre la première direction principale de la vitesse de déformation et l'axe des r (fig. 181), représenter ces équations sous

la forme

$$\left.\begin{array}{ll}\text{soit } \dfrac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \psi, & (\text{lignes } \alpha),\\ \text{soit } \dfrac{dz}{dr} = -\operatorname{cotg} \psi, & (\text{lignes } \beta).\end{array}\right\} \quad (59.11)$$

De la sorte, l'équation (59.9) a deux familles différentes de caractéristiques; ces dernières *sont orthogonales et sont confondues avec les trajectoires des directions principales de la vitesse de déformation.* Le long des caractéristiques les relations ont une forme assez complexe; nous passerons sans nous arrêter sur leur déduction (cf. [142]). La solution de différents problèmes aux limites pour le potentiel de vitesses V peut être obtenue par la méthode des différences finies de Massot.

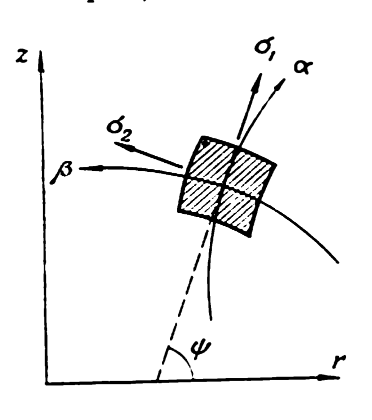


Fig. 181

Passons maintenant au système d'équations pour les contraintes constitué par les équations différentielles d'équilibre (58.1) et la condition d'écoulement (59.7). Cette dernière peut être écrite également sous la forme $\sigma_\varphi = p + q - 2k$. Portant cette valeur de σ_φ et les contraintes σ_r, σ_z, τ_{rz} conformément à (58.7) dans les équations différentielles d'équilibre, on en vient au système:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial r}\cos 2\psi + \frac{\partial q}{\partial z}\sin 2\psi =\\ &= 2q\left(\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}(2k - q + q\cos 2\psi),\\ &\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial r}\sin 2\psi - \frac{\partial q}{\partial z}\cos 2\psi =\\ &\qquad = -2q\left(\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{r} q \sin 2\psi.\end{aligned}\right\} \quad (59.12)$$

Admettant que l'angle ψ soit connu de la solution du problème cinématique, on obtient un système de deux équations pour les fonctions inconnues p, q. On trouve aisément (par exemple, au moyen d'un procédé « déterminant » ordinaire en faisant appel aux expressions pour dp, dq) que le système (59.12) est du type hyperbolique aux mêmes lignes caractéristiques (59.11). Ainsi, les équations pour les vitesses et les contraintes possèdent les mêmes caractéristiques qui sont les trajectoires des contraintes principales dans le plan r, z.

4. **Régime** ***BC***. Ici σ_φ étant la contrainte principale intermédiaire, nous aurons donc $\xi_\varphi = 0$, c.-à-d. $u = 0$. Il découle alors de l'équation d'incompressibilité que w ne dépend que de r : $w = w(r)$. Ensuite, on trouve que $\xi_r = \xi_z = 0$, et $\eta_{rz} = w'(r)$. Par conséquent, les directions des coordonnées r, z coïncident avec celles des éléments de la vitesse de cisaillement maximale. Les contraintes $\sigma_r = \sigma_z$ et $\tau_{rz} = \pm k$ agissent sur ces mêmes éléments. Intégrant la seconde des équations d'équilibre, on obtient :

$$\sigma_r = \sigma_z = \mp k \frac{z}{r} + R(r),$$

où $R(r)$ est une fonction arbitraire. Il résulte maintenant de la première équation d'équilibre que $\sigma_\varphi = \frac{d}{dr} rR(r)$.

Le régime envisagé est lié à un champ de vitesses trivial ($u = 0$, $w = w(r)$).

5. **Régime** ***B***. Il correspond à l'état de « plasticité totale » quand σ_φ est égale à l'une des contraintes principales ; dans le cas donné $\sigma_\varphi = \sigma_2$. Comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe précédent, nous avons maintenant quatre équations pour définir quatre composantes inconnues de la contrainte, c.-à-d. que le *problème est à détermination statique* locale.

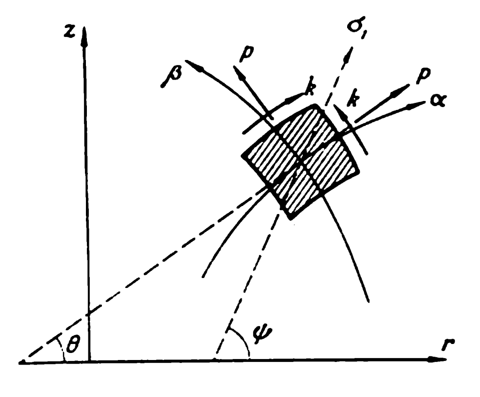


Fig. 182

Le régime C est analogue au régime B, mais la plus grande valeur (dans le sens algébrique) de la contrainte y sera celle de la contrainte principale σ_1 et $\sigma_\varphi = \sigma_1$. Les systèmes d'équations des régimes singuliers B et C étant analogues, il suffit donc d'examiner l'un d'entre eux.

Pour fixer les idées, arrêtons-nous sur le régime C. Le système d'équations approprié pour l'état de contrainte a été étudié par Hencky. Il comporte les équations différentielles d'équilibre (58.1), la condition de plasticité $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ et l'égalité $\sigma_\varphi = \sigma_1$. Les lignes de glissement α, β (trajectoires τ_{max}) dans le plan r, z font un angle de $\mp \frac{\pi}{4}$ avec les directions principales (fig. 182). La contrainte normale $p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ agit sur les éléments de glissement ; notons que p diffère de la pression moyenne σ.

Il est évident que $\sigma_\varphi = p + k$ et la pente de l'élément de glissement $\theta = \psi - \frac{\pi}{4}$. Portant ces valeurs dans les formules (58.7), on trouve:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r,\ \sigma_z &= p \mp k \sin 2\theta, \\ \tau_{rz} &= k \cos \theta. \end{aligned}\right\} \tag{59.13}$$

Substituant les contraintes dans les équations d'équilibre (58.1), on obtient le système d'équations différentielles pour les fonctions inconnues p, θ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - 2k\left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) &= \frac{k}{r}(1 + \sin 2\theta), \\ \frac{\partial p}{\partial z} - 2k\left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) &= -\frac{k}{r}\cos 2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{59.14}$$

En utilisant le procédé « déterminant » nous montrerons que *ce système est hyperbolique*. Soient p, θ les valeurs des fonctions recherchées définies le long d'une ligne quelconque L dans le plan r, z. Pour la surface intégrale passant par L on a:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}\, dr + \frac{\partial p}{\partial z}\, dz, \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial r}\, dr + \frac{\partial \theta}{\partial z}\, dz, \tag{59.15}$$

les coefficients des équations (59.14) et (59.15) étant connus sur L; par rapport aux dérivées partielles, les équations données forment un système de quatre équations algébriques non homogènes linéaires. Si L est une caractéristique, le long de celle-ci les dérivées mentionnées sont indéterminées et, par conséquent, le déterminant du système algébrique cité et les numérateurs appropriés s'annulent.

Egalant à zéro le déterminant du système, on trouve les équations différentielles des lignes caractéristiques:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \theta \qquad \text{(lignes } \alpha), \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{cotg} \theta \quad \text{(lignes } \beta). \end{aligned} \tag{59.16}$$

Ainsi, *il existe deux familles de lignes caractéristiques orthogonales coïncidant avec les lignes de glissement.*

Egalant à zéro les numérateurs (dans les formules de Craemer), on obtient les *relations le long des lignes caractéristiques*:

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{p}{k} - 2\theta\right) - (\sin\theta + \cos\theta)\frac{ds_\alpha}{r} &= 0 \quad \text{(sur la ligne } \alpha), \\ d\left(\frac{p}{k} + 2\theta\right) + (\sin\theta + \cos\theta)\frac{ds_\beta}{r} &= 0 \quad \text{(sur la ligne } \beta), \end{aligned}\right\} \tag{59.17}$$

où ds_α, ds_β sont des éléments de longueur le long des lignes α et β. Ces relations expriment les conditions de l'équilibre plastique de l'élément du réseau de glissement (fig. 182).

Ainsi, pour le régime en question, l'élaboration de la solution se réduit à l'examen d'une série de problèmes aux limites (problème de Cauchy, problème caractéristique initial, etc.). La solution peut être obtenue en appliquant la méthode des différences finies de Massot (identiquement aux problèmes de la déformation plane, chapitre V). Il faut tenir compte des discontinuités éventuelles du champ de contraintes.

Penchons-nous maintenant sur la définition des vitesses u et w que l'on trouve à partir de l'équation d'incompressibilité (59.6) et de la condition de coaxialité

$$\sin 2\theta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \cos 2\theta \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \qquad (59.18)$$

Les restrictions $\xi_2 \leqslant 0$, $\xi_\varphi \geqslant 0$ doivent être alors satisfaites. Il découlera de la deuxième inégalité que $u \geqslant 0$.

On s'assure aisément que le *système d'équations pour les vitesses est également hyperbolique*; ses caractéristiques sont toujours représentées par les lignes de glissement (59.16). Le long des lignes caractéristiques, les équations pour les vitesses prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta\, du + \sin\theta\, dw + \frac{u}{2r}\, ds_\alpha = 0 \quad (\text{sur la ligne } \alpha), \\ &\sin\theta\, du - \cos\theta\, dw - \frac{u}{2r}\, ds_\beta = 0 \quad (\text{sur la ligne } \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (59.19)$$

6. Considérations finales. L'analyse des écoulements pour les régimes DE, E, EF, F, FA se réduit à la répétition des résultats exposés plus haut à des modifications évidentes près.

Les frontières des zones répondant à des régimes différents ne sont généralement pas connues d'avance, ce qui rend la solution du problème essentiellement plus difficile. Une analyse approfondie de la disposition des zones à régimes différents et l'observation de toutes les restrictions convenables et des conditions de compatibilité sont nécessaires pour l'élaboration des solutions; l'application correcte des solutions discontinues a une grande importance. Dans cette optique, les solutions erronées publiées dans plusieurs ouvrages représentent un bon avertissement [126].

On peut trouver dans diverses publications [8,142,173] l'analyse plus détaillée de quelques aspects de la théorie générale et les solutions des problèmes particuliers; le lecteur y trouvera des références bibliographiques complémentaires.

60. ÉTAT DE CONTRAINTE D'UNE INTERCALATION PLASTIQUE MINCE EN TRACTION (COMPRESSION)

1. Généralités. L'étude de l'état de contrainte d'une intercalation plastique mince fixée à des parties rigides est conditionnée par une série de raisons d'ordre pratique. Citons quelques exemples.

La soudure (collage) travaille dans de telles conditions. On sait que la soudure est bien plus solide qu'une barre de section égale, exécutée avec le même matériau que celui du joint de soudure.

Les assemblages soudés dans lesquels le matériau du joint de soudure est beaucoup plus doux que le métal des pièces soudées sont parfois avantageux. L'état de contrainte dans les intercalations minces a certaines particularités, ce qui peut éclaircir certains cas de destruction, inattendus à première vue.

Pour apprécier la solidité d'un métal, il est très important de connaître la valeur de la résistance à la rupture. Pour les métaux plastiques, il est difficile de mesurer cette caractéristique sur des éprouvettes standard ; on est obligé d'habitude de procéder aux essais à des températures très basses (pour réduire la plasticité). Néanmoins, si la traction s'exerce sur une éprouvette (fig. 183), constituée par deux parties cylindriques solides *1* (de diamètre $2a$) qui sont soudées l'une à l'autre par une intercalation mince *2* ($h \ll a$) d'un métal plus doux, on aura alors, à une certaine charge P, une destruction fragile de l'intercalation (pour des déformations petites) suivant un plan n-n quelconque inégal. L'état de contrainte de l'intercalation étant connu, on peut déterminer la valeur de la résistance à la rupture.

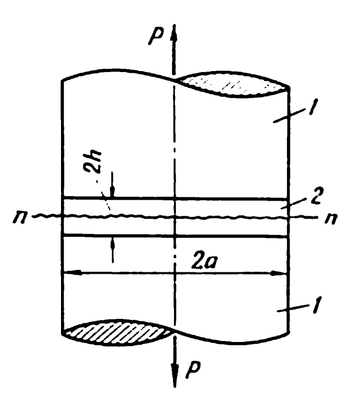


Fig. 183

Notons en passant quelques particularités de la traction d'une telle éprouvette. La différence des coefficients d'élasticité étant négligeable pour les aciers, nous considérons ceux-ci égaux par la suite. Pour le cas de la traction dans les limites de l'élasticité, l'éprouvette se trouve alors dans un état de traction homogène uniaxiale. La limite d'écoulement du matériau du disque (intercalation) une fois atteinte, ce dernier passe entièrement et immédiatement à l'état plastique. Avec l'évolution des déformations plastiques, l'état de contrainte du disque dévie de plus en plus de l'extension uniforme et acquiert un caractère spatial complexe du fait que les parties « rigides » de l'éprouvette qui restent élastiques s'opposent à la déformation du disque. En même temps, des contraintes tangentielles se développent sur les plans de contact de la couche avec les parties rigides. La valeur maximale des contraintes est définie par la limite d'écoulement τ_s.

Le cas de la déformation plane où la contrainte tangentielle atteint partout la limite d'écoulement sur la surface de contact a été étudié par Prandtl (cf. paragraphe 47). La solution de Prandtl se rapporte au stade final de l'écoulement plastique.

Dans les conditions de la symétrie axiale, une solution approchée analogue pour le stade final peut être obtenue en modifiant légère-

ment la conclusion de M. Siebel relative à la compression d'un cylindre. Ci-après nous citons également l'analyse de l'évolution des contraintes dans l'intercalation au fur et à mesure de l'accroissement de la charge.

2. Stade final de l'écoulement. En nous basant sur l'image de l'état de contrainte selon la solution de Prandtl, admettons que les contraintes tangentielles atteignent la limite d'écoulement τ_s à la surface de contact, tandis que dans la partie principale de l'intercalation les contraintes normales sont beaucoup plus grandes que les contraintes tangentielles (autrement dit, l'état de contrainte est voisin de l'état hydrostatique) et sont à peu près constantes suivant l'épaisseur. Notons ensuite qu'on a au centre ($r = 0$) $\sigma_r = \sigma_\varphi$. La dernière égalité est supposée vraie pour l'ensemble de l'intercalation. Introduisons les coordonnées sans dimensions $\rho = r/a$, $\zeta = z/a$, z étant compté à partir du plan moyen du disque, et les contraintes sans dimensions $\sigma_r \sim \sigma_r/\sigma_s$, $\sigma_\varphi \sim \sigma_\varphi/\sigma_s$, $\sigma_z \sim \sigma_z/\sigma_s$, $\tau \sim \tau_{rz}/\tau_s$, où $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$. La condition de plasticité de von Mises prend alors pour le cas de la traction la forme suivante:

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{1-\tau^2}. \tag{60.1}$$

Intégrant la première des équations d'équilibre (58.1) par rapport à z et tenant compte de ce que $\tau_{rz} = \pm\, \tau_s$ pour $z = \pm\, h$, on obtient:

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{1}{\sqrt{3}\,\varkappa} = 0, \left(\varkappa = \frac{h}{a} \ll 1\right). \tag{60.2}$$

Sur le contour $\rho = 1$ $\sigma_r = 0$; cette dernière équation satisfaisant à ladite condition a pour solution

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}\,\varkappa}(1-\rho). \tag{60.3}$$

La composante σ_z est tirée de la condition d'écoulement (60.1); le second membre de cette condition étant nul sur les plans de contact et l'intercalation étant mince, on peut considérer de manière approchée que partout dans l'intercalation

$$\sigma_z \approx \sigma_r. \tag{60.4}$$

La solution présentée n'est plus valable au voisinage du contour $\rho = 1$ et au voisinage de l'axe (tout comme pour la solution de Prandtl). Etant donné que $\varkappa \ll 1$, dans l'intercalation mince on voit apparaître des contraintes normales élevées qui dépassent de beaucoup la limite d'écoulement.

La contrainte moyenne suivant la section transversale de l'intercalation est égale à

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \sigma_z r\,dr\,d\varphi = \frac{\sigma_s}{3\sqrt{3}\,\varkappa}. \tag{60.5}$$

3. Développement de l'état de contrainte. L'intercalation réunit des parties suffisamment rigides dont le module d'élasticité est à peu près le même que celui de l'intercalation, mais dont la limite d'écoulement est beaucoup plus élevée. Lorsque l'effort P est petit, tout l'ensemble subit une déformation élastique de traction uniaxiale:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = \frac{P}{\pi a^2} \equiv p.$$

Lorsque la charge est $p = \sigma_s$, un écoulement plastique est engendré immédiatement dans l'ensemble de l'intercalation ; par la suite, cet écoulement est toutefois réprimé par les parties rigides en raison de quoi des contraintes tangentielles interviennent sur les surfaces de contact. Supposons que ces dernières restent planes ; cette image apparaît comme une approximation satisfaisante grâce à la « mollesse » de l'intercalation.

Pour les variables sans dimensions introduites plus haut, les équations différentielles d'équilibre et la condition d'écoulement de von Mises ont la forme:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = 0, \tag{60.6}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} + \frac{\tau}{\rho} + \sqrt{3} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0, \tag{60.7}$$

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 2\tau^2 = 2. \tag{60.8}$$

Pour $\rho = 1$, les conditions aux limites seront satisfaites au sens de Saint-Venant, c.-à-d.

$$\int_{-\varkappa}^{\varkappa} \tau \, d\zeta = 0, \quad \int_{0}^{\varkappa} \sigma_r \, d\zeta = 0. \tag{60.9}$$

Adoptons ensuite la condition d'incompressibilité du matériau aussi bien dans l'état élastique que dans l'état plastique, ce qui est sans influence notable sur les résultats mais simplifie sensiblement la solution.

Par suite de l'imparité de la contrainte tangentielle τ et de la petitesse de ζ, nous chercherons la solution sous la forme

$$\tau = R(\rho) \frac{\zeta}{\varkappa}. \tag{60.10}$$

Il est évident que la première condition (60.9) est satisfaite. L'équation d'incompressibilité a la forme

$$\frac{\partial u_r}{\partial \rho} + \frac{u_r}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = 0. \tag{60.11}$$

Dans le problème envisagé, les déformations élastiques et plastiques sont du même ordre et il faut en général partir des équations de

la théorie de l'écoulement plastique. Cependant, cela est lié à des grandes difficultés mathématiques. Compte tenu du caractère monotone de la mise en charge, on se basera donc sur les équations de la théorie des déformations. Alors, conformément aux relations (14.5), on a:

$$\frac{\frac{\partial u_r}{\partial \rho}-\frac{u_r}{\rho}}{\sigma_r-\sigma_\varphi}=\frac{\frac{u_r}{\rho}-\frac{\partial u_z}{\partial \zeta}}{\sigma_\varphi-\sigma_z}=\frac{\frac{\partial u_z}{\partial \zeta}-\frac{\partial u_r}{\partial \rho}}{\sigma_z-\sigma_r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\frac{\partial u_r}{\partial \zeta}+\frac{\partial u_z}{\partial \rho}}{\tau}. \quad (60.12)$$

L'intercalation étant mince, nous construirons par la suite la solution approchée du problème en recherchant les contraintes sur les plans de contact $\zeta = \pm \varkappa$ et en les prolongeant d'une manière ou d'une autre dans la profondeur de la couche.

Les sections $\zeta = 0$, $\zeta = \varkappa$, $\zeta = -\varkappa$ demeurent planes. L'intercalation étant mince, il est naturel d'adopter l'hypothèse des sections planes $u_z = u_z(\zeta)$. Il résulte alors de l'équation d'incompressibilité que le déplacement

$$u_r = \frac{C_1(\zeta)}{\rho} - \frac{1}{2} u_z'(\zeta)\,\rho,$$

où $C_1(\zeta)$ est une fonction arbitraire et l'apostrophe désigne la dérivée par rapport à ζ.

Pour $\rho = 0$, on a $u_r = 0$, par conséquent $C_1(\zeta) = 0$. Les relations (60.12) sont maintenant de la forme

$$\frac{0}{\sigma_r-\sigma_\varphi}=\frac{-\frac{3}{2}u_z'}{\sigma_\varphi-\sigma_z}=\frac{\frac{3}{2}u_z'}{\sigma_z-\sigma_r}=\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{-\rho u_z''}{\tau}. \quad (60.13)$$

On en déduit que partout dans l'intercalation

$$\sigma_r = \sigma_\varphi.$$

Considérons maintenant les relations (60.13) pour $\zeta = \varkappa$. Pour $\zeta = \varkappa$ il vient de la condition de plasticité (60.8):

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm\sqrt{1-R^2}. \quad (60.14)$$

Le signe + correspond au cas de la traction. Alors, à partir de (60.13) on obtient:

$$\frac{\sqrt{3}\,u_z'}{\sqrt{1-R^2}} = -\frac{\rho u_z''}{2R}.$$

Introduisant un paramètre arbitraire

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{u_z''}{u_z'}\right)_{\zeta=\varkappa} = C,$$

on trouve la loi de distribution pour des contraintes de contact tangentielles

$$R = \pm \frac{C\rho}{\sqrt{1+C^2\rho^2}}. \qquad (60.15)$$

Le signe $+$ correspond au cas de la traction de l'intercalation. Maintenant, à partir de l'équation différentielle d'équilibre (60.6) pour $\zeta = \varkappa$, on trouve:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa} \int_\rho^1 R\, d\rho + \beta \qquad (\beta = \text{const}). \qquad (60.16)$$

La contrainte σ_z ayant une valeur considérable et étant paire selon ζ, nous supposons que σ_z soit indépendante de ζ. La valeur de σ_z dans l'intercalation sera alors définie conformément à (60.14).

Nous déterminons la contrainte $\sigma_r = \sigma_\varphi$ dans l'intercalation d'après la condition d'écoulement

$$\sigma_r = \sigma_z \mp \sqrt{1-\tau^2}. \qquad (60.17)$$

Satisfaisant à la deuxième condition aux limites (60.9), on trouve la constante β. Portant sa valeur dans (60.16) et (60.14), on obtient:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{\sqrt{1+C^2\rho^2}}{C}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1}\arcsin C_1 - \frac{C_1}{C}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+C^2\rho^2}}, \qquad (60.18)$$

où l'on a posé

$$C_1 = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Les contraintes σ_z sont statiquement équivalentes à l'effort P, c.-à-d.

$$2\int_0^1 \sigma_z \rho\, d\rho = p \quad \left(p = \frac{P}{\pi a^2 \sigma_s} \geqslant 1\right).$$

Cette équation définit la liaison existant entre la constante C et la contrainte moyenne p:

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa}\left[\frac{1}{C_1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{C_1^3} - \frac{1}{C^3}\right)\right] + \\ + \frac{2}{C}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1}\arcsin C_1 - \frac{C_1}{C}\right). \qquad (60.19)$$

Lorsque $C = 0$, ce qui correspond au début de l'écoulement plastique, on a $R = 0$, $\sigma_z = 1$, $p = 1$. Quand C est petit, la distribution de la contrainte de contact tangentielle R est proche d'une distribution linéaire ; avec l'accroissement de C cette distribution dévie de plus en plus de la loi linéaire (fig. 184). Pour $C \to \infty$, la contrainte tangentielle tend vers la limite d'écoulement τ_s, ce qui correspond

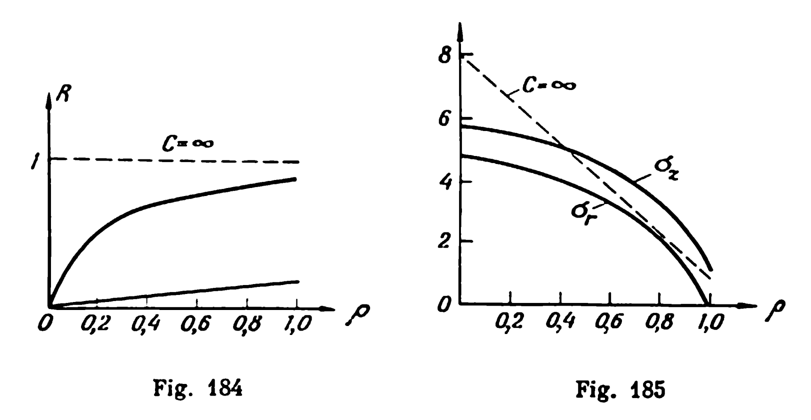


Fig. 184

Fig. 185

à l'état plastique final ($R = 1$, en pointillé). La contrainte moyenne est alors égale à

$$p = p_* = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}\varkappa} . \tag{60.20}$$

Les formules (60.5) et (60.20) diffèrent peu pour les intercalations minces. La valeur réduite de p_* est la contrainte moyenne limite que l'on puisse appliquer à l'intercalation. Un écoulement plastique évolué s'établit lorsque l'on atteint la valeur de p_*.

Les contraintes normales σ_z et $\sigma_r = \sigma_\varphi$ sont distribuées sur la section de façon non uniforme. Leurs courbes pour une certaine valeur de p sont montrées sur la figure 185 avec $\zeta = 0$; la courbe σ_z de l'état plastique final est montrée en pointillé. Avec l'accroissement de la charge, une traction presque « hydrostatique » se développe dans la partie moyenne d'une intercalation mince. La contrainte normale peut alors atteindre une valeur considérable (elle peut dépasser de plusieurs fois la valeur de la limite d'écoulement σ_s pour une traction uniaxiale). Dans ces conditions, une destruction fragile peut se produire dans l'intercalation douce, la résistance à la rupture étant épuisée.

Les variations des contraintes maximales $\sigma_{z,\max}$ (pour $r = 0$) en fonction de la contrainte axiale moyenne p pour une série de valeurs du paramètre épaisseur $\varkappa$ sont montrées sur la figure 186.

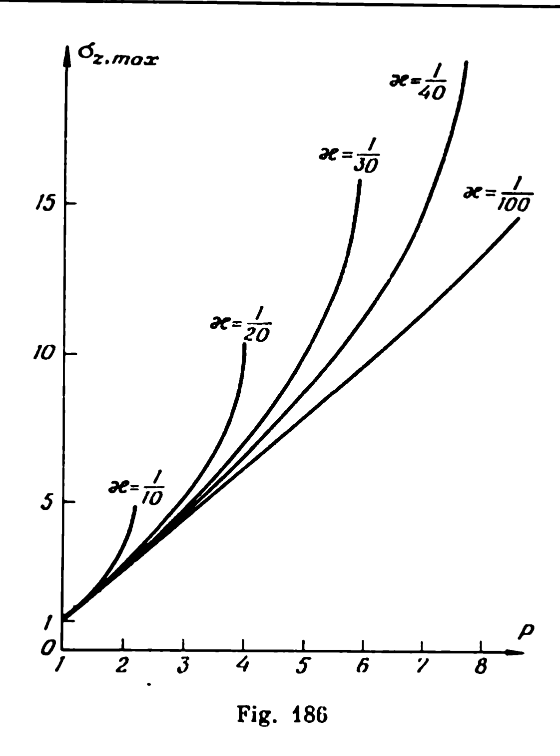


Fig. 186

61. ÉTAT DE CONTRAINTE DANS LE COL D'UNE ÉPROUVETTE SOUMISE À LA TRACTION

Le problème de l'état de contrainte dans le col d'une éprouvette, engendré à la traction, est un problème complexe qui n'est pas encore tout à fait résolu. Etant donné qu'il est important de connaître les valeurs des contraintes au moment précédant la destruction, on a construit des solutions approchées qui se basent sur diverses suppositions suggérées par les données expérimentales. Examinons une solution de cette espèce proposée par N. Davidenkov et N. Spiridonova [96].

La distribution des contraintes cesse d'être uniaxiale et uniforme lorsque se forme un col (striction). La difficulté de l'analyse augmente du fait que la configuration du col n'est pas connue. Dans la solution approchée on utilise les résultats expérimentaux de l'égalité et de la distribution uniforme des déformations naturelles suivant la section minimale du col dans les directions radiale et tangentielle. Il en découle qu'à l'instant donné dans la section $z = 0$

$$\xi_r = \xi_\varphi = \text{const.}$$

Les déformations élastiques étant négligeables devant les déformations plastiques dans la striction, l'équation d'incompressibilité

donne: $\xi_z = -2\xi_r = \text{const}$, et des relations de Saint-Venant — von Mises il découle que dans la section $z = 0$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi. \tag{61.1}$$

Ensuite, pour des raisons de symétrie, $\tau_{rz} = 0$ pour $z = 0$. Dans la même section, les équations différentielles d'équilibre (58.1) ont pour expressions

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \tag{61.2}$$

et la condition d'écoulement sera

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_s. \tag{61.3}$$

Envisageons dans le plan méridien les trajectoires des contraintes principales σ_3, σ_1 (fig. 187) au voisinage du plan $z = 0$; l'angle ω

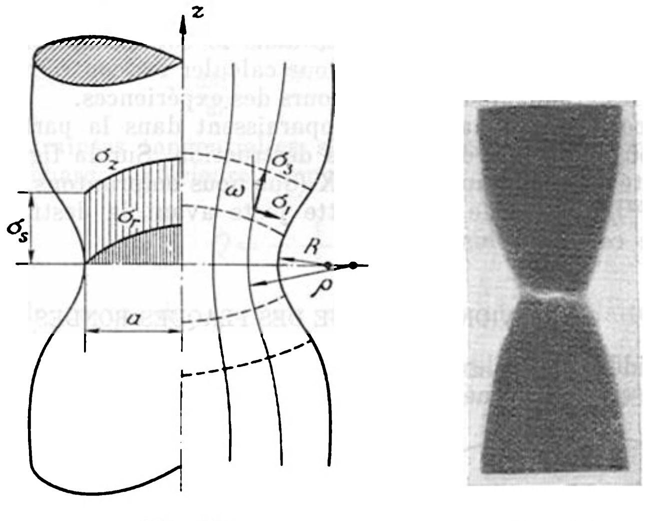


Fig. 187 Fig. 188

que fait la tangente avec la trajectoire de la contrainte σ_3 est petit, et lorsque l'on remplace les indices 1, 2 par 1, 3 respectivement, les formules (58.7) se simplifient:

$$\sigma_z \approx \sigma_3, \quad \sigma_r \approx \sigma_1, \quad \tau_{rz} \approx (\sigma_3 - \sigma_1)\,\omega.$$

Par conséquent, au voisinage du plan $z = 0$

$$\sigma_3 - \sigma_1 \approx \sigma_s, \quad \tau_{rz} \approx \sigma_s \omega \tag{61.4}$$

et

$$\left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)_{z=0} = \sigma_s \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\sigma_s}{\rho}, \tag{61.5}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire de la contrainte principale pour $z = 0$. Le contour du col est une de ces trajectoires; soit $\rho = R$ pour le contour. L'équation différentielle (61.2) entraîne:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = \int_r^a \frac{dr}{\rho},$$

puisque $\sigma_r = 0$ pour $r = a$.

Pour $r = 0$ on a $\rho = \infty$, et pour $r = a$ on a $\rho = R$; sur la base des observations, on admet que

$$\rho = R\frac{a}{r}.$$

Alors

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = \frac{a^2 - r^2}{2aR}, \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_s} = 1 + \frac{a^2 - r^2}{2aR}. \tag{61.6}$$

Cette distribution des contraintes dans le col est montrée dans la partie gauche de la figure 187. Pour calculer les contraintes, il faut mesurer les grandeurs a et R au cours des expériences.

Les contraintes maximales apparaissent dans la partie centrale du col où commence d'ailleurs la destruction. Sur la figure 188 est représenté le cliché aux rayons X (que nous empruntons du livre de Nadaï [52]) du col de l'éprouvette juste avant la destruction, qui confirme cette conclusion.

62. FLEXION PLASTIQUE DES PLAQUES RONDES

Considérons la flexion plastique d'une plaque ronde (fig. 189) pour une charge à symétrie axiale $p = p(r)$, où r est le rayon vecteur; l'épaisseur $2h$ de la plaque est constante. L'axe des z d'un système de coordonnées cylindriques r, φ, z est dirigé vers le bas. Partons du schéma du matériau rigide-plastique. La plaque reste alors indéformable tant que ne sera pas obtenue la charge limite (caractérisant la *portance* de la plaque).

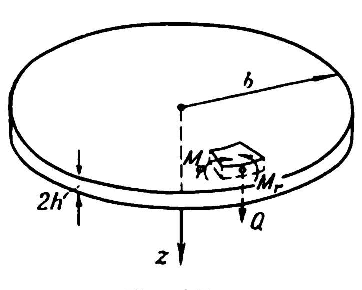


Fig. 189

1. Notions de base. Les notions de base présentent un caractère géométrique dans la théorie classique de la flexion des plaques élastiques, elles seront donc valables également pour le cas de la flexion plastique. Cela signifie que se conservent les hypothèses de Kirchhoff, à savoir:

1) le plan moyen est inextensible;

2) les droites qui, avant la déformation, étaient perpendiculaires au plan moyen, se transforment après la déformation en des droites perpendiculaires à la surface moyenne.

Par rapport aux composantes σ_r et σ_φ, on peut négliger les composantes de la contrainte σ_z et τ_{rz}, les contraintes tangentielles $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$ étant nulles par symétrie. L'« état de contrainte plan » est réalisé dans la plaque. Des moments fléchissants M_r et M_φ agissent respectivement dans les sections r = const et φ = const:

$$M_r = \int \sigma_r z\,dz, \qquad M_\varphi = \int \sigma_\varphi z\,dz,$$

et l'intégration se fait suivant l'épaisseur de la plaque $(-h, +h)$. L'effort tranchant dans la section r = const est égal à

$$Q = \int \tau_{rz}\,dz$$

et il est lié aux moments fléchissants par l'équation différentielle d'équilibre connue (cf., par exemple, [36])

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q. \qquad (62.1)$$

Les contraintes tangentielles suivant le cercle r = const équilibrent la charge extérieure, donc

$$Q = -\frac{1}{r}\int_a^r pr\,dr,$$

où a est le rayon de coupure dans la plaque circulaire ($a = 0$ pour les plaques pleines).

Désignons par $w = w(r)$ la vitesse de fléchissement de la plaque; les composantes de la vitesse de déformation sont alors définies par les relations connues

$$\xi_r = z\varkappa_r, \quad \xi_\varphi = z\varkappa_\varphi, \qquad (62.2)$$

où sont introduits les paramètres de la vitesse de courbure de la surface moyenne de la plaque

$$\varkappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \varkappa_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}.$$

Il est évident que *le rapport des vitesses de déformation* ξ_r/ξ_φ *est constant le long de la normale* au plan de la plaque.

2. Equations de la flexion d'une plaque pour la condition d'écoulement de von Mises. Les vitesses de déformation et les composantes de la contrainte sont liées ici (du fait qu'on néglige les composantes élastiques) par les relations de Saint-Venant — von Mises (paragraphe 13)

$$\xi_r = \frac{\lambda'}{3}(2\sigma_r - \sigma_\varphi), \qquad \xi_\varphi = \frac{\lambda'}{3}(2\sigma_\varphi - \sigma_r), \qquad (62.3)$$

tandis que les composantes de contrainte σ_r, σ_φ non nulles satisfont à la condition d'écoulement

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 = \sigma_s^2. \qquad (62.4)$$

Comme on le sait (paragraphe 16), les relations (62.3) peuvent être écrites sous la forme

$$\xi_r = \frac{\lambda'}{3}\frac{\partial f}{\partial \sigma_r}, \quad \xi_\varphi = \frac{\lambda'}{3}\frac{\partial f}{\partial \sigma_\varphi},$$

où f désigne l'expression dans le premier membre de la condition d'écoulement (62.4). Autrement dit, le vecteur vitesse de déformation

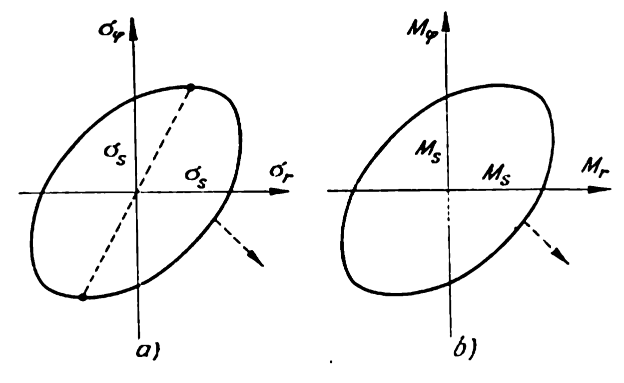


Fig. 190

est normal à la courbe d'écoulement (flèche en pointillé sur la figure 190, *a*).

Désignant par η le rapport ξ_r/ξ_φ, on obtient aisément de (62.3) que σ_φ est proportionnelle à σ_r le long de la normale. Mais alors il résulte de la condition d'écoulement que $\sigma_r = \pm f_1(\eta)\sigma_s$, $\sigma_\varphi = \pm f_2(\eta)\sigma_s$, où f_1 et f_2 sont certaines fonctions de η.

Ainsi, les contraintes σ_r, σ_φ sont constantes le long de la normale pour les z positifs et prennent un signe inverse (conformément à la flexion de la plaque) pour les z négatifs; les contraintes σ_r, σ_φ sont discontinues sur le plan moyen (comme c'est le cas pour l'image de la flexion d'une poutre) et sont représentées par des points opposés sur l'ellipse d'écoulement (fig. 190, *a*). Les moments fléchissants sont donc égaux (ici σ_r, σ_φ sont les valeurs des contraintes pour $z > 0$)

$$M_r = \sigma_r h^2, \quad M_\varphi = \sigma_\varphi h^2 \qquad (62.5)$$

et, en vertu de (62.4), satisfont à la relation

$$M_r^2 - M_r M_\varphi + M_\varphi^2 = M_s^2, \qquad (62.6)$$

où $M_s = \sigma_s h^2$ est la valeur maximale du moment fléchissant. Cette équation est un cas particulier de la relation finie entre les efforts et les moments dans les enveloppes plastiques, indiquée par. A. Iliouchine [9], et sur le plan M_r, M_φ cette équation est représentée également par une ellipse (fig. 190, *b*).

Remplaçant dans les relations (62.3) les contraintes σ_r, σ_φ par les moments M_r, M_φ et les vitesses de déformation par les courbures $\varkappa_r$, $\varkappa_\varphi$, on obtient facilement la relation:

$$\varkappa_r = \lambda^* \frac{\partial F}{\partial M_r}, \quad \varkappa_\varphi = \lambda^* \frac{\partial F}{\partial M_\varphi},$$

où F désigne l'expression dans le premier membre de la relation finie (62.6) et λ^* un facteur scalaire. Ainsi, le vecteur vitesse de la courbure est normal à la courbe limite dans le plan M_r, M_φ (fig. 190. *b*). La loi associative de l'écoulement est donc valable également pour les relations entre les grandeurs généralisées, à savoir les moments M_r, M_φ et les vitesses des courbures $\varkappa_r$, $\varkappa_\varphi$.

Eliminant à l'aide de la condition (62.6) le moment M_φ de l'équation d'équilibre (62.1), on obtient l'équation différentielle non linéaire pour M_r

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} M_r \mp \sqrt{M_s^2 - \frac{3}{4} M_r^2}\right) = Q. \qquad (62.7)$$

La solution de l'équation différentielle (62.7) définit la charge limite pour les conditions aux limites correspondantes.

A partir des relations (62.3) et (62.2) on obtient l'équation différentielle de la vitesse de fléchissement de la plaque

$$r(2M_\varphi - M_r)\frac{d^2w}{dr^2} - (2M_r - M_\varphi)\frac{dw}{dr} = 0, \qquad (62.8)$$

qui est facilement intégrable si l'on connaît les moments fléchissants M_r, M_φ.

Tout comme les articulations plastiques apparaissent lors de la flexion de la poutre, dans les plaques peut apparaître une *circonférence d'articulation*. La vitesse de fléchissement est continue le long de cette circonférence, la dérivée $\frac{dw}{dr}$ est discontinue, la vitesse de courbure $\varkappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2}$ n'est donc pas limitée. Les moments M_r, M_φ étant partout limités, il résultera de (62.8) que $M_r = 2M_\varphi$ sur la circonférence d'articulation. Nous sommes amenés à admettre également qu'une partie quelconque (annulaire) de la plaque peut rester rigide.

Considérons maintenant le *problème sur les conditions aux limites*; ces dernières ont la forme:

1) $M_r = 0$ sur le bord libre;
2) $M_r = 0$, $w = 0$ sur le bord appuyé;

3) $w = 0$, $\frac{dw}{dr} = 0$ le long du bord encastré.

Cette dernière condition signifie que $\varkappa_\varphi = 0$, c.-à-d. $M_r - 2M_\varphi = 0$; par conséquent,

$$M_r = 2M_\varphi = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} M_s.$$

3. Equations de la flexion d'une plaque pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant. La solution de l'équation (62.7) est liée à certaines difficultés. Le problème peut être néanmoins considérablement simplifié si l'on remplace l'ellipse de von Mises par un hexagone correspondant à la condition d'écoulement de Tresca —Saint-Venant (fig. 191). La plaque est alors partagée en zones annulaires dans chacune desquelles la condition d'écoulement est linéaire et l'intégration est facile à réaliser.

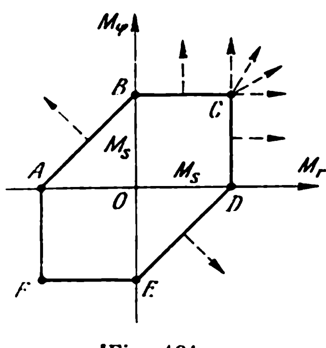


Fig. 191

L'erreur dans ce cas est faible; on peut la réduire si, au lieu d'un hexagone inscrit, on prend un hexagone passant à mi-distance entre les hexagones inscrit et circonscrit. A cet effet, il suffit de remplacer σ_s par la valeur de $\sigma_s' \approx 1{,}08\,\sigma_s$.

On établit aisémet les équations pour la vitesse de fléchissement w à l'aide de la loi associative d'écoulement, énoncée pour l'état de contrainte plan dans le paragraphe 52. Cela étant, ξ_1, ξ_2 passent à ξ_r, ξ_φ.

En vertu des conditions d'équilibre, le moment fléchissant M_r et l'effort tranchant Q seront continus sur la circonférence qui sépare les domaines annulaires des solutions variées; pour ce qui est du moment fléchissant M_φ, il peut être discontinu.

La vitesse de fléchissement w doit être continue, tandis que les vitesses de déformation ξ_r, ξ_φ, peuvent être en général discontinues. La circonférence sur laquelle ξ_φ est discontinue (c.-à-d. que la tangente à la surface de la vitesse de fléchissement subit une rotation finie) est appelée *circonférence d'articulation.*

Sur la *circonférence d'articulation* on a $M_r = \pm M_s$.

En effet, la vitesse de déformation ξ_φ est discontinue sur cette circonférence, tandis que ξ_r n'y est pas limitée. Selon la loi associative d'écoulement, cette situation n'est possible que pour les côtés verticaux de l'hexagone (fig. 191), le long desquels $M_r = \pm M_s$.

Dans le schéma du corps rigide-plastique, on peut admettre qu'une partie de la plaque (une zone annulaire quelconque) peut rester indéformable et éprouver généralement un déplacement vertical rigide.

Les conditions aux limites 1), 2) (pour les bords libre et appuyé). examinées plus haut, sont évidemment conservées. Dans le cas de l'encastrement, on a $\frac{dw}{dr} = 0$ et $M_r = \pm M_s$.

4. Exemples. Examinons quelques problèmes particuliers en nous basant sur la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant.

1) La plaque repose sur des appuis, la charge uniforme p est répartie suivant le cercle de rayon c (fig. 192). Les contraintes sont maximales au centre ($r = 0$) dans le problème élastique correspondant et les déformations plastiques y apparaissent pour la première fois. Pour $r = 0$ on a $M_r = M_\varphi = M_s$ et, au voisinage du centre, il y aura l'un des régimes plastiques suivants: C, BC, CD. Le régime CD est en contradiction avec l'équation d'équilibre (sur CD on a $M_r = M_s$ et $\frac{dM_r}{dr} = 0$) ; d'autre part, $M_\varphi < M_s$, $p > 0$, et de l'équation différentielle (62.1) il découle que $\frac{dM_r}{dr} < 0$. Le régime C est aussi impossible et le régime qui se réalise est donc le régime BC, c.-à-d. $M_\varphi = M_s$. De l'équation différentielle (62.1) on tire alors ($p = 0$ pour $r > c$):

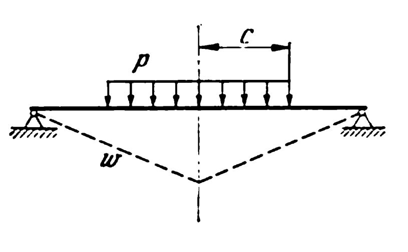


Fig. 192

$$M_r = \begin{cases} \frac{C_1}{r} - \frac{1}{6} pr^2 - M_s & \text{pour } r \leqslant c, \\ \frac{C_2}{r} - \frac{1}{6} pc^2 - M_s & \text{pour } r \geqslant c, \end{cases} \tag{62.9}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. M_r étant limité au centre, il en découle que $C_1 = 0$. A partir de la condition de continuité de M_r pour $r = c$, on trouve que $C_2 = \frac{1}{3} pc^2$.

Le moment fléchissant M_r décroît avec la croissance de r, c.-à-d. que le point figuratif sur la figure 191 se déplace de C vers B. On a $M_r = 0$ sur l'appui et le régime B est réalisé, tandis que le régime BC est réalisé dans le reste de la plaque. Satisfaisant à la condition $M_r = 0$ pour $r = b$, on trouve la charge limite

$$p_* = \frac{6b}{c^2 (3b - 2c)} M_s.$$

L'image de l'écoulement plastique d'une plaque dans l'état limite est définie comme suit. En vertu de la loi associative, pour le segment BC on a $\varkappa_r = 0$ ou $\frac{d^2w}{dr^2} = 0$. D'où l'on trouve aisément pour

la condition aux limites $w = 0$ avec $r = b$:

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r}{b}\right),$$

où w_0 est la valeur de la vitesse de fléchissement au centre qui reste indéterminée. Ainsi, à l'écoulement, la plaque prend la forme de la surface d'un cône (en pointillé sur la figure 192).

Si la charge p agit sur l'ensemble de la surface de la plaque, on a $c = b$; la charge limite sera alors égale à

$$p_* = \frac{6M_s}{b^2}.$$

Pour ce cas, également, l'intégration numérique de l'équation différentielle (62.7), déduite de la condition de plasticité de von Mises, conduit au résultat

$$p_* = 6{,}5\frac{M_s}{b^2}.$$

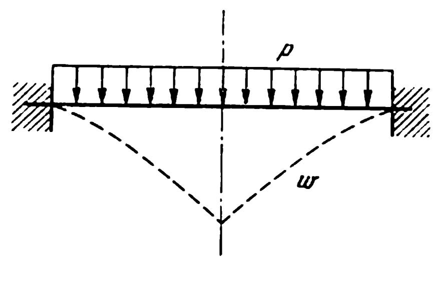


Fig. 193

2) La plaque est encastrée et chargée par une pression uniformément répartie (fig. 193). Comme dans l'exemple précédent, le régime BC se réalise au voisinage du centre. Avec l'accroissement de r, le moment fléchissant M_r décroît et s'annule pour une certaine valeur de $r = \rho$. Le régime BA s'établit ensuite et s'étend dans la plaque jusqu'au contour $r = b$, où $M_r = -M_s$, c.-à-d. où il y a le régime A.

Lorsque $r \leqslant \rho$, on aura conformément à (62.9):

$$M_r = M_s - \frac{1}{6}pr^2.$$

Pour $r = \rho$ on a $M_r = 0$ et

$$\rho^2 = \frac{6M_s}{p}.$$

Pour $r > \rho$ on a $M_\varphi - M_r = M_s$ et de l'équation différentielle d'équilibre on obtient:

$$M_r = M_s \ln\frac{r}{\rho} - \frac{1}{4}p(r^2 - \rho^2),$$

où l'on fait usage de la condition $M_r|_{r=\rho} = 0$. Soit $M_r = -M_s$ sur le contour $r = b$, autrement dit, une charnière se forme le long de l'encastrement; il en résulte l'équation transcendante

$$5 + 2\ln\frac{b}{\rho} = 3\frac{b^2}{\rho^2},$$

définissant ρ et donc, également, la charge limite; les calculs nous donnent $\rho \approx 0{,}73\ b$. De la sorte,

$$p_* = 11{,}3 \frac{M_s}{b^2}.$$

Passons maintenant à la détermination de la vitesse de fléchissement. Comme dans le premier exemple, dans le domaine central $r \leqslant \rho$ on aura:

$$\frac{d^2w}{dr} = 0, \quad w = w_0 + C_1 r,$$

où w_0, C_1 sont des constantes arbitraires.

D'après la loi associative d'écoulement $\varkappa_r : \varkappa_\varphi = -1 : 1$ pour $r > \rho$ (régime AB), c.-à-d.

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = 0.$$

Sur le contour $r = b$, on a $w = 0$; pour cette condition on obtient:

$$w = C_2 \ln \frac{r}{b},$$

où C_2 est une constante arbitraire. D'où l'on voit que la condition $\frac{dw}{dr} = 0$ n'est pas vérifiée sur le contour, et une charnière plastique se forme donc réellement le long du contour.

Les constantes arbitraires C_1, C_2 sont tirées des conditions de continuité de w et $\frac{dw}{dr}$ pour $r = \rho$. La vitesse de fléchissement w_0 reste indéterminée au centre. La forme du fléchissement de la plaque est montrée en pointillé sur la figure 193.

5. **Considérations finales.** L'état limite des plaques en flexion a été étudié dans de nombreux travaux. Nous citerons ici ceux de A. Gvozdev [5], W. Prager [56], P. Hodge [48], A. Grigoriev [95], A. Iliouchine [9] et d'autres auteurs (cf. ouvrages de synthèse [68,79]). La condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant et la loi associative d'écoulement sont devenues d'une application très courante; il convient de noter que les moments et les vitesses de courbure qui sont des grandeurs généralisées sont alors directement liés. Un schéma similaire est développé également pour l'analyse de l'équilibre limite des enveloppes à symétrie axiale [48].

La flexion élasto-plastique des plaques rondes a été étudiée par V. Sokolovski [33] sur la base des équations de la théorie des déformations ainsi que par B. Tekinalp [192] qui fonda ses raisonnements sur la théorie de l'écoulement.

Il est commode de chercher la charge limite pour les plaques et les enveloppes au moyen de la méthode énergétique en utilisant les propriétés d'extremum de l'état limite. Ce problème fera l'objet d'une étude dans le chapitre VIII ci-après où, en guise d'exemple, on examinera la méthode énergétique de la recherche de la charge limite pour les plaques rondes (paragraphe 66).

Exercices du chapitre VII

1. Trouver la solution de l'équation différentielle (62.7) pour le cas de la plaque annulaire appuyée sur son contour extérieur et chargée uniformément suivant son contour intérieur.

2. Trouver (pour la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant), la charge limite d'une plaque annulaire chargée uniformément et appuyée suivant son contour extérieur.

CHAPITRE VIII

PRINCIPES D'EXTREMUM ET MÉTHODES DE SOLUTION ÉNERGÉTIQUES

63. PRINCIPES D'EXTREMUM. GÉNÉRALITÉS

Dans la théorie de la plasticité, comme dans celle de l'élasticité, les théorèmes généraux sont d'une grande importance. On y rapporte avant tout les théorèmes relatifs aux propriétés d'extremum de la solution et les théorèmes d'unicité. Les problèmes de l'existence des solutions, qui sont fort complexes, peu étudiés et qui sont liés d'habitude à toute une série de restrictions, imposées par la méthode des démonstrations, présentent un intérêt mécanique secondaire. Ces théorèmes demeurent néanmoins nécessaires pour argumenter rigoureusement la non-contradiction des équations de départ.

Outre leur intérêt de caractère général, les théorèmes d'extremum ouvrent la voie de la construction directe des solutions sans recourir à l'intégration des équations différentielles. Une telle éventualité est très prometteuse dans les problèmes non linéaires de la théorie de la plasticité.

Les *principes d'extremum dans la théorie du corps rigide-plastique* ont une grande importance. Dans les chapitres précédents, on a longuement insisté sur les difficultés liées à la non-unicité des schémas de solution dans la théorie du corps rigide-plastique. Ceci nous a incité d'introduire les notions des champs de vitesses cinématiquement admissibles et des états de contrainte de l'écoulement statiquement possibles et de formuler, sans le démontrer, le *critère du choix*. Ce dernier résulte des théorèmes d'extremum envisagés ci-après (paragraphes 64, 65).

Lorsque, dans un corps rigide-plastique parfait, la charge limite est atteinte, un écoulement plastique libre s'y produit. L'état limite peut être interprété comme un état précédant la rupture. En raison de quoi cet état limite est parfois appelé *état de rupture plastique*, et les théorèmes d'extremum, caractérisant la charge limite, sont nommés *théorèmes relatifs à la rupture plastique.*

Les théorèmes d'extremum pour le corps rigide-plastique conduisent à des procédés efficaces pour la recherche directe de la charge

limite par rapprochement successif des estimations supérieure et inférieure (paragraphe 65). Des exemples variés d'application de la méthode énergétique sont donnés dans le paragraphe 66.

Dans la théorie des déformations plastiques, les théorèmes d'extremum sont la généralisation des théorèmes correspondants du minimum pour le corps élastique (à savoir, les théorèmes du minimum d'énergie totale du système et les théorèmes de Castigliano). Ces théorèmes sont d'un usage courant pour la résolution approchée de divers problèmes particuliers par des méthodes directes (essentiellement par la méthode de Ritz). Les théorèmes du minimum et quelques-unes de leurs applications les plus simples pour la théorie des déformations sont énoncés dans les paragraphes 67, 68.

Les formulations des *principes d'extremum pour le milieu élasto-plastique*, satisfaisant aux équations de la théorie d'écoulement (pour une plasticité parfaite et en présence de l'écrouissage), sont données dans la partie finale du chapitre (paragraphe 69). Ces principes, à la différence de ceux qui les précèdent, déterminent les propriétés d'extremum des *accroissements* (ou des vitesses) de déplacements et des *accroissements* de contraintes répondant aux petits accroissements des forces extérieures ou des déplacements donnés. Naturellement, il est bien plus difficile d'appliquer de telles propriétés « locales », liées à la nature différentielle des équations de la théorie de l'écoulement plastique, à des schémas de solution efficaces et elles sont intéressantes surtout en principe.

Aux théorèmes généraux on rapporte de même, en général, les *théorèmes d'adaptation* des constructions élasto-plastiques sollicitées par des charges cycliques. Cependant, compte tenu de la particularité des problèmes de ce type, cette question est traitée dans un chapitre à part (chapitre IX).

On pourra trouver l'exposé rigoureux des théorèmes généraux de la théorie des milieux élasto-plastiques ainsi que des références bibliographiques détaillées dans l'ouvrage remarquable de W. Koiter [77]. De nombreuses applications des théorèmes énergétiques sont décrites dans les livres de A. Gvozdev [5], A. Iliouchine [9], B. Neal [54], W. Prager [56], Prager et Hodge [58], Y. Rabotnov [23], P. Hodge [48] et d'autres auteurs. Le lecteur pourra également recueillir des renseignements supplémentaires variés relatifs à ce sujet dans plusieurs articles [77,79,82].

64. PRINCIPES D'EXTREMUM POUR LE CORPS RIGIDE-PLASTIQUE

1. Généralités. Il a été remarqué plus haut l'importance que présentent les principes d'extremum pour le corps rigide-plastique (à palier d'écoulement), principes qui sont couramment employés pour l'élaboration des solutions approchées.

Les conditions de validité du schéma du corps rigide-plastique ont été discutées précédemment; elles dépendent essentiellement du caractère du problème considéré.

Lorsque l'on néglige les vitesses de la déformation élastique, les relations plus simples de la théorie de Saint-Venant — von Mises (paragraphe 13)

$$\xi_{ij}=\lambda s_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{\xi_{ij}}{H}=\frac{s_{ij}}{2\tau_s} \tag{64.1}$$

sont vérifiées.

Ci-après nous n'étudierons que les petites déformations du corps rigide-plastique, quand on peut négliger les changements de la géométrie du corps et des positions de ses points. D'ailleurs, on peut souvent étendre aussi ces résultats aux problèmes de l'écoulement plastique permanent en considérant l'état instantané.

L'état limite du corps rigide-plastique est défini par une combinaison finie des charges au moment où apparaît l'écoulement plastique. Il est évident que la voie de chargement échappe à l'examen tout comme les contraintes et les déformations initiales. On peut alors, sous cet aspect, parler de l'indépendance de la charge limite par rapport à la voie de chargement et aux contraintes initiales.

L'importance pratique de cette conclusion est révélée par les résultats expérimentaux et les solutions complètes de certains problèmes élasto-plastiques. Cette propriété devient compréhensible si l'on tient compte que, lors de l'évolution de la déformation dans une direction déterminée (cf. paragraphe 15), les contraintes tendent vers certaines valeurs « permanentes », indépendantes de la voie de déformation.

A mesure qu'on s'approche de l'état limite, les déformations du corps croissent en général rapidement dans la direction de l'action des charges. Si, au voisinage des valeurs limites, ces dernières augmentent proportionnellement à un paramètre, les déformations se développent dans une direction déterminée et l'influence de la voie de chargement faiblit de plus en plus.

2. Equation énergétique fondamentale. Envisageons un corps quelconque occupant un volume V et limité par la surface $S = S_F + S_v$ (fig. 194). Un effort $\boldsymbol{F}_n$ est défini sur une partie de surface du corps S_F; désignons les composantes de cet effort suivant les axes x_i ($i = 1, 2, 3$) par X_{ni}. La vitesse $\boldsymbol{v}_0$ est définie sur une partie de surface S_v du corps; désignons ses composantes par v_{0i}. Pour des raisons de simplicité, on suppose que les forces de volume soient absentes. Par la suite, on utilisera les notations tensorielles (cf. paragraphe 1).

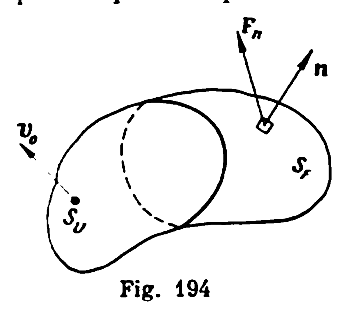


Fig. 194

Soit σ_{ij} un champ de contraintes quelconque satisfaisant aux équations différentielles d'équilibre (cf. paragraphe 4) à l'intérieur du corps

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=0 \tag{64.2}$$

et qui est équilibré avec les charges X_{ni} donées sur la frontière de S_F conformément aux formules de Cauchy (1.2)

$$\sigma_{ij}n_j = X_{ni} \quad \text{sur} \quad S_F, \tag{64.3}$$

où n_j sont les cosinus directeurs de la normale $\boldsymbol{n}$.

D'autre part, introduisons un champ de vitesse v_i continu quelconque satisfaisant aux conditions données sur S_v, c.-à-d.

$$v_i = v_{0i} \quad \text{sur} \quad S_v. \tag{64.4}$$

A ce champ de vitesses correspondent les composantes de la vitesse de déformation (paragraphe 3)

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{64.5}$$

Les champs de contraintes σ_{ij} et de vitesses v_i introduits sont pour le reste arbitraires et, en général, ne sont pas liés entre eux. Ces champs sont supposés continus (cette restriction sera levée par la suite). La configuration du corps ou bien diffère peu de la configuration initiale (V et S seront alors le volume et la surface du corps avant la déformation) ou bien caractérise l'état courant connu.

Pour tout milieu continu est vraie l'équation fondamentale suivante

$$\int \sigma_{ij}\xi_{ij}\,dV = \int X_{ni}v_i\,dS, \tag{64.6}$$

où la première intégrale s'étend à l'ensemble du volume V du corps et la seconde, à l'ensemble de la surface S de celui-ci.

Pour les besoins de la démonstration, représentons l'intégrale de surface à l'aide des relations de Cauchy (64.3) sous la forme

$$\int X_{ni}v_i\,dS = \int \sigma_{ij}v_i n_j\,dS$$

et transformons-la en une intégrale de volume suivant la formule de Gauss — Ostrogradsky

$$\int Q_j n_j\,dS = \int \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\,dV. \tag{64.7}$$

On voit aisément que

$$\int \sigma_{ij}v_i n_j\,dS = \int v_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\,dV + \int \sigma_{ij}\xi_{ij}\,dV.$$

Dans le second membre la première intégrale est nulle en vertu des équations différentielles d'équilibre (64.2), ce qui démontre bien l'équation (64.6).

Il convient de généraliser cette équation tout d'abord pour le cas du corps présentant des domaines rigides (indéformables), puis, pour celui des champs de contraintes et de vitesses discontinus.

La première généralisation est presque évidente. En effet, si le corps renferme un domaine déformable (V_d) et un domaine rigide V_r, séparés par une surface Σ, sur laquelle les vitesses et les contraintes sont continues, on aura alors pour chaque domaine conformément à (64.6):

$$\int \sigma_{ij}\xi_{ij}\,dV_d = \int X_{ni}v_i\,dS_d + \int X_{ni}v_i\,d\Sigma,$$

$$0 = \int X_{ni}v_i\,dS_r - \int X_{ni}v_i\,d\Sigma.$$

Le domaine d'intégration (ici et par la suite) est désigné par sa différentielle correspondante. Ainsi, la première intégrale à gauche est prise sur le domaine V_d, la première intégrale dans la seconde relation est prise sur la surface du corps S_r, contiguë au domaine V_r, etc. Sommant les relations écrites, on aboutit (du fait que $S = S_d + S_r$) à l'équation précédente (64.6). Ainsi, *l'équation énergétique fondamentale* (64.6) *peut être écrite par rapport à l'ensemble du corps (y compris les domaines rigides).*

3. Généralisation de l'équation énergétique fondamentale pour les champs discontinus. Les résultats précédents sont fondés sur l'hypothèse de la continuité des champs de vitesses et de contraintes. Pourtant, on a des exemples simples (flexion, torsion, problème plan) qui prouvent que dans l'état limite les contraintes présentent très souvent des discontinuités. Les discontinuités des vitesses sont également inévitables dans le schéma du corps rigide-plastique. Enfin, il est parfois commode de construire des solutions discontinues approchées. On examinera en conséquence une généralisation de l'équation énergétique pour le cas des champs discontinus.

D i s c o n t i n u i t é s d a n s l e s c o n t r a i n t e s. Examinons tout d'abord le cas où les contraintes sont discontinues sur certaines surfaces S_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Les surfaces S_k divisent le corps en un nombre fini de parties dans chacune desquelles les contraintes varient de façon continue et, par conséquent, l'équation obtenue plus haut est vraie; les intégrales de surface correspondantes s'étendent alors à la surface de chacune des parties dégagées. Soient X_{ni}^+ et X_{ni}^- des forces de surface agissant de part et d'autre de S_k.

Des conditions d'équilibre de l'élément d'une surface quelconque il découle que:

$$X_{ni}^+ + X_{ni}^- = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Donc, toutes les intégrales se réduisent sur la surface de discontinuité S_k lorsque l'on procède à la sommation des équations écrites pour chacune des parties du corps, autrement dit *la présence des discontinuités dans les contraintes ne se répercute pas sur la forme de l'équation énergétique fondamentale.*

D i s c o n t i n u i t é s d a n s l e s v i t e s s e s. Passons maintenant à l'examen des discontinuités du champ de vitesses sur certaines surfaces S_l ($l = 1, 2, 3, \ldots$).

Nous noterons avant tout que la discontinuité n'est possible que dans la composante de la vitesse se trouvant dans le plan tangent à S_l (composante tangentielle de la vitesse), sinon des « fissures » se formeraient dans le corps.

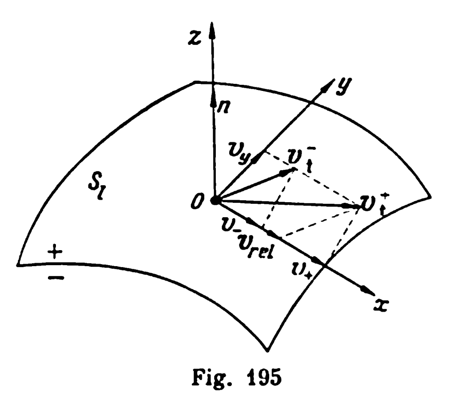


Fig. 195

Le cas du voile (ou enveloppe), pour lequel un amincissement (« col ») ou un épaississement (« collet ») peut apparaître brusquement le long de certaines lignes, est une exception. De telles discontinuités sont examinées dans le chapitre VI. Nous reviendrons plus tard à ce cas; pour le moment nous admettrons que la composante normale de la vitesse est continue sur S_l.

En un point quelconque de la surface de discontinuité S_l traçons un système de coordonnées local x, y, z en dirigeant l'axe des z suivant la normale à la surface (fig. 195). Désignons par v_t^+ et v_t^- les composantes tangentielles de la vitesse respectivement du côté

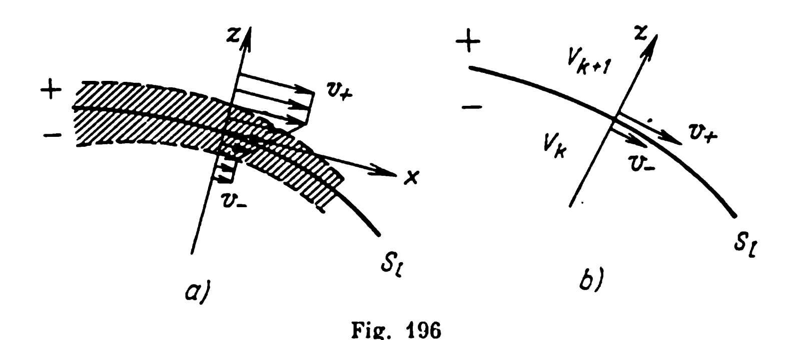


Fig. 196

positif et du côté négatif de la surface S_l. Soit $v_{rel} = v_t^+ - v_t^-$ un vecteur vitesse relative; c'est le long de ce vecteur qu'on dirige l'axe des x. Il convient de considérer la surface de discontinuité comme la position limite d'une couche mince avec une variation continue et brusque de la vitesse suivant l'épaisseur de la couche (fig. 196, *a*). Seule la composante v_x subit une variation brusque, tandis que v_y et v_z restent presque constantes suivant l'épaisseur de la couche. Il est évident que la vitesse de cisaillement η_{xz} est beaucoup plus gran-

de que les autres composantes de la vitesse de déformation ; lorsque l'épaisseur de la couche tend vers zéro, $\eta_{xz} \to \infty$, et les autres composantes de la vitesse de déformation restent limitées. Désignons ensuite par τ la composante tangentielle de la contrainte sur la surface S_l dans la direction des x.

Les surfaces de discontinuité S_l divisent le corps en éléments $V_1, V_2, \ldots$, dans chacun desquels les contraintes et les vitesses présentent les propriétés de continuité nécessaires. De ce fait, l'équation trouvée plus haut est applicable à chacun de ces éléments. L'équation mentionnée comprend la puissance des efforts de surface. Lorsque l'on fait la somme des équations écrites pour chaque élément du corps, on trouve toujours deux intégrales pour chaque surface de discontinuité (une pour sa face positive, l'autre pour sa face négative, fig. 196, *b*).

Envisageons l'élément de surface dS_l; admettons qu'il y a un domaine V_k du côté négatif de dS_l et un domaine V_{k+1} du côté positif. La puissance correspondante des contraintes pour le domaine V_k est égale à

$$(\sigma_n v_n + \tau_y v_y + \tau v_-)\, dS_l,$$

où τ_y et v_y désignent respectivement les composantes de la contrainte tangentielle et de la vitesse tangentielle suivant l'axe des y.

Pour le domaine V_{k+1}, la puissance correspondante des contraintes est égale à

$$-\,(\sigma_n v_n + \tau_y v_y + \tau v_+)\, dS_l.$$

Par conséquent, la somme des puissances des contraintes pour un élément est égale à

$$-\,\tau\,[v]\, dS_l,$$

où $[v]$ désigne le saut de vitesse $v_+ - v_- = |\,v_{\text{rel}}\,|$. Ainsi, les contraintes s'exerçant sur les surfaces de discontinuité de la vitesse développent la puissance

$$-\sum \int \tau\,[v]\, dS_l,$$

où la sommation s'étend à toutes les surfaces de discontinuité S_l. Il importe d'insérer cette puissance dans l'équation énergétique fondamentale (64.6), et on aura alors

$$\int X_{ni} v_i\, dS = \int \sigma_{ij}\xi_{ij}\, dV + \int \tau\,[v]\, dS_p. \qquad (64.8)$$

Pour simplifier l'écriture, le signe somme est omis ; l'intégration s'étend à toutes les surfaces de discontinuité $S_p = S_1 + S_2 + \ldots$

Dans l'équation (64.8), on a à gauche la « puissance » des forces de surface et à droite la « dissipation ».

Arrêtons-nous sur quelques remarques.

1. L'équation (64.8) est vérifiée pour tout milieu continu en équilibre. Les vitesses et les contraintes faisant partie de (64.8) ne sont pas en général liées entre elles.

2. Supposons que le milieu satisfasse aux équations de la théorie de Saint-Venant — von Mises (64.1). Comme nous l'avons déjà noté, dans le voisinage de la surface de discontinuité, la vitesse de glissement est $\eta_{xz} \to \infty$, et il découle alors des relations (64.1):

$$\begin{aligned} &\sigma_x \to \sigma, \quad \sigma_y \to \sigma, \quad \sigma_z \to \sigma, \\ &\tau_{xy} \to 0, \quad \tau_{yz} \to 0, \quad \tau_{xz} \to \tau_s, \end{aligned} \qquad (64.9)$$

c.-à-d. que la surface de discontinuité est au fond la surface de la contrainte tangentielle maximale (surface de glissement).

Les contraintes et les vitesses de déformation étant maintenant liées par les relations (64.1), le cisaillement se produit dans la direction de la contrainte tangentielle agissante, c'est pourquoi

$$\tau\,[v] = \tau_s\,[v] > 0. \qquad (64.10)$$

3. Dans le cas de l'état de contrainte plan, il peut y avoir lieu aussi une discontinuité de la composante *normale* de la vitesse sur la ligne de discontinuité L (paragraphe 53, fig. 165). La dissipation par unité de longueur du col est donnée par la formule (53.28). A la place du second terme dans le second membre de l'équation fondamentale (64.8) il faut introduire la quantité

$$\tau_s h \int v \sqrt{1+\sin^2\gamma}\, ds_L,$$

où ds_L est un élément de la ligne L (ou bien la somme de termes similaires s'il existe plusieurs lignes de discontinuité). Ici v est la valeur de la discontinuité de la vitesse, γ l'angle d'inclinaison de la vitesse $\boldsymbol{v}$ vers la ligne L; pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il n'y a pas de glissement relatif et il ne se produit qu'un amincissement tandis que pour $\gamma = 0$ on ne constate qu'un glissement.

4. Propriétés minimales du champ de vitesses réel. Appliquons l'équation énergétique (64.8) au corps rigide-plastique. Soient les quantités σ_{ij}, ξ_{ij}, v_i qui représentent la solution réelle du problème; les contraintes et les vitesses de déformation sont liées alors par les relations de Saint-Venant — von Mises et satisfont à toutes les conditions d'équilibre et de continuité. L'équation énergétique fondamentale (64.8) est évidemment vraie par rapport à cet état réel.

Outre l'état réel, nous envisagerons un autre *champ cinématiquement admissible* v_i' satisfaisant à la condition d'incompressibilité et aux conditions aux limites données (64.4) sur S_v. Aux vitesses v_i' répondent conformément à (64.5) les vitesses de déformation ξ_{ij}' auxquelles correspond selon les relations (64.1) pour $\xi_{ij}' \neq 0$ le déviateur des contraintes s_{ij}^*. Ce dernier, en fait, ne satisfera pas aux équa-

tions d'équilibre. Ensuite, selon les formules de Cauchy (64.3), aux contraintes s^*_{ij} correspondent des forces de surface X^*_{ni} quelconques (qui sont déterminées à la pression hydrostatique près). Finalement, soit v'_i un champ cinématiquement admissible qui est discontinu sur certaines surfaces S'_l, $l = 1, 2, \ldots$

On opère de la sorte la comparaison du champ de vitesses réel v_i avec le champ cinématiquement admissible v'_i.

Par rapport à la distribution réelle des contraintes σ_{ij} et au champ de vitesses cinématiquement admissible v'_i, l'équation énergétique fondamentale (64.8) est également applicable et se récrit sous la forme

$$\int \sigma_{ij}\xi'_{ij}\,dV - \int X_{ni}v'_i\,dS + \int \tau\,[v']\,dS'_p = 0, \qquad (64.11)$$

où par $[v']$ est désigné le saut $v'_+ - v'_-$ sur S'_p.

Comme nous l'avons déjà noté (paragraphe 16), on peut représenter les contraintes σ_{ij} et les vitesses de déformation ξ_{ij}, ξ'_{ij} par des vecteurs dans un espace de contraintes à neuf dimensions. A la condition d'écoulement correspondra une surface convexe (hypersurface) qui est la surface d'écoulement (cf. fig. 23). Les vecteurs σ_{ij} et ξ_{ij} sont parallèles en vertu des relations de Saint-Venant — von Mises (64.1) ; l'expression $\sigma_{ij}\,\xi_{ij}$ qui est le produit scalaire des vecteurs parallèles est égale au produit de leurs modules, c.-à-d.

$$\sigma_{ij}\xi_{ij} = s_{ij}\xi_{ij} = TH = \tau_s H.$$

L'autre expression $\sigma_{ij}\xi'_{ij}$ est le produit scalaire des vecteurs qui ne sont pas en général parallèles, c'est pourquoi

$$\sigma_{ij}\xi'_{ij} = s_{ij}\xi'_{ij} \leqslant TH'. \qquad (64.12)$$

Il y aura un signe d'égalité dans la zone plastique pour $\xi'_{ij} = c\xi_{ij}$, où c est un facteur scalaire quelconque. Mais alors il découle de (64.1) que $s^*_{ij} = s_{ij}$, ce qui signifie que l'état de contrainte σ^*_{ij}, correspondant au champ cinématiquement admissible, se distingue de l'état de contrainte réel σ_{ij} par la valeur de la pression hydrostatique. Etant donné que σ_{ij} satisfont aux équations différentielles d'équilibre (64.2), on voit facilement que la pression additive mentionnée doit être constante. Si $S_v \neq 0$ (les vitesses sont définies quelque part sur la surface), on a alors $c = 1$ et les champs de vitesses v_i et v'_i coïncident. Si $S_F \neq 0$ (c.-à-d. que les contraintes sont définies en des points quelconques de la surface du corps), la pression additive est alors nulle d'après les conditions aux limites.

Passant à une quantité $\tau_s H'$ plus grande, on obtiendra de (64.11) l'inégalité

$$\tau_s \int H'\,dV - \int X_{ni}v'_i\,dS + \int \tau\,[v']\,dS'_p \geqslant 0. \qquad (64.13)$$

Ici, dans le premier membre de la relation, on a une grandeur inconnue qui est la contrainte réelle τ. Mais la contrainte tangentielle

maximale τ_{max} et l'intensité T sont liées par l'inégalité (1.20) qui entraîne que $\tau_{max} \leqslant \tau_s$, et on a donc également $|\tau| \leqslant \tau_s$.

En remplaçant $\tau[v']$ par $\tau_s |[v']|$ on ne fait que renforcer l'inégalité (64.13).

L'expression analogue à (64.13) (c.-à-d. sans accents) étant nulle pour le champ de vitesses réel, on aura donc

$$\tau_s \int H\, dV - \int X_{ni} v_i\, dS_F + \tau_s \int [v]\, dS_p \leqslant$$
$$\leqslant \tau_s \int H'\, dV - \int X_{ni} v'_i\, dS_F + \tau_s \int |[v']|\, dS'_p. \quad (64.14)$$

L'égalité n'aura lieu que dans le cas où le champ cinématiquement admissible v'_i coïncide avec celui réel v_i. On appellera *puissance totale* l'expression dans le second membre.

Ainsi, *la puissance totale atteint le minimum absolu pour le champ de vitesses réel.*

Nous noterons que, en vertu de (64.8), le premier membre de l'inégalité est égal à $\int X_{ni} v_{0i}\, dS_p$.

5. Propriétés de maximum de l'état de contrainte réel. Soit toujours σ_{ij}, ξ_{ij}, v_i la solution réelle du problème, les contraintes et les vitesses de déformation étant liées par les relations de Saint-Venant — von Mises (64.1) et satisfaisant aux conditions d'équilibre et de continuité.

Introduisons maintenant la notion des *états de contrainte d'écoulement statiquement admissibles* σ'_{ij}. Nous appellerons ainsi tout état de contrainte σ'_{ij} satisfaisant à l'intérieur du corps aux équations différentielles d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad (64.15)$$

à la surface du corps, aux conditions aux limites définies sur S_F

$$\sigma'_{ij} n_j = X_{ni} \text{ sur } S_F \quad (64.16)$$

et ne dépassant pas la limite d'écoulement, c.-à-d.

$$T' \equiv \left(\frac{1}{2} s'_{ij} s'_{ij}\right)^{1/2} \leqslant \tau_s. \quad (64.17)$$

L'état de contrainte σ'_{ij} peut être discontinu.

Comparons l'état de contrainte réel σ_{ij} à l'état de contrainte d'écoulement statiquement admissible σ'_{ij}.

L'équation énergétique fondamentale (64.8), où v_i est un champ de vitesses réel, est valable pour l'état de contrainte réel.

D'autre part, l'état de contrainte σ'_{ij} étant un état d'équilibre, l'équation énergétique fondamentale entraîne également

$$\int X'_{ni} v_i\, dS = \int \sigma'_{ij} \xi_{ij}\, dV + \int \tau' [v]\, dS_p, \quad (64.18)$$

où sur S_F $X'_{ni} = X_{ni}$, tandis que sur S_v les efforts X'_{ni} sont définis par les formules de Cauchy (64.16) ; τ' est la composante tangentielle de l'état de contrainte statiquement possible σ'_{ij} dans la direction des x sur la surface de discontinuité S_p des vitesses réelles v_i.

Déduisant l'équation (64.8) de (64.18) et tenant compte de (64.16) on obtient :

$$\int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})\, \xi_{ij}\, dV = \int (X'_{ni} - X_{ni})\, v_{0i}\, dS_v + \int (\tau_s - \tau')\, [v]\, dS_p. \quad (64.19)$$

Profitons maintenant des conceptions géométriques précédentes. Le vecteur ξ_{ij} est normal à la surface d'écoulement Σ (fig. 197) ; le vecteur σ_{ij} est parallèle au vecteur ξ_{ij} et atteint la surface d'écoulement. Quant au vecteur contraintes statiquement possibles σ'_{ij}, il se trouve en général à l'intérieur de la surface d'écoulement. Le vecteur différence $\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}$ est montré en pointillé sur la figure 197. Par suite de la convexité de la surface d'écoulement, les vecteurs $(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})$ et ξ_{ij} forment un angle obtus, et leur produit scalaire est donc négatif :

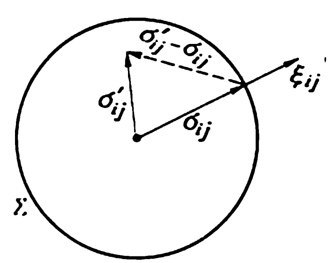


Fig. 197

$$(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})\, \xi_{ij} \leqslant 0. \quad (64.20)$$

Ici le signe d'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où la différence entre les contraintes σ'_{ij} et σ_{ij} est égale à la valeur de la pression hydrostatique uniforme (étant donné que la condition d'écoulement est indépendante de cette grandeur). Cette pression additive est nulle si $S_F \neq 0$, c.-à-d. si une charge est donnée quelque part sur la surface du corps.

Il résulte donc de l'équation (64.19) que son second membre est négatif, et en conséquence

$$\int X_{ni} v_{0i}\, dS_v \geqslant \int X'_{ni} v_{0i}\, dS_v + \int (\tau_s - \tau')\, [v]\, dS_p. \quad (64.21)$$

La valeur de la discontinuité du champ réel est inconnue dans le second membre. Le deuxième terme du second membre n'est pas négatif puisque $\tau_s \geqslant |\tau'|$ et $\tau_s\, [v] > 0$. Renforçant l'inégalité (64.21), on obtient :

$$\int X_{ni} v_{0i}\, dS_v \geqslant \int X'_{ni} v_{0i}\, dS_v. \quad (64.22)$$

Le second membre de l'inégalité peut être calculé ici pour le champ σ'_{ij} choisi, les vitesses v_{0i} étant définies sur S_v.

Ainsi, *la puissance des forces de surface réelles, à des vitesses données, est supérieure à la puissance développée par les forces de surface correspondant à tout autre système de contraintes d'écoulement statiquement possible.*

Il résulte des inégalités (64.14), (64.22) une estimation bilatérale de la puissance des forces de surface réelles aux vitesses données

$$\tau_s \int H' dV - \int X_{ni} v'_i \, dS_F + \tau_s \int |[v']| \, dS'_p \geqslant$$
$$\geqslant \int X_{ni} v_{0i} \, dS_v \geqslant \int X'_{ni} v_{0i} \, dS_v. \quad (64.23)$$

Pour calculer le premier membre de l'inégalité, il faut prendre le champ de vitesses cinématiquement admissible et pour évaluer le second membre, l'état de contrainte d'écoulement statiquement possible.

La discontinuité de la composante normale de la vitesse est possible dans le cas de l'état de contrainte plan et on introduit à la place du dernier terme dans le premier membre de l'inégalité la quantité

$$\tau_s h \int v' \sqrt{1+\sin^2 \gamma'} \, dS_L,$$

où v' est la valeur du saut de la vitesse cinématiquement possible et γ' la pente de la vitesse v' vers la ligne de discontinuité.

On doit les résultats essentiels sur les principes d'extremum pour le corps rigide-plastique à A. Markov [115], R. Hill [47], W. Prager et P. Hodge [58], W. Koiter [77], S. Feinberg [132].

65. THÉORÈMES RELATIFS AU COEFFICIENT DE LA CHARGE LIMITE

Les inégalités obtenues dans le paragraphe qui précède permettent de calculer les charges limites par rapprochement successif des estimations supérieure et inférieure. Cependant, le procédé nécessaire pour s'approcher de la charge limite n'est indiqué directement par les inégalités (64.14) et (64.21) que pour les cas les plus simples (par exemple, si l'on définit sur S_v une vitesse de grandeur et de direction constantes, la connaissance de la puissance équivaut à connaître la charge sur S_v dans cette direction). Un tel cas est constaté dans le problème sur la pénétration d'un poinçon plat et lisse.

Lorsque l'on est en présence de plusieurs charges, une surface quelconque (dite « surface d'écoulement ») répond à ces dernières dans l'état limite; les inégalités trouvées permettent en principe de construire pour cette surface des estimations bilatérales. On peut obtenir des résultats simples, mais importants, dans le cas de la mise en charge proportionnelle.

1. Mise en charge proportionnelle. Envisageons le cas important des forces de surface croissant proportionnellement à un paramètre $m > 0$; il est alors aisé d'obtenir les estimations pour la charge limite.

Penchons-nous plus en détail sur les suppositions initiales. Les charges sur une partie de la surface S_F du corps croissent dans une

proportion déterminée

$$X_{ni} = mX^0_{ni} \quad \text{sur} \quad S_F, \tag{65.1}$$

où X^0_{ni} est une distribution quelconque fixée des charges sur S_F. En outre, on suppose que sur une partie de la surface S_v les vitesses soient nulles :

$$v_{0i} = 0 \quad (\text{« appuis fixes »}).$$

L'état limite du corps est obtenu pour une valeur quelconque du paramètre $m = m_*$. Nous désignerons par m_* le *coefficient de la charge limite.*

2. Estimation supérieure de la charge limite. On obtient l'estimation supérieure m_* à partir de l'inégalité (64.14) qui maintenant prend la forme (cf. remarque à la page 311)

$$\int X_{ni} v'_i \, dS_F \leqslant \tau_s \int H' \, dV + \tau_s \int |[v']| \, dS'_p,$$

les vitesses cinématiquement possibles v'_i se réduisant à zéro sur S_v. En vertu de (65.1) pour l'état limite on a :

$$m_* \leqslant \tau_s \frac{\int H' \, dV + \int |[v']| \, dS'_p}{\int X^0_{ni} v'_i \, dS_F} \equiv m_k. \tag{65.2}$$

On suppose que la puissance des forces de surface données pour les vitesses cinématiquement possibles, qui figure dans le dénominateur (65.2), soit positive. Il ne peut y avoir un signe d'égalité dans (65.2) que lorsque le champ cinématiquement admissible v'_i se confond avec celui réel v_i (sous les réserves formulées dans le paragraphe précédent).

Nous désignerons par m_k le nombre sans dimensions dans le second membre de l'inégalité et nous conviendrons de l'appeler *coefficient cinématique.* Ainsi,

$$m_* \leqslant m_k. \tag{65.3}$$

Le coefficient de la charge limite m_* ne peut être supérieur au coefficient cinématique m_k.

Il découle de (65.2) que *le coefficient cinématique m_k est obtenu en égalant la puissance des charges pour les vitesses cinématiquement possibles à la puissance correspondante de la déformation.*

R e m a r q u e. Dans le cas de l'état de contrainte plan, le deuxième terme du numérateur est à remplacer par la quantité

$$h \int v' \sqrt{1 + \sin^2 \gamma'} \, ds_L.$$

3. Estimation inférieure de la charge limite. L'estimation inférieure du coefficient de la charge limite m_* découle du deuxième principe

d'extremum. Envisageons l'état de contrainte d'écoulement statiquement possible σ'_{ij} satisfaisant sur S_F aux conditions aux limites quelque peu modifiées :

$$X'_{ni} = m_s X^0_{ni} \quad \text{sur} \quad S_F \tag{65.4}$$

(au lieu des conditions (64.16) que l'on peut écrire dans ce cas sous la forme $X_{ni} = m_* X^0_{ni}$) ; ici m_s est une valeur quelconque du paramètre m. On ne peut pas appliquer directement à ce cas l'inégalité obtenue à la fin du paragraphe précédent. A la place de l'équation (64.19), on obtient maintenant :

$$\int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \xi_{ij} \, dV = (m_s - m_*) \int X^0_{ni} v_i \, dS_F + \\ + \int (\tau_s - \tau') [v] \, dS_p. \tag{65.5}$$

Conformément à (64.20), le premier membre est en général négatif, par conséquent,

$$m_* - m_s \geqslant \frac{\int (\tau_s - \tau') [v] \, dS_p}{\int X^0_{ni} v_i \, dS_F}. \tag{65.6}$$

On n'aura le signe d'égalité que lorsque les systèmes des contraintes σ_{ij}, σ'_{ij} se distinguent seulement d'une pression uniforme. Le numérateur étant non négatif ($|\tau'| \leqslant \tau_s$, $\tau_s [v] > 0$) et le dénominateur étant positif, le *coefficient de la charge limite m_* ne peut pas être inférieur au coefficient statique m_s*:

$$m_s \leqslant m_*. \tag{65.7}$$

4. Corollaires. Envisageons quelques corollaires découlant des inégalités établies ci-dessus.

1. *Le coefficient de la charge limite m_* est unique.*

En effet, examinons, par exemple, l'inégalité (65.3) conformément à laquelle le coefficient de la charge limite m_* atteint le minimum absolu pour le champ de vitesses réel. L'hypothèse de l'existence de deux valeurs m_{*1} et m_{*2} du coefficient de la charge limite ne s'accorde avec la condition du minimum absolu de m_* que si les valeurs se confondent.

2. *Le fait d'ajouter du matériau à un corps ne peut faire baisser la charge limite.*

Illustrons cet énoncé par un exemple simple. Envisageons un tube circulaire (fig. 198, *a*) ; nous désignerons la pression limite, répondant à un champ de contraintes à symétrie axiale (paragraphe 26), par

$$p_0 = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a}.$$

Examinons maintenant le problème relatif à la recherche de la charge limite p_* pour un prisme carré long à ouverture circulaire centrale, chargée par une pression uniforme; la surface extérieure du prisme est libre de contraintes (fig. 198, *b*).

Pour le calcul de l'estimation inférieure, qui est le coefficient statiquement possible, on peut prendre l'état de contrainte discontinu comme suit: inscrivons dans le prisme le tube montré sur la figure 198, *a*; on considérera comme nulles les contraintes dans les coins hachurés. Il est évident que les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont satisfaites, la condition d'écoulement n'étant nulle part violée. Selon la démonstration

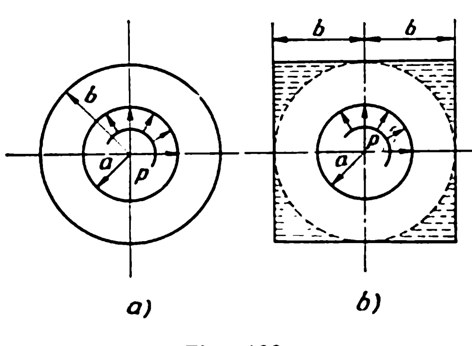


Fig. 198

$$p_* \geqslant p_0.$$

Ce résultat, certes, est évident et admet une simple généralisation. Il est clair que l'adjonction d'un matériau à la frontière libre d'un corps (que nous appelons « adjonction d'un matériau à un corps ») ne réduit pas la charge limite, car, pour un nouveau corps, on peut prendre l'état de contrainte d'écoulement statiquement possible qui est formé par les contraintes nulles dans le matériau ajouté et les contraintes de l'état limite dans le corps initial (de façon analogue à la figure 198). Mais alors la frontière inférieure de m_s pour la charge limite est conservée.

On peut démontrer de façon analogue que

3. *L'enlèvement du matériau ne peut avoir comme effet l'augmentation de la charge limite.*

4. *L'augmentation de la limite d'écoulement τ_s en certaines parties du corps ne peut réduire la charge limite* (car tout état de contrainte d'écoulement statiquement possible pour le corps initial sera également un état de contrainte d'écoulement statiquement possible pour un nouveau corps).

5. *De deux solutions cinématiquement possibles, la plus acceptable est celle qui conduit à une charge limite plus petite.*

Ce principe a été nommé précédemment (paragraphe 40) critère du choix.

6. *De deux solutions statiquement possibles, la solution préférable est celle qui conduit à une charge limite plus grande.*

5. Extension des théorèmes relatifs à la charge limite à la condition d'écoulement générale. Les théorèmes démontrés plus haut

ne se rapportaient qu'à la condition d'écoulement de von Mises. Pourtant, nous avons souligné plus d'une fois l'importance des autres conditions d'écoulement, en particulier de la condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant. Il est facile de démontrer les théorèmes de la charge limite pour la condition convexe générale de la plasticité $f(\sigma_{ij}) = K$ pour la loi associative de l'écoulement (paragraphe 16).

Le théorème relatif au coefficient cinématique $m_k \geqslant m_*$. D'après la définition de m_k pour le champ cinématiquement admissible v_i', on a:

$$m_k \int X_{ni}^0 v_i' \, dS_F = \int \sigma_{ij}^* \xi_{ij}' \, dV + \int \tau^* [v'] \, dS_p'.$$

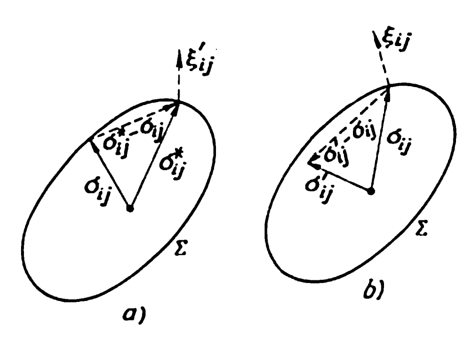


Fig. 199

Ici σ_{ij}^* est le tenseur des contraintes correspondant (d'après la loi associative) aux vitesses de déformation cinématiquement possibles ξ_{ij}', τ^* la contrainte tangentielle correspondante sur la surface de discontinuité S_p'. Les contraintes σ_{ij}^* se trouvent à la surface d'écoulement Σ, mais, en général, elles ne satisfont pas aux équations d'équilibre. D'autre part, d'après l'équation (64.11) on a:

$$m_* \int X_{ni}^0 v_i' \, dS_F = \int \sigma_{ij} \xi_{ij}' \, dV + \int \tau [v'] \, dS_p',$$

où σ_{ij}, τ sont des contraintes réelles. On trouve par soustraction:

$$(m_k - m_*) \int X_{ni}^0 v_i' \, dS_F = \int (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \xi_{ij}' \, dV + \int (\tau^* - \tau) [v'] \, dS_p'. \quad (65.8)$$

La surface d'écoulement étant convexe (fig. 199, *a*), on a alors $(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \xi_{ij}' \geqslant 0$; ceci est vrai également aux points singuliers de la surface. Ensuite, comme nous l'avons déjà noté, la surface de discontinuité est une surface de glissement; la contrainte tangentielle τ^* est associée au champ ξ_{ij}' et atteint sa valeur maximale sur S_p', c'est pourquoi $(\tau^* - \tau) [v'] \geqslant 0$. Ainsi, le second membre de (65.8) est non négatif. Par suite de la positivité de la puissance des charges données, on en vient à l'assertion recherchée.

Arrêtons-nous en particulier sur la *condition d'écoulement de Tresca — Saint-Venant* qui est couramment utilisée. Le coefficient m_k cinématiquement possible est déterminé ici en égalant les puissan-

ces de la charge donnée et de la déformation plastique:

$$m_k \int X^0_{ni} v'_i \, dS_F = 2\tau_s \int \xi'_{max} \, dV, \qquad (65.9)$$

où ξ_{max} est la valeur absolue de la vitesse de déformation principale dont la valeur numérique est maximale (cf. paragraphe 16). Si le champ de la vitesse cinématiquement possible v'_i est discontinu, on devra alors inclure dans le second membre de l'équation (65.9) la puissance de la déformation plastique, dissipée sur les discontinuités.

Le *théorème du coefficient statique* $m_s \leqslant m_*$ découle aisément de l'équation (65.5) transformée de manière évidente:

$$(m_s - m_*) \int X^0_{ni} v_i \, dS_F = \int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \, \xi_{ij} \, dV + \\ + \int (\tau' - \tau) \, [v] \, dS_p, \qquad (65.10)$$

où σ_{ij}, τ sont des contraintes réelles et σ'_{ij}, τ' des contraintes statiquement possibles se trouvant à l'intérieur ou à la surface d'écoulement. Celle-ci étant convexe (fig. 199, *b*), on a alors $(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \, \xi_{ij} \leqslant 0$, ceci étant vérifié également aux points singuliers de Σ. Etant donné que v_i est une vitesse réelle, on a alors, tout comme dans le cas précédent, $(\tau - \tau') \, [v] \geqslant 0$. Le deuxième membre de (65.10) étant négatif, il en découle immédiatement la seconde assertion.

6. Charge limite dans les problèmes de contact. Il est parfois indispensable de trouver la charge limite pour un système de corps en contact. Dans les cas où les conditions qui se réalisent sur la surface de contact sont très simples (par exemple, pour le cas de la contrainte tangentielle constante), on se contentera des théorèmes démontrés précédemment. Plusieurs problèmes de ce type seront envisagés dans le paragraphe suivant.

Si un frottement de Coulomb s'exerce sur les surfaces de contact, on pourra démontrer aisément [144] que la charge limite recherchée ne dépasse pas la charge limite pour le même système de corps *lorsque les surfaces de contact sont soudées* et n'est pas inférieure à la charge limite pour le même système de corps *lorsque les surfaces de contact sont parfaitement lisses.*

7. Considérations finales. Les propriétés d'extremum de la charge limite et leurs applications éventuelles pour les méthodes de solution approchées de la charge limite ont été proposées pour la première fois (en termes de mécanique des constructions) par A. Gvozdev en 1936; le théorème de la frontière inférieure (pour les poutres continues) fut formulé déjà en 1914 par Kazintchy. La démonstration rigoureuse du théorème de la frontière inférieure est due à S. Feinberg. Parmi les travaux ultérieurs consacrés aux théorèmes de la rupture plastique, nous citerons les études de Drucker, Greenberg, Prager (cf. [77,79]), et de Hill [47,157].

66. EXEMPLES D'APPLICATION DE LA MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE POUR LA RECHERCHE DE LA CHARGE LIMITE

1. Généralités. Comme nous l'avons déjà noté, la méthode énergétique permet de trouver la solution efficace des problèmes relatifs à la portance. Cette méthode est couramment appliquée dans différents domaines de la théorie de l'équilibre limite: mécanique des systèmes triangulaires, problèmes de l'équilibre limite des plaques et enveloppes, etc. A l'aide de calculs relativement simples, on arrive souvent à construire des frontières supérieure et inférieure confondues et à obtenir de la sorte la valeur exacte de la charge limite. Le problème de l'extension d'une bande à ouverture circulaire, traité dans le paragraphe 40, est l'un des exemples simples de ce genre. Plusieurs autres problèmes seront exposés ci-après.

En général, on établit très simplement des estimations grossières inférieure et supérieure moyennant les théorèmes énergétiques. Il est bien plus difficile d'obtenir de bonnes estimations. Il est encore plus difficile d'indiquer les méthodes à employer pour opérer le rapprochement successif des estimations supérieure et inférieure. L'application des méthodes de programmation mathématique serait encourageante, mais elle nécessite l'intervention de calculatrices électroniques modernes (ordinateurs) et l'élaboration d'algorithmes appropriés [182].

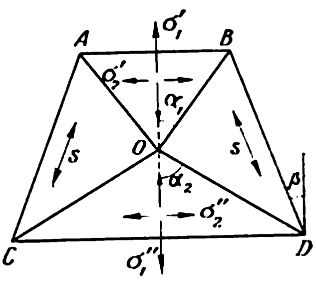


Fig. 200

2. Trapèze des contraintes discontinues pour la déformation plane. Pour construire des états de contrainte d'écoulement statiquement possibles, il est commode d'employer les champs discontinus, composés de domaines de l'état de contrainte homogène. Un champ simple (¹) d'un tel type est montré sur la figure 200. Les frontières AC, BD y sont libres de contraintes, sur la face AB agit une contrainte homogène normale σ_1' et sur la face CD agit une contrainte homogène normale σ_1''. Un état de contrainte homogène se réalise dans chaque triangle. Désignons par σ_1', σ_2' les contraintes principales dans $\triangle AOB$ et par σ_1'', σ_2'', celles dans $\triangle$ COD, et dans les triangles AOC et BOD a lieu une traction uniaxiale s parallèle à la face AC ou BD respectivement. Les rayons OA, OB, OC, OD sont les lignes de discontinuité des contraintes, le long desquelles (cf. paragraphe 39) la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ_n sont continues. Ecrivant ces conditions de continuité le long de OB à l'aide des for-

(¹) Les conditions d'intersection des lignes de discontinuité des contraintes ont été étudiées dans les ouvrages [78,98,147].

mules (35.1) (en dirigeant l'axe des x suivant l'axe de σ_1' dans $\triangle AOB$ et dans la direction de s dans $\triangle$ BOD), on obtient:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1' \sin^2 \alpha_1 + \sigma_2' \cos^2 \alpha_1 = s \sin^2 (\beta + \alpha_1),\\ \tau_n &= (\sigma_1' - \sigma_2') \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = s \sin (\beta + \alpha_1) \cos (\beta + \alpha_1).\end{aligned}\right\}$$

D'où l'on trouve:

$$\sigma_1' = s \frac{\sin (\beta + \alpha_1) \cos \beta}{\sin \alpha_1}, \quad \sigma_2' = s \frac{\sin (\beta + \alpha_1) \sin \beta}{\cos \alpha_1}. \tag{66.1}$$

Ecrivons ensuite les conditions de continuité de σ_n, τ_n sur la ligne de discontinuité OD:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1'' \sin^2 \alpha_2 + \sigma_2'' \cos^2 \alpha_2 &= s \sin^2 (\alpha_2 - \beta),\\ (\sigma_1'' - \sigma_2'') \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 &= s \sin (\alpha_2 - \beta) \cos (\alpha_2 - \beta),\end{aligned}\right\}$$

d'où

$$\sigma_1'' = s \frac{\sin (\alpha_2 - \beta) \cos \beta}{\sin \alpha_2}, \quad \sigma_2'' = s \frac{\sin (\alpha_2 - \beta) \sin \beta}{\cos \alpha_2}. \tag{66.2}$$

Dans les triangles considérés, les états de contrainte ne doivent pas perturber la condition d'écoulement de von Mises. Soit s une contrainte de traction, on peut alors considérer conformément aux formules (66.1), (66.2) que $\sigma_1' \geqslant \sigma_2' \geqslant 0$, $\sigma_1'' \geqslant \sigma_2'' \geqslant 0$; σ_1'' devant être une contrainte de traction, on a alors $\alpha_2 > \beta$.

Dans le cas de la déformation plane, les conditions d'écoulement seront respectées si

$$\text{dans } \triangle\ AOB \quad \sigma_1' - \sigma_2' \leqslant 2k, \tag{66.3}$$

$$\text{dans } \triangle\ BOD \quad s \leqslant 2k, \tag{66.4}$$

$$\text{dans } \triangle\ COD \quad \sigma_1'' - \sigma_2'' \leqslant 2k, \tag{66.5}$$

où k est la limite d'écoulement en cisaillement (paragraphe 31).

Les contraintes σ_1', σ_1'' sont proportionnelles à s; du fait qu'on construit des champs statiquement admissibles menant à la frontière inférieure, il est rationnel de prendre la valeur maximale de $s = 2k$. Portant maintenant les composantes de la contrainte (66.1), (66.2) dans les inégalités (66.3) et (66.5), et procédant à des transformations élémentaires, on trouve que

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 \geqslant \operatorname{cotg} \beta \quad \text{dans } \triangle\ AOB,$$

$$\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha_2} \geqslant 0 \quad \text{dans } \triangle\ COD.$$

La seconde condition est évidemment remplie. Quant à la première condition, il en vient que

$$\alpha_1 \geqslant \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}. \tag{66.6}$$

Il est rationnel de choisir l'angle α_1 de manière que la contrainte σ_1' soit maximale. On peut récrire la formule (66.1) pour σ_1' sous la forme

$$\sigma_1' = s\cos^2\beta\,(1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\alpha_1). \tag{66.7}$$

Il est clair qu'il faut choisir la valeur minimale de α_1, c.-à-d.

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}. \tag{66.8}$$

3. Frontières de la charge limite pour une bande à rainures circulaires soumise à la traction. Le problème de la traction (dans les conditions de la déformation plane) d'une bande, affaiblie par des rainures circulaires (fig. 107), a été examiné dans le paragraphe 41, où l'on avait trouvé la frontière supérieure (« cinématique ») de la force de traction

$$P_k = 4kh\left(1 + \frac{a}{h}\right)\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right).$$

Arrêtons-nous sur le cas particulier où $h = a$ pour une bande de largeur égale à $4a$ (fig. 201). On a alors:

$$P_k = 5{,}55\ ak.$$

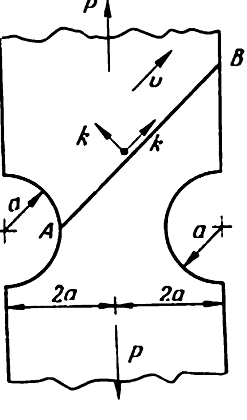


Fig. 201

Bien entendu, il n'est nullement nécessaire de construire un champ de glissement et un champ de vitesses raccordé à celui-ci pour calculer la frontière supérieure de la charge. Il suffit de choisir pour cela n'importe quel champ de vitesses cinématiquement admissible. Par exemple, dans le problème envisagé, on peut définir le champ discontinu qui est montré sur la figure 201. La partie inférieure de la bande est fixe, la partie supérieure glisse le long de la ligne de discontinuité AB comme un solide. La ligne AB suit la ligne de glissement, elle est donc inclinée sous un angle de $\pi/4$ par rapport à l'effort de traction. Le long de AB, la contrainte tangentielle est égale à la limite d'écoulement k; il découle des conditions d'équilibre que la contrainte normale a la même valeur. On tracera la ligne AB de sorte qu'elle ait une longueur minimale. Comme on le verra aisément, la frontière correspondante P_k' sera un peu moins bonne que P_k, à savoir:

$$P_k' = 6\ ak.$$

On peut facilement obtenir une approximation grossière de la frontière inférieure en inscrivant dans la bande un ruban lisse de largeur $2a$ soumis à une contrainte uniaxiale de $2k$, alors $P_s^0 = 4ak$.

Comme cela a été démontré par W. Prager, une meilleure estimation peut être trouvée en inscrivant dans la bande les trapèzes examinés dans la division précédente. On choisira alors l'angle β (fig. 202) de sorte que l'effort de traction soit maximal. Dans les zones hachurées, les contraintes sont nulles et dans les domaines situés au-dessus de la ligne CD il y a une traction uniaxiale σ_1''. On voit clairement sur le dessin que le segment $l = a\left(2 - \frac{1}{\cos\beta}\right)$, $\beta < \frac{\pi}{3}$. L'effort de traction correspondant est égal à

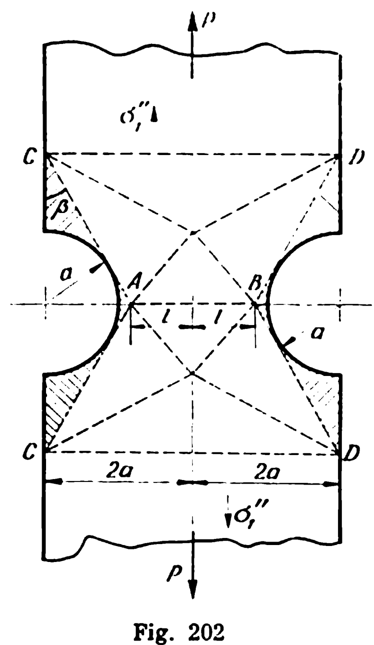


Fig. 202

$$P_s = 2l\sigma_1' =$$

$$= 4ak\,(2\cos\beta - 1)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}. \tag{66.9}$$

Pour trouver le maximum de P^s, égalons à zéro la dérivée par rapport à β et l'on obtient que $\beta = 26°14'$. On a alors

$$P_s = 5{,}12\ ak.$$

Pour la charge limite, on peut prendre, à $\pm 4\%$ près, la valeur moyenne de $P_* = 5{,}33\ ak$.

4. Trapèze des contraintes discontinues pour l'état de contrainte plan. Dans le cas de l'état de contrainte plan, les formules (66.1) et (66.2) restent valables, mais les conditions d'écoulement seront différentes. Notamment, selon le critère de von Mises (paragraphe 52), on a:

$$\sigma_1'^2 - \sigma_1'\sigma_2' + \sigma_2'^2 \leqslant \sigma_s^2 \quad \text{dans} \quad \triangle\ AOB, \tag{66.10}$$

$$s \leqslant \sigma_s \quad \text{dans} \quad \triangle\ BOD, \tag{66.11}$$

$$\sigma_1''^2 - \sigma_1''\sigma_2'' + \sigma_2''^2 \leqslant \sigma_s^2 \quad \text{dans} \quad \triangle\ COD. \tag{66.12}$$

Portant les contraintes d'après les formules (66.1), (66.2) dans les inégalités (66.10), (66.12), on obtient:

$$\sin^2(\beta+\alpha_1)\left[\frac{\cos 2\beta}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha_1}\right] \leqslant \left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^2, \tag{66.13}$$

$$\sin^2(\alpha_2-\beta)\left[\frac{\cos 2\beta}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha_2}\right] \leqslant \left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^2. \tag{66.14}$$

La valeur maximale de σ_1' tolérée par la condition d'écoulement de von Mises correspond au point $\omega = \pi/6$ sur l'ellipse (fig. 157); avec cela

$$\sigma_1' = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s, \qquad \sigma_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s.$$

Portant ici les contraintes suivant les formules (66.1), on trouve aisément:

$$\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\alpha_1 = 2\,; \quad \frac{\sin(\beta+\alpha_1)\cos\beta}{\sin\alpha_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_s}{s},$$

d'où il découle que

$$\cos^2\beta = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_s}{s}\right).$$

En appliquant l'inégalité (66.11) on trouve:

$$\cos^2\beta \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ c.-à-d. } \beta \geqslant 23°.$$

Pour $\beta = 23°$, l'inégalité (66.14) sera satisfaite lorsque $\alpha_2 \leqslant 61°15'$; si le signe de l'égalité y est réalisé, on aura $\alpha_1 = 49°40'$.

5. Frontière inférieure de la charge limite pour une bande à entailles angulaires soumise à une traction. Envisageons le problème d'une bande à entailles angulaires (fig. 175) soumise à une traction dans les conditions de l'état de contrainte plan. La frontière supérieure de la charge limite a été trouvée au paragraphe 56. Calculons maintenant la frontière inférieure en appliquant les trapèzes des contraintes discontinues. Pour cela on inscrira dans la bande deux trapèzes (en pointillé sur la figure 203); au-dessus et au-dessous de ces trapèzes, des champs de traction uniaxiale uniforme σ_1'' leur sont contigus. Lorsque $\delta \leqslant \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant 67°$, les trapèzes se trouvent à l'intérieur de la bande. La charge P_s est alors constante et égale à

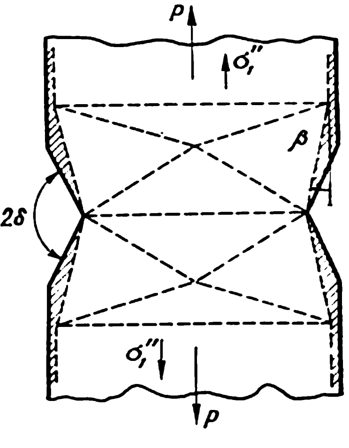


Fig. 203

$$P_s = \frac{4}{\sqrt{3}} h\sigma_s. \tag{66.15}$$

Pour les angles $0 \leqslant \delta \leqslant 67°$, cette valeur coïncide avec la frontière supérieure (56.8) qui a été trouvée par R. Hill pour $\delta < 70°32'$.

Par conséquent, la formule (66.15) donne la valeur exacte de la charge limite dans l'intervalle $0 \leqslant \delta \leqslant 67°$.

Pour les angles $\delta \geqslant 67°$, on suppose que les côtés des trapèzes coïncident avec les côtés des entailles. On a alors $\beta = \frac{\pi}{2} - \delta$ et $s = \sigma_s$ dans les formules (66.1) et (66.2). On devra choisir la valeur de l'angle α_1 qui correspond à l'inégalité (66.13) et qui rend la contrainte σ_1' si grande que possible. Les résultats des calculs sont récapitulés dans le tableau ci-après:

δ	70°	75°	80°	85°	90°
P_s/P_*^0	1,152	1,132	1,103	1,058	1,00

La charge limite pour une bande lisse de largeur $2h$ est désignée par $P_*^0 = 2h\,\sigma_s$. Les frontières supérieure et inférieure pour le facteur d'amplification P_*/P_*^0 sont représentées sur la figure 204.

Des constructions analogues peuvent être réalisées pour une bande à rainures circulaires en traction (fig. 173), pour des bandes affaiblies par des entailles dans le cas de la flexion (fig. 176) et dans d'autres problèmes.

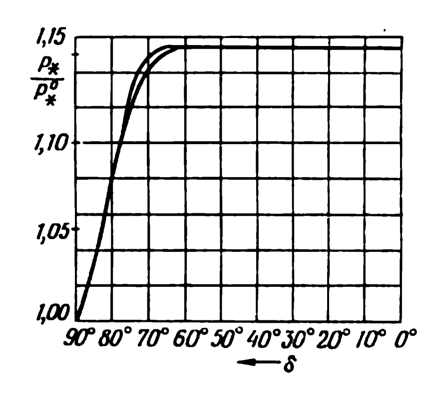


Fig. 204

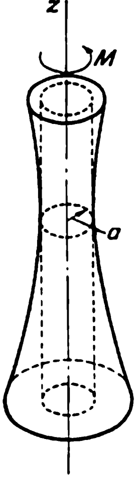


Fig. 205

7. Torsion d'une barre ronde de diamètre variable. Examinons le problème de la valeur limite du moment de torsion d'une barre ronde de diamètre variable (fig. 205). Traçons un système de coordonnées cylindriques r, φ, z en dirigeant l'axe des z suivant l'axe de la barre. Comme pour la torsion élastique, on peut considérer que les sections transversales de la barre restent planes, bien qu'il y ait un gauchissement des rayons. Donc, les composantes de la vitesse sont :

$$v_r = v_z = 0; \quad v_\varphi = v_\varphi(r, z) \equiv v.$$

Cela étant, les composantes de la vitesse de déformation sont égales à

$$\xi_r = \xi_\varphi = \xi_z = \eta_{rz} = 0,$$
$$\eta_{r\varphi} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right), \quad \eta_{\varphi z} = r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right).$$

Des relations de Saint-Venant — von Mises (13.11) il résulte que

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \eta_{r\varphi} = 2\lambda'\tau_{r\varphi}, \quad \eta_{\varphi z} = 2\lambda'\tau_{\varphi z}. \quad (66.16)$$

Les composantes non nulles de la contrainte $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$ satisfont à l'équation différentielle d'équilibre

$$\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0 \qquad (66.17)$$

et à la condition d'écoulement

$$\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 = k^2. \qquad (66.18)$$

Le champ de contraintes correspondant dans le domaine plastique a été étudié par V. Sokolovski [33]. La condition d'écoulement sera satisfaite si l'on pose

$$\tau_{r\varphi} = k \sin\theta, \quad \tau_{\varphi z} = k\cos\theta,$$

où θ est l'angle d'inclinaison inconnu du vecteur de la contrainte tangentielle par rapport à l'axe des z. Eliminant le facteur λ' entre les relations de Saint-Venant — von Mises citées plus haut, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{r}\right)\sin\theta = 0. \qquad (66.19)$$

Les caractéristiques de cette équation coïncident avec les lignes de glissement. L'équation différentielle (66.19) a la solution évidente

$$v = Cr, \qquad (66.20)$$

où C est une constante arbitraire. Cette solution correspond à la rotation d'un arbre ou d'une partie de celui-ci en tant qu'un entier rigide.

Introduisons le plan de discontinuité de la vitesse $z = \text{const}$. La solution (66.20) est vraie au-dessus et au-dessous de ce plan pour différentes valeurs de la constante arbitraire. Sur le plan de discontinuité, on a $\eta_{r\varphi} \to 0$, $\eta_{\varphi z} \to \infty$.

Alors, des relations (66.16) il résulte que

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = \text{const} = k. \qquad (66.21)$$

A cette solution correspond le moment de torsion

$$M = 2\pi \int_0^a kr^2\, dr = \frac{2}{3} \pi a^3 k, \tag{66.22}$$

où a est le rayon de la section envisagée.

La solution obtenue correspond au champ cinématiquement admissible de la vitesse (« cisaillement » dans le plan $z = \text{const}$), M est donc la frontière supérieure de la charge limite. On considère naturellement que a est le rayon de la section transversale minimale de l'arbre.

D'autre part, on peut construire facilement un champ de contraintes statiquement admissible qui ne perturbe pas la condition d'écoulement. A cet effet, il suffit d'inscrire dans l'arbre envisagé une barre

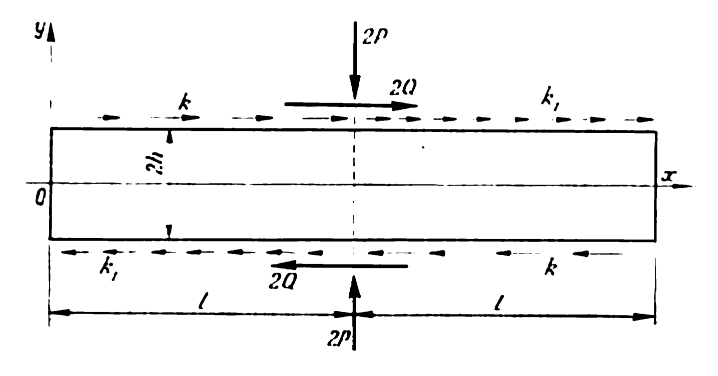


Fig. 206

ronde (montrée en pointillé sur la figure 205) de rayon a constant avec le champ limite (66.21). On considère que les contraintes sont nulles lorsque $r > a$. D'après le théorème statique sur la charge limite, M sera donc également la frontière inférieure. Par conséquent, on a trouvé la solution complète et M est la valeur exacte du moment limite pour un arbre de diamètre variable en torsion.

8. Cisaillement et compression d'une couche mince. Le problème plan de Prandtl relatif à la compression d'une couche plastique mince entre deux plaques rugueuses rigides a été exposé dans le chapitre V (paragraphe 47). La présence de l'effort $2Q$ déplaçant les plaques influe notablement sur l'écoulement de la couche (fig. 206). Ci-après, nous présenterons la solution statiquement possible de ce problème. En l'absence de cisaillement, les frontières supérieure et inférieure de l'effort comprimant ont été obtenues par R. Shield pour une couche plastique mince.

S'il n'y a pas de cisaillement ($Q = 0$), sur les plans de contact $y = \pm h$ se développent des contraintes tangentielles maximales $\tau_{xy} = \pm k$, où k est la limite d'écoulement au cisaillement. Lorsqu'il y a un effort de cisaillement $2Q$ sur les segments $y = h$, $x < l$ et $y = -h$, $x > l$, la valeur des contraintes tangentielles est toujours égale à k. Dans les parties restantes, les contraintes tangentielles se « déchargent » et leur valeur devient inférieure à k; supposons qu'elles soient égales à k_1, $|k_1| \leqslant k$ respectivement. Il est facile de construire les solutions suivantes des équations d'équilibre (31.9) et de la condition d'écoulement (31.8), satisfaisant aux conditions aux limites données pour τ_{xy} sur les lignes $y = \pm h$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\tau_{xy}}{k} = \frac{1+\varkappa}{2} + \frac{1-\varkappa}{2}\frac{y}{h}, \quad \frac{\sigma_y}{k} = -C - \frac{1-\varkappa}{2}\frac{x}{h}, \\ &\frac{\sigma_x}{k} = \frac{\sigma_y}{k} + 2\sqrt{1-\left(\frac{\tau_{xy}}{k}\right)^2}, \quad x < l, \end{aligned}\right\} \qquad (66.23)$$

où $\varkappa = \frac{k_1}{k}$, $|\varkappa| \leqslant 1$ et C est une constante arbitraire. Pour $\varkappa = -1$, les formules connues de Prandtl (47.1) découlent de (66.23); le cas $\varkappa = 1$ correspond au problème du cisaillement pur de la couche ($\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = k$).

Il convient de définir les constantes C et $\varkappa$ d'après les conditions de l'équivalence statique. On satisfera avant tout, au sens de Saint-Venant, à la condition d'absence des contraintes normales sur le bout de la couche, à savoir:

$$\int_{-h}^{h} (\sigma_x)_{x=0}\, dy = 0.$$

D'où l'on trouve:

$$C = \frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{\pi}{2} - \varkappa\sqrt{1-\varkappa^2} - \arcsin\varkappa\right).$$

Ensuite, la condition d'équivalence des contraintes normales σ_y à l'effort de compression $2P$ donne:

$$C = p - \frac{1-\varkappa}{4}\frac{l}{h} \quad \left(p \equiv \frac{P}{kl}\right).$$

Finalement, de la condition d'équivalence des contraintes tangentielles de contact à l'effort de cisaillement on obtient:

$$1 + \varkappa = 2q \quad \left(q \equiv \frac{Q}{kl} \leqslant 1\right).$$

Eliminant C, $\varkappa$ entre ces relations, on trouve la condition de l'équilibre limite:

$$(1-q)\left[2p-(1-q)\frac{l}{h}\right]=$$
$$=\frac{\pi}{2}+2(1-2q)\sqrt{q(1-q)}-\arcsin(2q-1). \quad (66.24)$$

Pour $q=0$, il en découle la formule de Prandtl (47.3). On verra sans peine également que $\frac{dp}{dq}\to-\infty$ pour $q\to 1$.

Les courbes limites pour les valeurs $\frac{l}{h}=10$ et $\frac{l}{h}=20$ sont montrées sur la figure 207. Il est évident que l'adjonction d'une force de cisaillement à la charge comprimante a pour effet de réduire sensiblement la portance de la couche. On peut montrer que la solution trouvée donne la frontière inférieure pour l'effort de compression, c.-à-d. $P > P'$ (pour Q fixé).

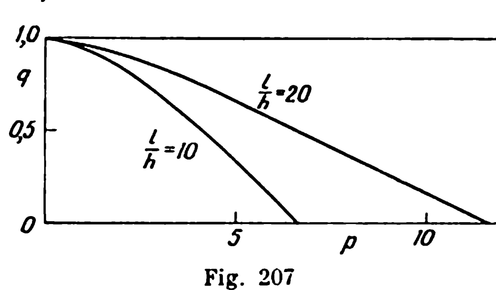


Fig. 207

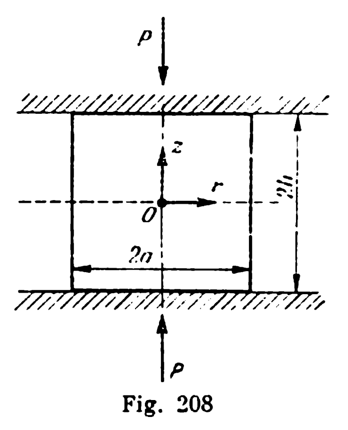


Fig. 208

9. Compression d'un cylindre entre deux plaques rugueuses. Envisageons la compression d'un cylindre circulaire (de hauteur $2h$ et de diamètre $2a$) entre deux plaques rugueuses parallèles (fig. 208). Les contraintes tangentielles τ_{rz} atteignent la limite d'écoulement $\tau_s=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ sur les plans de contact. Introduisons les coordonnées sans dimensions $\rho=r/a$, $\zeta=z/a$, $\varkappa=h/a$.

La frontière supérieure. Admettons que la vitesse radiale cinématiquement possible u' est égale à

$$u'=A\rho\left(1-\beta\frac{\zeta^2}{\varkappa^2}\right),$$

où A est une constante et $0\leqslant\beta\leqslant 1$ un paramètre caractérisant le degré du « flambage latéral ». Ce phénomène n'a pas lieu si $\beta=0$. On tire de l'équation d'incompressibilité (58.6) la composante axiale de la vitesse w':

$$w'=-2A\left(\zeta-\frac{\beta\zeta^3}{3\varkappa^2}\right).$$

Soit c la vitesse de déplacement de la plaque, on a alors $u' = -c$ pour $\zeta = \varkappa$, d'où l'on définit $A = 3c/2\varkappa\,(3-\beta)$.

Conformément à (64.14), on trouve la frontière supérieure de l'effort de compression à partir de la relation

$$P_* c \leqslant 2\pi\tau_s \int_0^{\varkappa}\int_0^1 H'\rho\, d\rho\, d\zeta + 2\pi\tau_s \int_0^1 (u')_{\zeta=\varkappa}\rho\, d\rho. \qquad (66.25)$$

L'intensité des vitesses de déformation du cisaillement H' est calculée selon le champ de vitesses choisi ; pour des raisons de symétrie, on a examiné la moitié du cylindre $\zeta \geqslant 0$. Procédant aux calculs, on obtient :

$$\frac{p_*}{\sigma_s} \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa}\,\frac{1-\beta}{3-\beta} +$$

$$+ \frac{2}{3-\beta}\int_0^1 \frac{(1-\beta\rho^2) + \frac{1}{3}\frac{\beta^2\rho^2}{\varkappa^2}}{\left[(1-\beta\rho^2)^2 + \frac{1}{3}\frac{\beta^2\rho^2}{\varkappa^2}\right]^{1/2} + (1-\beta\rho^2)}\, d\rho \equiv \frac{p'}{\sigma_s}.$$

On a introduit ici la pression moyenne $p_* = P_*/\pi a^2$. Le paramètre β est choisi de façon que p' soit minimale pour $\varkappa$ donné. Les résultats des calculs [167] effectués pour les cylindres de hauteur différente sont représentés sur la figure 209. La ligne en pointillé correspond à une solution élémentaire lorsque $\beta = 0$, pour laquelle

$$\frac{p'}{\sigma_s} = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}\varkappa}.$$

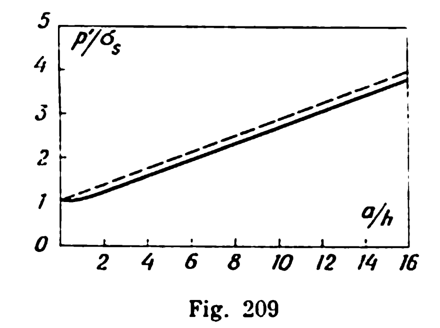


Fig. 209

La *frontière inférieure* est bien plus difficile à construire, étant donné que, dans le problème en question, l'état de contrainte d'écoulement statiquement possible doit satisfaire à un système compliqué d'équations et de conditions aux limites. Dans l'ouvrage de Kobajashi et Thomsen [167] cité plus haut, on donne la construction du champ de contraintes discontinu.

10. Flexion des plaques. La méthode énergétique est fort commode lorsqu'il s'agit de rechercher la frontière supérieure pour la charge limite de plaques fléchies de forme variée. Il faut alors définir la forme cinématiquement possible de la vitesse de fléchissement de la plaque.

A titre d'illustration, examinons tout d'abord les *plaques à symétrie axiale* (cf. paragraphe 62). Conformément à la relation (65.2), le coefficient cinématiquement possible de la charge limite est représenté dans ce cas par la formule

$$m_k = \tau_s \int_a^b \int_{-h}^{h} H' r\, dr\, dz \Big/ \int_a^b p(r)\, w' r\, dr,$$

où w' est la vitesse cinématiquement possible du fléchissement. Utilisant les formules (62.2) et la condition d'incompressibilité, on trouve sans peine que l'intensité des vitesses virtuelles de déformations du cisaillement est égale à

$$H' = 2|z| \left[\left(\frac{d^2 w'}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dw'}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{dw'}{dr} \frac{d^2 w'}{dr^2} \right]^{1/2} \equiv 2|z| W.$$

Intégrant suivant z, on trouve:

$$m_k = \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \int_a^b W r\, dr \Big/ \int_a^b p(r)\, w' r\, dr \quad (M_s = \sigma_s h^2). \qquad (66.26)$$

Exemple. Une plaque continue ($a = 0$), aux extrémités posées sur des appuis $r = b$, fléchit sous l'effet d'une charge uniforme $p =$ const. On a $w' = 0$ pour $r = b$; supposant que la surface de la flèche soit unie, on a $\frac{dw'}{dr} = 0$ pour $r = 0$. A ces conditions satisfait par exemple la fonction $w' = b^2 - r^2$; de (66.26) on obtient alors $m_k = \frac{8M_s}{pb^2}$, par conséquent, $p_* < \frac{8M_s}{b^2}$ (rappelons que la solution exacte donne $p_* \approx 6{,}5 \frac{M_s}{b^2}$).

Si l'on désigne par w' la forme de la flèche d'une plaque élastique analogue pour $\nu = 1/2$

$$w' = w'_0 \left[1 - \frac{14}{11} \left(\frac{r}{b} \right)^2 + \frac{3}{11} \left(\frac{r}{b} \right)^4 \right],$$

où w'_0 est un facteur arbitraire, on peut sensiblement améliorer l'estimation

$$p_* < 6{,}7 \frac{M_s}{b^2}.$$

Revenant au cas général, notons qu'il est facile de trouver [25] la frontière supérieure de la charge limite pour des *plaques polygonales appuyées suivant le périmètre et fléchies par une force concentrée* P (fig. 210). On peut admettre que dans l'état limite la surface moyenne d'une telle plaque a la forme d'une surface pyramidale de sommet

en O où est appliquée la force. Des articulations d'écoulement se développent le long des arêtes, tandis que les domaines triangulaires de la plaque entre ces arêtes restent rigides. Désignons par w_0' la vitesse de fléchissement sous l'effet de la force, par ω_i' la vitesse respective de variation du dièdre le long de la i-ème droite d'articulation et par l_i la longueur de cette dernière. Conformément à (65.2), la charge cinématiquement possible P_k est définie à partir de l'équation de la puissance

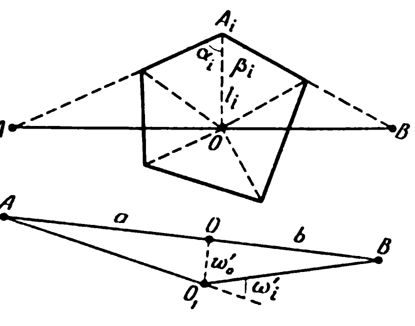


Fig. 210

$$P_k w_0' = M_s \sum_i \omega_i' l_i.$$

La charge limite $P_* \leqslant P_k$.

Calculons la vitesse angulaire ω_i'; à cet effet, traçons un plan perpendiculaire à la ligne A_iO. Dans l'unité de temps, le fléchissement du point O augmente d'une petite valeur $w_0' \cdot 1$ et l'angle de la ligne brisée AO_1B s'accroît d'un petit angle $\omega_i' \cdot 1$. On voit clairement sur le dessin présenté que

$$\omega_i' \approx w_0' \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{w_0'}{l_i} (\operatorname{cotg} \alpha_i + \operatorname{cotg} \beta_i),$$

où α_i, β_i sont les angles formés par la i-ème ligne d'articulation avec les côtés voisins de la plaque. Ainsi,

$$P_k = M_s \sum_i (\operatorname{cotg} \alpha_i + \operatorname{cotg} \beta_i). \tag{66.27}$$

Pour une plaque polygonale régulière, chargée au centre, on obtient à partir de (66.27):

$$P_k = 2nM_s \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

où n est le nombre de côtés du polygone. Par exemple, on a $P_k = 8M_s$ pour une plaque carrée ($n = 4$).

67. PRINCIPES DU MINIMUM DANS LA THÉORIE DES DÉFORMATIONS PLASTIQUES

Les méthodes énergétiques, fondées sur l'application du principe du minimum de l'énergie potentielle et du principe de Castigliano, ont une grande importance dans la théorie de l'élasticité. Dans le présent paragraphe, on établit des théorèmes analogues pour la théorie des déformations plastiques.

1. Travail des forces extérieures (généralisation du théorème de Clapeyron). Soit V le volume occupé par un corps déformé, limité

par la surface S sur un élément S_F de laquelle sont définies les forces de surface $\boldsymbol{F}_n$ avec les composantes X_{ni}; des déplacements sont donnés sur un autre élément S_u de la surface. A l'état d'équilibre du corps répondent les déplacements u_i. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que les forces de volume soient absentes.

Les composantes de la contrainte σ_{ij} satisfont aux équations différentielles d'équilibre (64.2) et aux conditions aux limites sur S_F (64.3).

De façon analogue à la relation (64.6), l'équation

$$\int X_{ni} u_i \, dS = \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV, \tag{67.1}$$

est vraie, les champs des contraintes σ_{ij} et des déplacements u_i pouvant en général ne pas être liés entre eux.

La démonstration se fera tout comme pour la formule (64.6).

Admettons que les contraintes et les déformations suivent les équations de la théorie des déformations (paragraphe 14), c.-à-d.

$$\varepsilon_{ij} = \psi (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) + k \sigma \delta_{ij}, \tag{67.2}$$

ou inversement

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\psi} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3k} \varepsilon \delta_{ij}. \tag{67.3}$$

On s'aperçoit sans peine que

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2 (U + \psi T^2). \tag{67.4}$$

Etant donné que $\varepsilon = 3k\sigma$, l'énergie élastique de la compression volumique est alors égale à

$$U = \frac{3}{2} k \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \tag{67.5}$$

En vertu de la relation $\Gamma = 2\psi T$ on a $\psi T^2 = \frac{1}{2} T\Gamma$, par conséquent,

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma \varepsilon + T\Gamma, \tag{67.6}$$

et le travail des forces extérieures le long de leurs déplacements correspondants est égal à

$$\bar{A} \equiv \int X_{ni} u_i \, dS = \int (\sigma \varepsilon + T\Gamma) \, dV. \tag{67.7}$$

Il est évident que $\sigma\varepsilon$ représente le double de l'énergie élastique de la compression volumique (fig. 211, *a*).

Considérons la courbe $T = g(\Gamma)\,\Gamma$ (fig. 211, *b*); le travail du changement de forme

$$A_f = \int T \, d\Gamma$$

est représenté par l'aire hachurée. Ensuite, $dA_f = Td\Gamma$; soit Γ le travail du changement de forme qui est une fonction homogène de puissance m; on a alors $T\Gamma = mA_f$ et

$$\bar{A} = \int (2U + mA_f)\, dV.$$

Théorème de Clapeyron. Envisageons le milieu élastique de Hooke; pour ce milieu $A_f = \frac{G}{2}\Gamma^2$, $m = 2$, par conséquent,

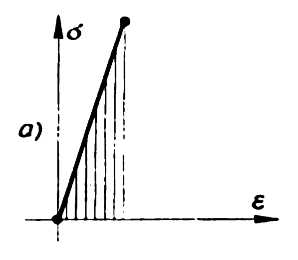
$$\bar{A} = 2\int \Pi\, dV,$$

autrement dit, *le travail des forces extérieures le long de leurs déplacements correspondants est égal au double de l'énergie élastique du corps.* Ce théorème est utile dans les calculs du potentiel élastique.

Lorsque *les déformations plastiques sont évoluées*, on peut négliger les déformations élastiques. On a alors pour l'état d'écoulement $T = \tau_s$ et

$$\bar{A} = \tau_s \int \Gamma\, dV,$$

c.-à-d. *le travail des forces extérieures le long de leurs déplacements correspondants est égal au travail du changement de forme plastique.*



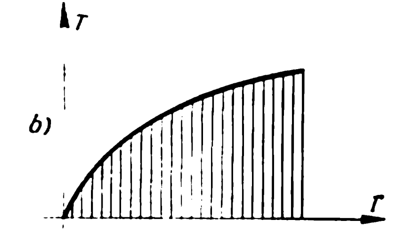


Fig. 211

2. Principe du minimum de l'énergie totale. Examinons les propriétés de minimum de la distribution réelle des déplacements.

Faisons subir à des points du corps, se trouvant en équilibre sous l'effet des forces et déplacements donnés, des déplacements infiniment petits et continus δu_i, compatibles avec les conditions aux limites (*déplacements cinématiquement possibles*); on suppose alors qu'il n'y a pas de décharge (plus précisément, on envisagera le principe du minimum pour le milieu élastique non linéaire correspondant). Conformément au principe des travaux virtuels, la somme des travaux de l'ensemble des forces intérieures et extérieures le long de leurs déplacements virtuels au voisinage de l'état d'équilibre est nulle, c.-à-d.

$$\int \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int X_{ni}\delta u_i\, dS_F = 0. \tag{67.8}$$

Notons que l'on peut obtenir cette équation par voie formelle en transformant l'intégrale de surface et en utilisant les équations d'équilibre (de façon analogue à la déduction de l'équation (64.6)).

Dans la théorie de la déformation plastique (cf. paragraphe 14), on a:

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}=\delta\Pi,$$

où Π est le potentiel du travail de déformation. Les forces extérieures restant invariables, leur travail sera

$$\delta\overline{A}=\delta\int X_{ni}u_i\,dS_F$$

et l'équation (67.8) se réduit à la forme

$$\delta\left(\int\Pi\,dV-\overline{A}\right)=0. \tag{67.9}$$

La grandeur à l'intérieur des parenthèses est appelée *énergie totale*; désignons-la par $\mathscr{E}$, on a alors:

$$\delta\mathscr{E}=0. \tag{67.10}$$

La forme réelle de l'équilibre du corps diffère de toutes les formes possibles par ce qu'elle implique une valeur minimale à l'énergie totale (cf. ci-après).

L'équation variationnelle (67.10) remplace les conditions aux limites et les équations différentielles d'équilibre aux déplacements (20.2), généralisant les équations de Lamé dans la théorie de l'élasticité (paragraphe 20).

En effet,

$$\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij},\quad \delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\delta u_j\right).$$

A l'aide de la formule de Gauss — Ostrogradski on trouve:

$$\int\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{11}}\delta\varepsilon_{11}\,dV=\int\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{11}}\delta u_1\cos(n,\ 1)\,dS-\int\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{11}}\right)\delta u_1\,dV,$$

etc. Portant ces expressions dans l'équation (67.9), on obtient:

$$-\int\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right]\delta u_j\,dV+\int\left[\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{ij}}\cos(n,\ i)-X_{ni}\right]\delta u_j\,dS=0. \tag{67.11}$$

Les déplacements étant définis sur l'élément de surface S_u, sur S_u on a donc $\delta u_i=0$; les variations de δu_i sont arbitraires à l'intérieur du corps et à la surface de S_F, et il découle de (67.11) les équations différentielles d'équilibre aux déplacements (20.2) et les conditions aux limites correspondantes sur S_F.

Envisageons les cas particuliers des états du milieu: d'élasticité, d'écoulement et d'écrouissage.

Le *milieu élastique de Hooke* se caractérise par le fait que

$$\Pi = U + \frac{G}{2}\Gamma^2 \quad \left(U = \frac{\varepsilon^2}{6k}\right).$$

Sous la condition de l'indépendance des forces extérieures par rapport aux déplacements, l'*énergie totale du système élastique prend la valeur minimale.*

Il est facile de le montrer en calculant la seconde variation de l'énergie potentielle; étant donné que Π est ici une forme positive quadratique homogène des composantes de la déformation, sa seconde variation sera la même forme quadratique des *variations* des composantes de la déformation $\delta\varepsilon_{ij}$ multipliée par 2, par conséquent,

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U + \delta^2 \frac{G}{2}\Gamma^2 > 0,$$

avec

$$\delta^2 U = \frac{1}{3k}(\delta\varepsilon)^2 \geqslant 0,$$

$$\delta^2 \frac{G}{2}\Gamma^2 = G2\delta e_{ij}\delta e_{ij} \geqslant 0.$$

Nous désignerons par $\Gamma^2(\delta\varepsilon_{ij})$ la forme quadratique non négative des variations de la déformation. Ainsi, $\delta^2\Pi > 0$, mais alors on a également $\delta^2\mathscr{E} > 0$.

Dans l'*état d'écoulement*, l'accroissement du potentiel du travail de déformation est égal à

$$\delta\Pi = \delta\left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s\Gamma\right),$$

et l'équation variationnelle fondamentale prend la forme

$$\delta\left[\int\left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s\Gamma\right)dV - \bar{A}\right] = 0. \qquad (67.12)$$

Sous la même condition de l'indépendance des forces extérieures par rapport aux déplacements, la seule condition remplie dans ce cas sera la condition de minimum nécessaire pour la forme d'équilibre réelle.

En effet,

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U + \tau_s\delta^2\Gamma,$$

avec $\delta^2 U \geqslant 0$; d'autre part

$$\delta\Gamma = \frac{1}{2\Gamma}\delta(\Gamma^2), \quad \delta^2\Gamma = \frac{1}{\Gamma}\left\{\Gamma^2(\delta\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{4\Gamma^2}[\delta(\Gamma^2)]^2\right\}.$$

La grandeur dans les accolades est non négative; en effet,

$$\Gamma^2 = \frac{2}{3}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2),$$

et, après des transformations simples, on trouve:

$$\{\ldots\}=\frac{2}{3}\,\frac{(\gamma_1\delta\gamma_2-\gamma_2\delta\gamma_1)^2+(\gamma_2\delta\gamma_3-\gamma_3\delta\gamma_2)^2+(\gamma_3\delta\gamma_1-\gamma_1\delta\gamma_3)^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2}\geqslant 0,$$

c.-à-d. $\delta^2\Gamma \geqslant 0$. Etant donné que $\tau_s > 0$, $\Gamma > 0$, on a alors $\delta^2\Pi \geqslant 0$ du fait que l'expression entre les accolades peut se réduire à zéro pour $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$ non nulles.

Il convient de noter que, s'il y a des zones élastiques dans le corps, on a dans ces zones $\delta^2\Pi > 0$ et alors $\delta^2\mathscr{E} > 0$.

Pour le milieu écrouissable, le potentiel de la déformation est exprimé par la formule (14.25), et alors

$$\delta\left\{\int\left(U+\int g(\Gamma)\,\Gamma\,d\Gamma\right)dV-\bar{A}\right\}=0.$$

Sous la même condition d'indépendance des forces extérieures par rapport aux déplacements, l'*énergie du système atteint son minimum dans l'état d'équilibre réel.*

En effet, la seconde variation est

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U + \delta^2\int T\,d\Gamma.$$

Ensuite,

$$\delta^2\int T\,d\Gamma = \delta T\delta\Gamma + T\delta^2\Gamma.$$

En y portant δT conformément à l'équation $T = g(\Gamma)\,\Gamma$, on obtient:

$$\delta^2\int g(\Gamma)\,\Gamma\,d\Gamma=\frac{dT}{d\Gamma}(\delta\Gamma)^2+T\delta^2\Gamma.$$

Le deuxième terme du second membre ne peut être négatif; supposons maintenant que, lors de la croissance de la déformation de cisaillement, augmente la contrainte de cisaillement (fig. 212). Cette condition qui caractérise « l'endurance » du matériau, est évidemment vérifiée pour tous les solides (cf. paragraphe 18). On a alors

$$\frac{dT}{d\Gamma}>0, \qquad (67.13)$$

et $\delta^2\Pi$ est une forme quadratique définie positive des variations $\delta\varepsilon_{ij}$. Il n'est pas difficile de s'en convaincre si l'on analyse les conditions de l'annulation simultanée des grandeurs $\delta^2 U$, $\delta(\Gamma^2)$ et $\delta^2\Gamma$.

Fig. 212

Examinons le *cas du problème mixte*. Soit V le volume d'un corps en équilibre, divisé par la surface Σ en parties V_1 et V_2 dans chacune desquelles la déformation est régie par sa loi caractéristique de l'état du matériau de cette partie du corps. Les expressions correspondantes du potentiel du travail de déformation seront Π_1 et Π_2. Sur la surface

Σ les états passent continûment de l'un à l'autre et les grandeurs T et Γ sont constantes (paragraphe 21). Lorsqu'on fait varier l'état déformé, la surface Σ passe en général à une surface infiniment proche Σ' qui séparera les volumes V_1' et V_2', voisins des précédents. La variation de la surface de séparation (ou surface frontière) Σ ne dépend que de l'accroissement de la grandeur Γ qui aura la même valeur constante sur les surfaces Σ et Σ'.

Considérons l'intégrale triple

$$I(\lambda) = \iiint_D F(x, y, z; \lambda)\, dx\, dy\, dz,$$

étendue au domaine D, limité par une surface Σ quelconque qui varie avec le paramètre λ. La variation de cette intégrale (cf. E. Goursat, « Cours d'analyse mathématique », vol. I, partie I, Appendice) est égale à

$$\delta I(\lambda) = \iiint_D \delta F\, dx\, dy\, dz + \iint_\Sigma F \delta n\, dS,$$

où δn est le déplacement infiniment petit d'un point de la surface Σ dans la direction de sa normale extérieure lors de la variation de λ.

Dans notre cas, le potentiel du travail de la déformation d'un corps a la forme

$$\Pi = \int \Pi_1\, dV_1 + \int \Pi_2\, dV_2,$$

et l'on doit appliquer à deux reprises la formule précédente, à savoir au volume V_1 et au volume V_2. Par suite de la continuité de Π dans tout le volume du corps, les intégrales correspondantes se réduiront à la surface de Σ, car elles sont de valeur égale et de signe inverse. Ainsi, pour le problème mixte, à condition que les déplacements, les composantes de la déformation et de la contrainte soient continus sur Σ, on obtient:

$$\delta \left\{ \int \Pi_1\, dV_1 + \int \Pi_2\, dV_2 - \bar{A} \right\} = 0, \qquad (67.14)$$

c.-à-d. que *la forme réelle de l'équilibre d'un corps, dont les parties se trouvent dans des états différents, se caractérise par le minimum de l'énergie totale, comme dans le cas simple.*

3. Principe du minimum de travail supplémentaire. On a examiné plus haut les propriétés de minimum des déplacements réels. Procédons maintenant à l'examen des propriétés de minimum de la distribution réelle des contraintes (sous l'hypothèse précédente sur l'absence de décharge).

Equation des variations statiquement possibles de l'état de contrainte. Comparons l'état de contrainte réel σ_{ij}, engendré dans le corps sous

l'action des forces et déplacements donnés, à tous les états de contrainte voisins théoriquement possibles $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ satisfaisant aux équations de la statique à l'intérieur du corps

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) = 0 \tag{67.15}$$

et sur une partie de surface S_F

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) n_j = X_{ni} + \delta X_{ni}. \tag{67.16}$$

Nous conviendrons d'appeler de tels états de contrainte *états statiquement possibles.*

Il est clair que les variations des contraintes $\delta\sigma_{ij}$ et les variations des forces extérieures δX_{ni} constituent un système en équilibre. Par conséquent, le travail de ces forces intérieures et extérieures le long de tout déplacement possible du corps doit se réduire à zéro. Prenons en qualité de déplacements virtuels les déplacements réels u_i, ce qui nous donne alors:

$$\int \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\, dV = \int u_i \delta X_{ni}\, dS \tag{67.17}$$

On devra considérer alors δX_{ni} comme définies sur S_F; sur S_u ces variations sont calculées selon les variations des contraintes conformément à (67.16).

On attribue une grande importance à une classe plus restreinte de variations de l'état de contrainte, qui se caractérise par l'absence du travail des variations de forces extérieures le long des déplacements réels du corps:

$$\int u_i \delta X_{ni}\, dS = 0 \tag{67.18}$$

A cette condition

$$\int \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\, dV = 0. \tag{67.19}$$

La condition (67.18) est remplie, par exemple, si des forces extérieures sont définies sur toute la surface du corps, et alors $\delta X_{ni} = 0$. Seules quelques-unes des composantes de l'effort extérieur peuvent être définies, tandis que pour les autres les déplacements correspondants sont nuls.

La déduction de l'équation variationnelle (67.19) a été faite sans tenir aucunement compte des propriétés mécaniques du milieu continu dont on a utilisé seulement la continuité. A l'état de contrainte réel correspondent des déformations pour lesquelles sont vérifiées les conditions de compatibilité de Saint-Venant. On peut montrer que les conditions de compatibilité de Saint-Venant découlent de l'équation (67.19). L'équation variationnelle (67.19) est donc l'énoncé énergétique de la condition de continuité des déformations (pour ce

qui est des démonstrations, nous renvoyons le lecteur au manuel de L. Leibenzon [15]).

Notion de travail supplémentaire. Envisageons plus en détail l'expression du travail élémentaire des variations de contraintes le long des déplacements réels; remplaçant les composantes de la déformation selon les formules de Hencky (67.2), on trouve après toute une série de transformations simples:

$$\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} = \psi\delta T^2 + \delta U.$$

Etant donné que pour les milieux envisagés est satisfaite l'une des conditions

$$\psi = \text{const} = \frac{1}{2G} \text{ (milieu élastique de Hooke)},$$

$$T = \text{const} = \tau_s \text{ (état d'écoulement)},$$

$$\psi = \frac{1}{2}\bar{g}(T) \text{ (état d'écrouissage)},$$

on aura alors dans le second membre la différentielle totale d'une fonction de contraintes quelconque R:

$$\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} = \delta R. \tag{67.20}$$

Pour le milieu élastique de Hooke

$$R = U + \frac{1}{2G}T^2 = \Pi,$$

pour l'état d'écrouissage

$$R = U + \int \bar{g}(T)\, T\, dT, \tag{67.21}$$

pour l'état d'écoulement

$$R = U.$$

Convenons d'appeler R la densité du travail supplémentaire ou simplement le *travail supplémentaire*. Pour élucider cette notion, nous négligeons pour le moment le terme δU qui se rapporte à la variation du volume dont le déroulement est dans tous les cas régi par la même loi; alors, en vertu de la relation $\Gamma = 2\psi T$, on a (1):

$$R_f = \int \Gamma\, dT,$$

$$\delta R_f = \Gamma \delta T.$$

Examinons différents cas de la courbe $T = g(\Gamma)\,\Gamma$ (fig. 213). Le travail de la déformation est représenté par une aire hachurée avec des lignes verticales, le travail supplémentaire par une aire hachurée avec des lignes horizontales.

(1) Rappelons que le travail du changement de forme est $A_f = \int T d\Gamma$.

Dans le cas du milieu élastique de Hooke, ces aires sont de grandeur égale $R_t = A_t$, et ici on peut ne pas distinguer la notion du travail de déformation et celle du travail supplémentaire ; ceci est inadmissible dans les autres cas. Il est évident que, pour le rapport donné

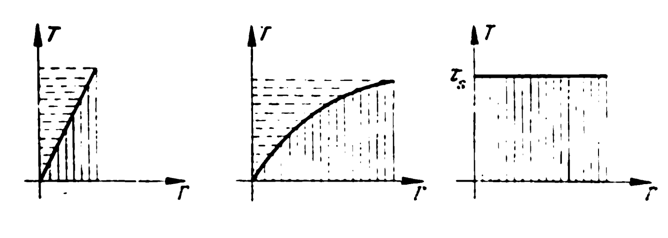


Fig. 213

$T = g(\Gamma)\,\Gamma$, le travail supplémentaire R_t sera une fonction définie du travail de déformation A_t.

Généralisation des formules de Castigliano. Etant donné que

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij},$$

alors, en comparant l'expression ci-dessus avec la formule (67.20), on trouve les relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial R}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{67.22}$$

qui, dans le cas des liaisons non linéaires considérées entre les contraintes et les déformations, remplacent les formules connues de Castigliano. Il est évident que les formules de Hencky (67.2) peuvent être représentées sous la forme (67.22).

Principe de réciprocité. Il découle des relations (67.22) qu'il faut satisfaire à 15 conditions

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}},$$

que l'on devra considérer comme une généralisation naturelle du théorème de la réciprocité pour le cas des relations non linéaires envisagées entre les contraintes et les déformations [114].

Généralisation du théorème de Castigliano. Etendons le théorème de Castigliano au cas des relations non linéaires entre les contraintes et les déformations. Soient P_k ($k = 1, 2, \ldots$) des forces concentrées appliquées à un corps ; α_k, β_k, γ_k les cosinus directeurs correspondants des vecteurs de ces forces ; u_{1k}, u_{2k}, u_{3k} les composantes du déplacement des points d'application des forces P_k. Partant alors de l'équation variationnelle générale (67.17) et supposant que l'une des forces P_k reçoit un accroissement δP_k infiniment petit, les appuis

restant fixes, on trouve:

$$\delta\widetilde{R} = (u_{1k}\alpha_k + u_{2k}\beta_k + u_{3k}\gamma_k)\,\delta P_k, \tag{67.23}$$

où par $\widetilde{R}$ on désigne le travail supplémentaire de l'*ensemble du corps*

$$\widetilde{R} = \int R\,dV.$$

L'expression entre parenthèses dans (67.23) représente le déplacement du point d'application d'une force le long de la ligne d'action de cette force. Ainsi,

$$\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial P_k} = \Delta_k, \tag{67.24}$$

c.-à-d. que *la dérivée partielle du travail supplémentaire par rapport à la valeur d'une force appliquée quelconque P_k est égale au déplacement du point d'application de cette force dans la direction de l'action de cette force.* Ce résultat est vrai également en ce qui concerne les forces et déplacements généralisés.

En effet, si les forces appliquées à un corps sont proportionnelles à une grandeur Q quelconque, il est clair que

$$\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial Q} = \sum (u_{1k}\alpha_k + u_{2k}\beta_k + u_{3k}\gamma_k) \equiv q. \tag{67.25}$$

Ici Q et q sont la force et le déplacement généralisés.

Dans le cas du milieu élastique de Hooke, $\widetilde{R} = \widetilde{\Pi}$ et la formule (67.25) conduit au théorème de Castigliano.

Admettons que l'état de contrainte d'un corps dépend de *m inconnus en plus* $X_1, X_2, \ldots, X_m$. On a affaire à de tels systèmes mécaniques lorsque l'on procède au calcul des poutres, des systèmes triangulaires, etc. Dans ce cas, la condition de minimum de travail supplémentaire $\widetilde{R}$ conduit au système de m équations

$$\frac{\partial\widetilde{R}}{\partial X_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial X_m} = 0. \tag{67.26}$$

Exemple. Le théorème généralisé de Castigliano est commode pour le calcul des corps les plus simples: treillis, poutres et membrures. Envisageons, en guise d'exemple, un treillis constitué de trois barres identiques (de longueur l et de section F, fig. 35). A l'extension du matériau, la loi suivante entre en jeu:

$$\varepsilon_x = \frac{B_1}{3\sqrt{3}}\sigma_x^2,$$

où B_1 est une constante. Comparant cette formule à celles de Hencky (67.2), on trouve:

$$k = 0, \quad T = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}, \quad \bar{g}(T) = B_1 T, \quad R = \frac{B_1}{9\sqrt{3}}\sigma_x^3.$$

Nous considérerons que la barre verticale est de trop; soit X l'effort dans cette barre. On trouve aisément:

$$S_1 = S_3 = P - X, \quad S_2 = X.$$

Le travail supplémentaire du treillis est égal à

$$\widetilde{R} = lF\left[\frac{2B_1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{P-X}{F}\right)^3 + \frac{B_1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{X}{F}\right)^3\right].$$

Etablissant l'équation $\frac{\partial \widetilde{R}}{\partial X} = 0$, on trouve que $\sqrt{2}(P - X) = \pm X$. A l'état d'équilibre réel correspond le minimum de travail supplémentaire de l'ensemble du corps; il est aisé de voir qu'un signe $+$ répond au minimum de $\widetilde{R}$. Par conséquent,

$$X = \frac{2P}{2+\sqrt{2}}.$$

Principe du minimum de travail supplémentaire. L'équation variationnelle (67.19) pour le milieu envisagé prend la forme

$$\delta\widetilde{R} = 0. \tag{67.27}$$

Examinons les cas particuliers des états du milieu: d'élasticité, d'écoulement et d'écrouissage.

Milieu élastique de Hooke. Ici $R = \Pi$ et l'équation variationnelle (67.27) prend la forme

$$\delta \int \left(U + \frac{1}{2G} T^2\right) dV = 0, \tag{67.28}$$

connue sous le nom de *principe de Castigliano.* A la différence des états de contrainte statiquement possibles, répondant *à la même charge extérieure*, l'état de contrainte réel d'un corps élastique implique la *valeur minimale* à l'énergie potentielle élastique de ce corps.

Il est facile de s'assurer que l'on atteint le minimum de l'énergie potentielle en étudiant le signe de sa seconde variation

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U + \delta^2\left(\frac{1}{2G} T^2\right) > 0,$$

avec

$$\delta^2 U = 3k\,(\delta\sigma)^2 \geqslant 0,$$
$$\delta^2 T^2 = \delta s_{ij}\delta s_{ij} \geqslant 0.$$

Nous désignerons par $2T^2(\delta\sigma_{ij})$ la forme quadratique non négative des variations de contraintes.

Dans l'*état d'écoulement* $T = \text{const}$ et l'équation variationnelle (67.27) prend la forme

$$\delta \int U\, dV = 0, \tag{67.29}$$

autrement dit, l'état de contrainte réel se distingue de tous les états de contrainte voisins statiquement possibles se trouvant dans la phase d'écoulement par ce qu'il est le seul à communiquer une valeur extrémale à l'énergie potentielle élastique de changement du volume d'un corps.

Supposons que le matériau soit incompressible; on a alors $U = 0$ et l'on aboutit à la conclusion : les déplacements réels des points d'un milieu incompressible dans l'état d'écoulement sont tels que les variations infiniment petites des contraintes à l'intérieur de la phase d'écoulement ne produisent aucun travail supplémentaire pour ces déplacements.

Pour l'état d'écrouissage, l'équation variationnelle (67.27) prend la forme

$$\delta \int \left[U + \int \overline{g}(T)\, T\, dT \right] dV = 0, \tag{67.30}$$

c.-à-d. que les contraintes, correspondant à l'état d'équilibre réel, sont telles que le travail supplémentaire de l'ensemble du corps $\widetilde{R}$ acquiert une *valeur minimale* par rapport à toutes ses valeurs voisines qui sont compatibles avec les conditions d'équilibre.

Montrons qu'il se réalise le minimum de $\widetilde{R}$. La seconde variation

$$\delta^2 R = \delta^2 U + \delta^2 \int \Gamma dT.$$

On sait que $\delta^2 U \geqslant 0$. Ensuite,

$$\delta^2 \int \Gamma dT = \delta T \delta \Gamma + \Gamma \delta^2 T,$$

avec d'ailleurs, tout comme dans le cas examiné à la page 335, $\delta^2 T \geqslant 0$ et

$$\delta^2 R = \delta^2 U + \frac{d\Gamma}{dT} (\delta T)^2 + \Gamma \delta^2 T.$$

Il est aisé de voir que si

$$\frac{d\Gamma}{dT} > 0, \tag{67.31}$$

on a alors $\delta^2 R > 0$. La condition (67.31), tout comme la condition (67.13), est évidemment toujours vérifiée pour les matériaux réels.

Si les parties du corps V_1, V_2, . . ., se trouvent dans des états différents, les accroissements du travail supplémentaire ont pour expressions δR_1, δR_2, . . . respectivement. Le travail R variant continûment au cours du passage par les surfaces Σ_1, Σ_2, . . ., séparant les domaines aux états différents, et l'intensité des contraintes tangentielles étant constante sur chacune des surfaces Σ_1, Σ_2, . . ., il est facile de s'assurer que, comme auparavant, on a pour le problème

mixte

$$\delta \left\{ \int R_1 \, dV_1 + \int R_2 \, dV_2 + \ldots \right\} = 0.$$

Notons que la disposition des surfaces de séparation Σ_1, Σ_2, . . . correspond au minimum du travail supplémentaire de l'ensemble du corps.

De manière analogue, on établit la généralisation de la formule (67.24) pour le cas des forces concentrées appliquées au corps:

$$\int \frac{\partial R_1}{\partial P_k} dV_1 + \int \frac{\partial R_2}{\partial P_k} dV_2 + \ldots = \Delta_k.$$

4. Considérations finales. Les théorèmes énergétiques cités de la théorie des déformations sont exposés dans l'ouvrage [105]; les équations correspondantes pour le corps inégalement chauffé sont exposées dans [13]. Le cas du nombre fini des coordonnées généralisées, qui est important pour la mécanique des constructions, a été étudié par A. Lourié [114]. Les principes du minimum généralisés pour le cas des grandes déformations plastiques sont traités dans l'article de A. Philips [181]. Dans son ouvrage [159], R. Hill a montré que pour l'état réel l'énergie totale et le travail supplémentaire atteignent le minimum absolu.

68. MÉTHODE DE RITZ. EXEMPLE DE TORSION ÉLASTO-PLASTIQUE

1. Méthode de Ritz. Les équations variationnelles de la théorie des déformations envisagées précédemment permettent d'élaborer des solutions approchées par méthodes directes. Le plus naturel, à première vue, serait d'appliquer directement la méthode de Ritz sous sa forme ordinaire.

Pour fixer les idées, considérons l'équation variationnelle (67.10) caractérisant les propriétés de minimum des déplacements u_i ($i = 1, 2, 3$). Soient u_{i0} le triplet de fonctions satisfaisant aux conditions données sur une partie de surface S_u, et u_{is} ($s = 1, 2, \ldots, n$) la suite de fonctions coordonnées satisfaisant aux conditions de nullité sur S_u. Cherchons la solution approchée du problème du minimum de l'énergie totale sous la forme

$$u_i = u_{i0} + \sum_{s=1} c_{is} u_{is}, \tag{68.1}$$

où c_{is} sont les coefficients de Ritz. On peut maintenant calculer l'expression de l'énergie totale qui sera la fonction des coefficients c_{ik}. Ces derniers sont déterminés des conditions du minimum de l'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial c_{ik}} \mathcal{E} = 0. \tag{68.2}$$

Pour le corps élastique, l'énergie totale sera la forme quadratique des coefficients c_{ik}; les conditions (68.2) forment alors un système d'équations algébriques non homogènes linéaires par rapport à c_{ik}.

Lorsque l'on a affaire à une déformation plastique, l'énergie totale ne sera plus la forme quadratique des c_{ik} et les conditions (68.2) conduisent à un système d'équations non linéaires servant à définir les coefficients de Ritz. L'établissement et la solution de ce système, même pour n petit, sont liés à des calculs fort laborieux.

C'est la raison pour laquelle l'application de l'approximation monôme est devenue d'un usage courant (pour des conditions de nullité sur S_u):

$$u_i = c_{i1}u_{i1},$$

où pour u_{i1} on prend d'habitude la solution du problème linéaire (élastique) correspondant. Sous une telle forme ce procédé est utilisé pour la résolution approchée de divers problèmes techniques. Cependant, il ne faut pas oublier des erreurs éventuelles notables que peuvent présenter de telles solutions.

Avec l'augmentation du nombre de fonctions coordonnées, augmentent brusquement les difficultés rencontrées lors de l'établissement du système de Ritz. Si, d'une manière ou d'une autre, le système non linéaire de Ritz est tout de même obtenu, il devra être résolu, ce qui à son tour implique de grosses difficultés et nécessite l'application de différentes méthodes numériques.

Aussi la méthode de Ritz est-elle facile à formuler si elle est appliquée au problème de la minimisation du travail supplémentaire $\tilde{K}$.

2. Méthode de Ritz modifiée. Les difficultés rencontrées lors de l'application directe de la méthode de Ritz nous obligent à chercher différentes modifications de cette méthode. Une de ces modifications [110], pouvant être appliquée à la recherche du minimum et dans plusieurs autres problèmes non linéaires, est exposée ci-dessous. Ce procédé permet de surmonter les difficultés dues à ce que les fonctionnelles ne sont pas quadratiques et de construire une solution par des méthodes directes, et ceci avec une précision nécessaire.

Considérons, par exemple, l'application de cette méthode à la recherche du minimum de travail supplémentaire. Soient σ_{ij0} la solution particulière des équations d'équilibre (64.2), satisfaisant aux conditions données sur une partie de surface S_F, et σ_{ijs}, $s = 1, 2, \ldots, n$ une collection de solutions particulières des équations d'équilibre (64.2) pour les conditions de nullité aux limites sur S_F. On construit la solution du problème du minimum de travail supplémentaire

$$\int \left[U + \int \overline{g}(T)\, T\, dT \right] dV = \min \tag{68.3}$$

par approximations successives sous la forme

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \sigma_{ij0} + \sum_{s=1} c_s^{(r)} \sigma_{ijs}, \tag{68.4}$$

où $c_s^{(r)}$ sont les coefficients à déterminer.

Dans l'approximation d'ordre zéro $\sigma_{ij}^{(0)}$, on pose $\bar{g}(T) = \frac{1}{G_0}$, où G_0 est le module de cisaillement (ou une certaine valeur caractérisant la pente de la droite qui est une approximation de la courbe de déformation dans le segment initial). L'approximation d'ordre zéro correspond au corps élastique et se définit à partir de la condition du minimum de la fonctionnelle quadratique :

$$\int \left(U + \frac{1}{2G_0} T^2\right) dV = \min.$$

On trouve les coefficients de l'approximation d'ordre zéro $c_s^{(0)}$ à partir du système d'équations algébriques non homogènes linéaires. Calculant d'après les contraintes trouvées $\sigma_{ij}^{(0)}$ l'intensité $T^{(0)} = \left(\frac{1}{2} s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(0)}\right)^{1/2}$, on suppose que $G_1 = g(T^{(0)}/G_0)$ et l'on détermine l'approximation suivante (« première ») à partir de la condition du minimum de la fonctionnelle quadratique :

$$\int \left(U + \frac{1}{2G_1} T^2\right) dV = \min.$$

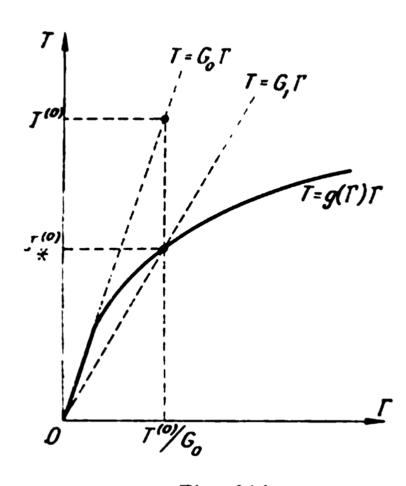


Fig. 214

Le module « tranchant » G_1 est ici une fonction connue des coordonnées. Pour le procédé décrit du choix de G_1, l'intensité des contraintes tangentielles T qui, d'après la loi linéaire $T = G_0\Gamma$, correspond à une valeur quelconque de l'intensité des déformations de cisaillement Γ « retourne » dans l'approximation suivante sur la courbe de déformation $T = g(\Gamma)\,\Gamma$ (fig. 214). Il est évident que $G_1 = G_0 \frac{T_*^{(0)}}{T^{(0)}}$.

Ce processus se poursuit toujours jusqu'à ce que la précision voulue soit obtenue. Pour la r-ième approximation, on obtient :

$$\int \left(U + \frac{1}{2G_r} T^2\right) dV = \min,$$

avec

$$G_r = G_{r-1} \frac{T_*^{(r-1)}}{T^{(r-1)}}, \tag{68.5}$$

où

$$T_*^{(r-1)} = g\left(\frac{T^{(r-1)}}{G_{r-1}}\right) T^{(r-1)}.$$

La présence du module variable G_r dans la r-ième approximation ne fait que compliquer quelque peu le calcul des quadratures, pour ce qui est de la r-ième approximation elle-même, elle a la même forme que pour le corps élastique. En chaque approximation, les coefficients $c_s^{(r)}$ sont définis à partir d'un système d'équations algébriques linéaires.

Dans la représentation de (68.4), il convient de retenir le nombre de termes nécessaire pour assurer la précision voulue de la solution du problème élastique. Bien entendu, le calcul des approximations d'ordre élevé n'a pas de grand sens lorsque n est fixé. Il est commode de trouver les quadratures par méthodes numériques. Lorsque l'on détermine le module tranchant G_r, on peut se baser directement sur la courbe de déformation expérimentale « T — Γ ». La conservation de cette même forme de solution en chaque approximation (seuls changent les coefficients $c_s^{(r)}$) a pour effet de simplifier sensiblement les calculs et, à la différence des autres méthodes des approximations successives, permet d'éviter les calculs laborieux.

Une méthode analogue peut être appliquée également pour la recherche du minimum de l'énergie totale (67.10). Dans ce cas, on cherche la solution du problème par approximations successives sous la forme

$$u_i^{(r)} = u_{i0} + \sum_{s=1} c_{is}^{(r)} u_{is},$$

où u_{i0} satisfont aux conditions données sur S_u, u_{is} se réduisent à zéro sur S_u et $c_{is}^{(r)}$ sont des constantes arbitraires. A l'approximation d'ordre zéro. on suppose que $g(\Gamma) = \text{const} = G_0$. En r-ième approximation $g(\Gamma) = g(\Gamma^{(r-1)})$.

D'autres variantes de construction des approximations sont possibles (cf. aperçu [65]). On peut de même utiliser une modification analogue de la méthode de Galerkine.

Par la méthode exposée, on peut résoudre pratiquement de tels problèmes élasto-plastiques pour lesquels dans l'état élastique il existe la solution par la méthode de Ritz.

3. Exemple de torsion élasto-plastique d'une barre de section carrée (dont la longueur du côté est $2a$). Supposons que la relation entre T et Γ se caractérise par l'écrouissage linéaire (fig. 215):

$$T = \begin{cases} G_0\Gamma & \text{pour } \Gamma \leqslant 0{,}0025, \\ (19{,}4 + 236\Gamma)\ \text{kN/cm}^2 & \text{pour } \Gamma \geqslant 0{,}0025. \end{cases} \qquad (68.6)$$

Le module de cisaillement est $G_0 = 7{,}85 \cdot 10^3$ kN/cm². La relation présentée correspond au comportement de l'acier au nickel.

L'équation différentielle d'une barre écrouissable tordue a été déduite dans le paragraphe 30. L'équation variationnelle pour la fonction des contraintes F (ici on conserve les notations du paragra-

phe 30) peut être obtenue à partir de l'équation variationnelle générale (67.17). Le travail des variations de forces de surface sur la surface latérale et sur la base encastrée $z = 0$ est nul ; sur la base libre $z = l$ on a $u_x = -\omega y l$, $u_y = \omega x l$, et alors

$$\int u_i \delta X_i \, dS = \omega l \int\int \left(-y \frac{\partial}{\partial y} \delta F - x \frac{\partial}{\partial x} \delta F\right) dx\, dy =$$
$$= -\omega l \int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \delta F) + \frac{\partial}{\partial y}(y \delta F)\right] dx\, dy + 2\omega l \int\int \delta F \, dx\, dy.$$

La première intégrale du second membre se transforme en intégrale suivant le contour de la section et est nulle du fait que $\delta F = 0$ sur le contour. L'équation variationnelle (67.17) prend alors la forme

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^T \bar{g}(\lambda) \lambda \, d\lambda - -2a\omega F\right] d\xi \, d\eta = 0, \qquad (68.7)$$

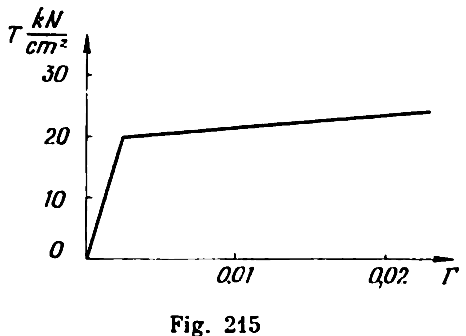


Fig. 215

où sont introduites les coordonnées sans dimensions $\xi = x/a$, $\eta = y/a$. Sur le contour de la section on a $F = 0$.

Pour la barre élastique $\bar{g}(\lambda) = \text{const} = \frac{1}{G_0}$ et le problème devient linéaire.

Mettons l'équation variationnelle (68.7) sous la forme

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{G_r} \frac{T^2}{2} - 2a\omega F\right] d\xi \, d\eta = 0 \qquad (68.8)$$

et chercherons la solution sous la forme

$$F^{(r)} = c_1^{(r)} F_1 + c_2^{(r)} F_2,$$

où $c_1^{(r)}$, $c_2^{(r)}$ sont des constantes arbitraires et

$$F_1 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1), \quad F_2 = F_1(\xi^2 + \eta^2). \qquad (68.9)$$

La solution du problème élastique en cette approximation conduit aux résultats suivants : le moment de torsion $M = 0{,}1404\, G_0 \omega (2a)^4$ est inférieur à la valeur exacte seulement de 0,15 % ; la contrainte tangentielle maximale, qui se réalise au milieu du côté d'un carré, est égale à $\tau_{max} = 1{,}40\, G_0 a\omega$ au lieu de $1{,}35\, G_0 a \omega$ qui est la valeur exacte. Les quadratures sont alors facilement définies et les coeffi-

cients sont égaux à

$$c_1^{(0)} = \frac{5}{8} \frac{259}{277} G_0 a\omega,$$

$$c_2^{(0)} = \frac{5}{16} \frac{105}{277} G_0 a\omega.$$

La distribution des contraintes à la torsion plastique est plus régulière qu'à la torsion élastique. On peut donc supposer que l'approximation sous la forme (68.9) ne doit pas être en général moins bonne que pour la barre élastique.

Le module tranchant G_r a été calculé d'après la formule (68.5) et l'intensité $T_*^{(r-1)}$, conformément à (68.6). Le calcul a été exécuté pour le cas $a\omega = 0{,}015$ et les intégrales ont été trouvées par la méthode numérique de Gauss.

A l'approximation d'ordre zéro ($r = 0$), les coefficients $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ ne se distinguent des valeurs exactes présentées plus haut que dans la sixième décimale. On a calculé dix approximations en vue de contrôler la stabilité des résultats. Les valeurs des coefficients (en kN/cm²) sont données dans le tableau ci-après.

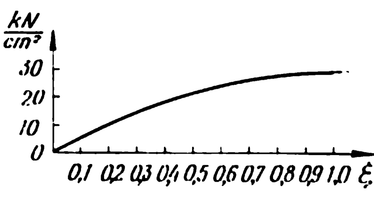


Fig. 216

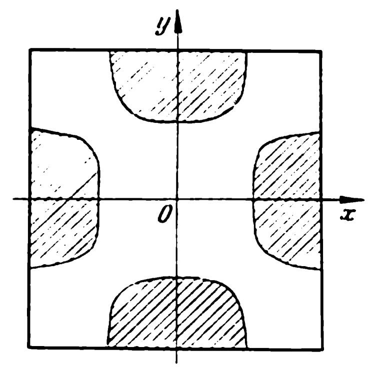


Fig. 217

Utilisant les valeurs obtenues des constantes (en pratique on peut se contenter de trois ou quatre approximations), on calcule les composantes de la contrainte et l'intensité T. La courbe de la contrainte tangentielle dans la section $y = 0$ est montrée sur la figure 216; on

Coefficients $c_1^{(r)}$, $c_2^{(r)}$

r	$c_1^{(r)} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$c_2^{(r)} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-3}$	r	$c_1^{(r)} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$c_2^{(r)} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-3}$
0	0,070125	0,014217	5	0,017551	—0,003740
1	0,018023	—0,003382	6	0,017543	—0,003889
2	0,017872	—0,003765	7	0,017461	—0,003757
3	0,017728	—0,003802	8	0,017469	—0,003663
4	0,017554	—0,003641	9	0,017400	—0,003693

y voit nettement les écarts à la loi linéaire. D'après la condition $T = \tau_s = 19{,}6$ kN/cm², on a trouvé les frontières des zones plastiques qui sont hachurées sur la figure 217. Les détails des calculs sont donnés dans l'ouvrage de l'auteur, cf. [65].

69. PRINCIPES D'EXTREMUM DANS LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT PLASTIQUE

Une distribution des contraintes et des déformations σ_{ij}, ε_{ij} que nous conviendrons d'appeler réelle comme précédemment et que nous supposerons connue se produit dans le corps sous l'action des charges de surface données $\boldsymbol{F}_n$ sur S_F et des déplacements $\boldsymbol{u}$ sur S_u.

Admettons, ensuite, que les charges de surface ont un accroissement $d\boldsymbol{F}_n$ sur S_F et les déplacements, un accroissement $d\boldsymbol{u}$ sur S_u; à ces accroissements correspondent les accroissements de la distribution réelle des contraintes et des déformations.

Dans la théorie de l'écoulement plastique on établit les propriétés d'extremum des *accroissements réels* de la déformation (contrainte) par rapport aux accroissements possibles.

1. Propriétés de minimum des accroissements réels de la déformation. Soient du_i' des accroissements de déplacements continus quelconques qui, sur la surface S_u, prennent des valeurs données. A ces déplacements cinématiquement possibles, en accord avec les équations (3.8), correspondent les accroissements des composantes de la déformation $d\varepsilon_{ij}'$ et, d'après les équations (13.7), certains accroissements des composantes de la contrainte $d\sigma_{ij}'$ qui, généralement parlant, ne satisferont pas aux équations d'équilibre.

Partant du fait que les accroissements réels $d\sigma_{ij}$ satisfont aux équations d'équilibre, il est aisé d'obtenir par des procédés habituels l'équation (¹)

$$\int d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}'\, dV = \int dX_{ni}\, du_i'\, dS.$$

Ici les champs des accroissements de contraintes $d\sigma_{ij}$ et de déplacements du_i' ne sont pas en général liés entre eux. Si du_i est l'accroissement d'un déplacement réel, on a alors

$$\int d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dV = \int dX_{ni}\, du_i\, dS. \qquad (69.1)$$

Retranchant l'équation inférieure de l'équation supérieure, on obtient:

$$\int d\sigma_{ij}\,(d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij})\, dV = \int dX_{ni}\,(du_i' - du_i)\, dS_F. \qquad (69.2)$$

(¹) Par la suite, on suppose la continuité des accroissements des composantes de la contrainte et de la déformation; cette restriction peut être levée, mais ici nous ne nous arrêtons pas sur ce sujet.

Il est facile de s'assurer de la validité de l'identité

$$2d\sigma_{ij}(d\varepsilon'_{ij}-d\varepsilon_{ij})\equiv(d\sigma'_{ij}\,d\varepsilon'_{ij}-d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij})-$$
$$-[d\varepsilon'_{ij}(d\sigma'_{ij}-d\sigma_{ij})+d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij}-d\varepsilon'_{ij})]. \quad (69.3)$$

Considérons maintenant l'expression entre crochets en utilisant les formules (13.7) pour l'état d'écoulement et les formules (13.14) pour le matériau écrouissable; on obtient respectivement:

$$[\ldots]=\frac{1}{2G}(ds'_{ij}-ds_{ij})(ds'_{ij}-ds_{ij})+3k(d\sigma'-d\sigma)^2+$$
$$+\left\{\begin{array}{l}[(\varkappa'\,d\lambda'-\varkappa\,d\lambda)\,dT'^2+\varkappa\,d\lambda\,(dT^2-dT'^2)],\\ [(\varkappa'\,dT'^2-\varkappa\,dT^2)\,dT'^2+\varkappa\,dT^2\,(dT^2-dT'^2)]\,F(T).\end{array}\right.$$

Les facteurs $\varkappa$, $\varkappa'$ ont le sens suivant: le facteur $\varkappa$ qui se rapporte aux accroissements réels est égal à l'unité s'il y a un chargement, et $\varkappa=0$ pour les décharges et les transformations neutres; $\varkappa'$ prend des valeurs analogues par rapport aux accroissements possibles qui, en accord également avec les équations de la théorie de l'écoulement plastique, provoquent le « chargement » ou la « décharge ».

Dans les égalités écrites plus haut, les deux premiers termes du second membre sont positifs; ils ne se réduisent à zéro que lorsque se vérifient en même temps les égalités $ds'_{ij}=ds_{ij}$, $d\sigma'=d\sigma$. Montrons que les quantités entre les crochets suivants sont non négatives.

Si une décharge se produit, on a alors $\varkappa=0$, $\varkappa'=0$ et la quantité mentionnée est nulle. S'il y a un chargement ($\varkappa=1$, $\varkappa'=1$), le premier crochet (pour le matériau qui possède le palier d'écoulement) est égal à zéro, car $dT^2=0$, $dT'^2=0$; dans le second cas, ce crochet est non négatif étant donné qu'il est égal à $(dT'^2-$ $-dT^2)^2\geqslant 0$.

Si $\varkappa=1$, $\varkappa'=0$, le premier crochet est alors égal à $-2d\lambda dT'^2\geqslant$ $\geqslant 0$, et le second, à $(dT^2)^2-2dT^2dT'^2\geqslant 0$, car $dT'^2\leqslant 0$, $d\lambda\geqslant 0$. Finalement, lorsque $\varkappa=0$, $\varkappa'=1$, le premier crochet est nul et le second est non négatif $(dT'^2)^2\geqslant 0$. De la sorte,

$$\frac{1}{2}(d\sigma'_{ij}\,d\varepsilon'_{ij}-d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij})>d\sigma_{ij}(d\varepsilon'_{ij}-d\varepsilon_{ij}) \quad (69.4)$$

chaque fois que les accroissements possibles se distinguent des accroissements réels. Par conséquent, faisant abstraction du cas mentionné de la coïncidence, on obtient à partir de (69.2):

$$\frac{1}{2}\int d\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\,dV-\int dX_{ni}\,du_i\,dS_F<$$
$$<\frac{1}{2}\int d\sigma'_{ij}\,d\varepsilon'_{ij}\,dV-\int dX_{ni}\,du'_i\,dS_F. \quad (69.5)$$

Nous appellerons *énergie des accroissements* $\mathscr{E}(du'_i)$ l'expression (fonctionnelle) dans le second membre de l'inégalité.

Les accroissements réels des déplacements du_i assurent le minimum absolu à l'énergie des accroissements $\mathscr{E}\,(du_i')$ par rapport à tous les accroissements cinématiquement possibles.

2. Propriétés de maximum des accroissements réels de la contrainte. Confrontons maintenant les accroissements réels de la contrainte $d\sigma_{ij}$ avec les accroissements statiquement possibles $d\sigma'_{ij}$ (satisfaisant aux équations d'équilibre à l'intérieur du corps et sur une partie de surface S_F).

Soient $d\varepsilon'_{ij}$ les accroissements des composantes de la déformation (d'après les relations de la théorie de l'écoulement plastique) pour les accroissements statiquement possibles envisagés $d\sigma'_{ij}$; il est évident que $d\varepsilon'_{ij}$ ne pourront pas, généralement parlant, satisfaire aux conditions de continuité des déformations. Utilisant le fait que les accroissements $d\sigma'_{ij}$, $d\sigma_{ij}$ sont équilibrés, on obtient facilement avec les procédés précédents l'équation

$$\int (d\sigma'_{ij} - d\sigma_{ij})\, d\varepsilon_{ij}\, dV = \int (dX'_{ni} - dX_{ni})\, du_i\, dS_u. \qquad (69.6)$$

Examinons l'identité

$$2d\varepsilon_{ij}\,(d\sigma'_{ij} - d\sigma_{ij}) \equiv (d\sigma'_{ij}\, d\varepsilon'_{ij} - d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}) - \\ - [d\sigma'_{ij}\,(d\varepsilon'_{ij} - d\varepsilon_{ij}) + d\varepsilon_{ij}\,(d\sigma_{ij} - d\sigma'_{ij})].$$

Les raisonnements, analogues à ceux exposés dans la division précédente, montrent que la quantité à l'intérieur du crochet est non négative ; elle se réduit à zéro si $d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij}$. Mais alors, si l'on néglige ce cas de coïncidence des accroissements, on a l'inégalité (désignons le second membre de cette inégalité par $\mathscr{E}\,(d\sigma'_{ij})$):

$$-\frac{1}{2}\int d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dV + \int dX_{ni}\, du_i\, dS_u > \\ > -\frac{1}{2}\int d\sigma'_{ij}\, d\varepsilon'_{ij}\, dV + \int dX'_{ni}\, du_i\, dS_u. \qquad (69.7)$$

Les accroissements réels des contraintes confèrent un maximum absolu à l'énergie des accroissements $\mathscr{E}\,(d\sigma'_{ij})$ par rapport à tous les accroissements statiquement possibles des contraintes.

Les principes d'extremum de la théorie de l'écoulement plastique ont été formulés par P. Hodge et W. Prager, H. Greenberg [151]. On trouve diverses généralisations dans les ouvrages de R. Hill [47], Y. Yamamoto [194], etc. (cf. aperçu [77]).

Exercices du chapitre VIII

1. Déduire les équations des principes du minimum de l'énergie totale et du travail supplémentaire (paragraphe 67) en présence de forces de volume.

2. Pour un corps à température non uniforme θ, les équations de la théorie des déformations ont la forme

$$\varepsilon_{ij} = (k\sigma + \alpha\theta)\,\delta_{ij} + \psi s_{ij},$$

où α est le coefficient de dilatation linéaire; la relation (12.2) se conserve.

Déduire pour ce cas les équations des principes du minimum de l'énergie totale et du travail supplémentaire.

Montrer que, dans le cas d'un échauffement non iniforme, le problème de la détermination des déplacements u_i se ramène à un problème isothermique « habituel » par adjonction d'une force de volume fictive $-\frac{\alpha}{k}\operatorname{grad}\theta$ aux forces de volume réelles ρX_i et d'une traction normale fictive $\frac{\alpha}{k}\theta$ (sur une partie de surface S_F) aux charges superficielles X_{ni} données.

3. Une plaque à ouvertures circulaires identiques (diamètre d), disposées en échiquier (pas l) est soumise à une traction uniforme dans les directions des x et y. Evaluer la charge statiquement possible p_s (on compose un champ statiquement possible avec des domaines carrés de traction « hydrostatique » et des domaines rectangulaires de traction uniaxiale).

Réponse. $p_s=\left(1-\frac{d}{l}\right)\sigma_s$.

4. Une plaque infinie, affaiblie par une rangée (suivant l'axe des x) d'ouvertures équidistantes (pas l et diamètre d) est soumise à une traction dans la direction des y. Indiquer la frontière inférieure la plus simple de la charge limite.

Réponse. $p_s=\left(1-\frac{d}{l}\right)\sigma_s$ (p est la contrainte moyenne).

5. Trouver dans le problème précédent la frontière supérieure en tenant compte du fait qu'une striction se forme (suivant l'axe des x) dans la section affaiblie.

Réponse. $p_k=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{d}{l}\right)\sigma_s$.

6. Trouver dans ce problème la frontière supérieure en appliquant la solution du paragraphe 56 (cf. fig. 173).

7. Obtenir à partir de la formule (66.27) la frontière supérieure de la charge limite pour une plaque circulaire appuyée en charnière et chargée au centre.

Réponse. $P_k=2\pi M_s$.

8. Une plaque circulaire de rayon b appuyée en charnière est chargée excentriquement (à la distance a du centre) par une force concentrée. Trouver la frontière supérieure en admettant pour la flèche la forme d'une surface conique dont le sommet est au point d'application de la charge.

Réponse. $P_k=2\pi M_s\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

9. Trouver le travail supplémentaire pour la poutre en flexion si la contrainte et la déformation sont liées par une fonction puissance (cf. problème 3, chapitre III).

Réponse. $\widetilde{R}=\int\limits_0^l\frac{|M|^{1+\frac{1}{\mu}}}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)D}\,dx$.

10. Pour les mêmes conditions, déduire l'équation variationnelle de la flèche d'une poutre.

Réponse.

$$\delta\int\limits_0^l\left[\frac{D^{\mu}}{1+\mu}\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right|^{1+\mu}-q(x)\,v\right]dx=0.$$

CHAPITRE IX

THÉORIE DE L'ADAPTATION

70. COMPORTEMENT DES CORPS ÉLASTO-PLASTIQUES AUX CHARGES ALTERNÉES

1. Charges alternées. Dans les problèmes de l'écoulement plastique envisagés plus haut, on a supposé que le chargement n'était réalisé qu'une seule fois. Cependant, les machines et les constructions éprouvent souvent l'effet de charges et températures alternées. Si la déformation du corps est élastique, sa résistance aux charges alternées est déterminée par les caractéristiques de fatigue du matériau ; la rupture ne se produit qu'après un grand nombre de cycles. Mais si le corps éprouve une déformation élasto-plastique, alors à des charges inférieures à la charge limite on risque d'avoir un état critique pour un nombre de cycles relativement peu élevé. On devra alors distinguer deux cas.

1. La rupture se produit sous l'effet d'une suite de déformations plastiques de signes alternés (par exemple, une compression plastique a lieu après une extension plastique et ainsi de suite). C'est ce que l'on appelle la *plasticité à signe alterné* (*fatigue plastique* ou *à petit cycle*).

2. La déformation plastique ne change pas de signe, mais grandit à chaque cycle (*déformation progressive*, *rupture progressive*). Cela conduit à une accumulation dangereuse des déformations plastiques.

2. Plasticité à signe alterné. En guise d'exemple de plasticité à signe alterné, nous envisageons l'état élasto-plastique d'une sphère creuse sollicitée par une pression intérieure (paragraphe 25) sous la condition que cette dernière varie suivant le schéma $0 \to p \to \to 0 \to p \ldots$ Lors de la première mise en charge $0 \to p$, dans la sphère apparaît une zone de déformation plastique ($a \leqslant r \leqslant c$). Après la décharge $p \to 0$, les contraintes résiduelles sont décrites par les formules (25.12). La courbe de la contrainte résiduelle σ_φ^0 est montrée dans la partie gauche de la figure 41 et sur la figure 218, *a*. Les contraintes résiduelles sont supposées insuffisamment grandes pour pouvoir causer une déformation plastique secondaire ; conformé-

ment à (25.13), cela aura lieu pour $\tilde{p} \leqslant 2\tilde{p}_0$, alors

$$p \leqslant \frac{4}{3}\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)\sigma_s \equiv p_1. \tag{70.1}$$

A cette condition, l'intervalle de variation de l'intensité des contraintes tangentielles (selon la solution du problème élastique)

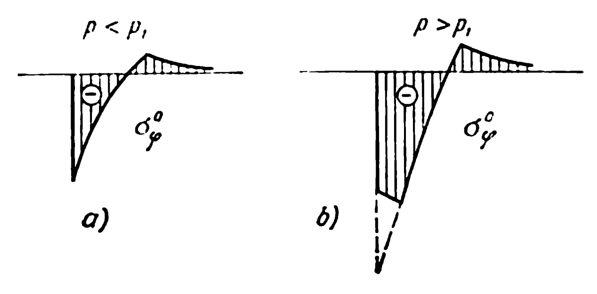


Fig. 218

n'excède nulle part dans la sphère le double de la limite d'écoulement $2\tau_s$.

En outre, on ne devra pas dépasser la charge limite $p_* = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a}$, c.-à-d. $p_1 < p_*$. Il est aisé de voir que, lors de la décharge, les déformations plastiques secondaires ne peuvent être engendrées que dans une sphère à parois suffisamment épaisses $\left(\text{pour } \frac{b}{a} > 1{,}7\right)$.

Si la condition (70.1) est satisfaite, la nouvelle mise en charge ne se traduira que par des déformations élastiques dues au champ de contraintes résiduelles de signe favorable (« inverse ») qui apparaît dans la sphère. Celle-ci est en quelque sorte écrouie par comparaison avec sa première mise en charge. Comme nous l'avons déjà noté, ce phénomène est appelé *écrouissage* ou *autofrettage* de la construction.

Ces dernières années, on utilise plus souvent un autre terme — « adaptation » (shakedown), introduit par W. Prager. On dit que la construction s'adapte aux cycles de charges grâce à l'apparition d'un champ favorable de contraintes résiduelles. L'inégalité (70.1) peut être considérée comme la condition d'adaptation de la sphère; cette inégalité définit le *domaine d'adaptation* (domaine des changements admissibles de charges).

Si $p > p_1$, la décharge se produisant dans une zone quelconque, contiguë à la cavité (fig. 218, *b*), provoquera une déformation plastique au signe contraire à celui de la déformation plastique lors de la mise en charge. Si maintenant la sphère est chargée de nouveau

avec la même pression $p > p_1$, on aura dans cette zone une déformation plastique du signe initial. Après un petit nombre de tels cycles, une rupture intervient dans cette zone par suite de la « fatigue plastique » (rappelons l'exemple, connu universellement, de la rupture rapide d'un fil sollicité par une flexion plastique à signe alterné). Ainsi, les conditions de sécurité exigent que les sollicitations ne quittent pas le domaine de l'adaptation.

Les raisonnements exposés sont étendus aux corps de forme arbitraire, ce qui conduit à la *condition suffisante* de l'apparition d'une plasticité à signe alterné: cette dernière aura lieu si, en un point quelconque d'un corps parfaitement élastique correspondant, l'intervalle du changement d'intensité des contraintes tangentielles dépasse le double de la limite d'écoulement $2\tau_s$ (d'après la condition de plasticité de von Mises).

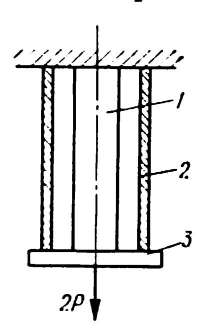


Fig. 219

3. Déformation progressive. Pour illustrer la possibilité de la croissance unilatérale des déformations plastiques, nous envisagerons le modèle simple qui est montré sur la figure 219. La barre ronde *1* et le tube *2* dans lequel elle est introduite sont liés par une plaque rigide *3* à laquelle est appliqué un effort constant $2P$. Soient F les aires de section égales de la barre et du tube. La température de la barre est constante (mettons égale à zéro) et celle du tube varie périodiquement (« cycles thermiques ») de 0 à $\theta°$ ($0 \rightarrow \theta \rightarrow 0 \rightarrow \rightarrow \theta \rightarrow \ldots$). Le module d'élasticité est considéré comme invariable, et la limite d'écoulement est égale à σ_{s0} à 0° et à $\sigma_{s\theta}$ à $\theta°$; α est le coefficient de dilatation linéaire. Introduisons les notations $p = P/F$, $q = \frac{E\alpha\theta}{2}$.

D'après la condition d'équilibre, on a:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2p, \tag{70.2}$$

où σ_1, σ_2 sont les contraintes dans la barre et dans le tube respectivement. Le modèle se trouve dans un état ou dans un autre en fonction des relations entre les grandeurs p, q et les limites d'écoulement σ_{s0} et $\sigma_{s\theta}$. Nous n'envisagerons que quelques variantes de tous les états possibles.

Etat élastique. Lors du chauffage les contraintes dans la barre et le tube sont égales à $\sigma_1 = p + q$, $\sigma_2 = p - q$. Pour qu'il n'y ait pas de déformations plastiques, il faut que

$$p + q < \sigma_{s0}, \quad p - q > -\sigma_{s\theta}.$$

Adaptation. La barre reste toujours élastique et le tube éprouve une déformation plastique lors du chauffage. A la température θ,

la contrainte dans le tube est alors égale à $\sigma_2' = -\sigma_{s\theta}$; quant à la contrainte dans la barre, elle doit être inférieure à la limite d'écoulement, c.-à-d.

$$\sigma_1' = 2p + \sigma_{s\theta} < \sigma_{s0}. \tag{70.3}$$

Après le refroidissement on aura $\sigma_2'' = -\sigma_{s0} + q$, $\sigma_1'' = 2p + \sigma_{s\theta} - q$. Pour l'adaptation, ces contraintes ne devront pas dépasser la limite d'écoulement σ_{s0}, c.-à-d.

$$-\sigma_{s0} + q < \sigma_{s0}, \quad |2p + \sigma_{s\theta} - q| < \sigma_{s0}. \tag{70.4}$$

Les inégalités (70.3) et (70.4) caractérisent les conditions d'adaptation.

Déformation progressive. Admettons que, à chaque cycle, la barre éprouve une déformation plastique à l'échauffement et le tube — au refroidissement. Comme il est aisé de le voir, la barre coule alors pour une dilatation thermique du tube en cours (c.-à-d. que la barre « accumule » la déformation plastique). Au refroidissement le tube coule pour une contrainte σ_{s0} tout en gardant une longueur constante (par suite de l'invariabilité de la longueur de la barre). Cette image se répète à chaque cycle, avec, en conséquence, une croissance générale de l'allongement plastique du système.

A l'échauffement, la contrainte est égale à σ_{s0} dans la barre et à $2p - \sigma_{s0}$ dans le tube, et

$$2p - \sigma_{s0}| < \sigma_{s0}. \tag{70.5}$$

Au refroidissement, la contrainte est égale à σ_{s0} dans le tube et à $2p - \sigma_{s0}$ dans la barre. Cherchons les conditions pour lesquelles ce régime soit réalisable. Lors de la décharge *élastique* (refroidissement), la contrainte dans le tube est égale à $2p - \sigma_{s0} + q$ et ne doit pas être inférieure à σ_{s0}, par conséquent,

$$q > 2\sigma_{s0} - 2p. \tag{70.6}$$

La déformation totale augmente à chaque cycle de la valeur

$$\varepsilon = \alpha\theta + \frac{14p}{E} - \frac{2\sigma_{s0}}{E}$$

et peut atteindre des valeurs inadmissibles avec l'augmentation du nombre de cycles.

4. Sur l'influence de l'écrouissage, de l'effet de Bauschinger et du fluage. Pour les corps réels, les conditions d'adaptation dépendent de l'augmentation de la limite élastique lors de la déformation plastique (écrouissage) et de son abaissement lors du chargement dans le sens inverse (effet de Bauschinger). On peut tenir compte de ces influences, bien que cela complique notablement l'analyse. De même, on peut tenir compte des changements des paramètres mécaniques lors des cycles de température. Si le cycle est suffisamment

long, l'adaptation dépend sensiblement du fluage qui peut modifier considérablement le champ des contraintes résiduelles et, de ce fait, limiter parfois le domaine de l'adaptation.

71. THÉORÈMES DE L'ADAPTATION DES CORPS ÉLASTO-PLASTIQUES

Il découle des exemples exposés dans le paragraphe précédent qu'une analyse de l'équilibre élasto-plastique du corps est nécessaire pour éclaircir les conditions d'adaptation. Cependant, une telle analyse n'est possible que pour les problèmes très simples.

Les théorèmes de l'adaptation surmontent cette difficulté en permettant de trouver les frontières inférieure et supérieure du domaine de l'adaptation. L'analyse de l'état élasto-plastique devient alors inutile et il ne reste qu'à appliquer en détail la solution du problème élastique approprié, ce qui est, bien entendu, beaucoup plus simple.

1. Théorème statique de l'adaptation (théorème de Mellan). Considérons un corps élasto-plastique parfait sollicité par un système de charges variant lentement avec le temps dans les limites données. A cette condition on peut négliger les effets dynamiques. Désignons par σ_{ij}^{*}, ε_{ij}^{*} les valeurs instantanées des contraintes et des déformations dans *le corps élastique parfait* correspondant (pour des valeurs instantanées des charges, c.-à-d. en un point quelconque du programme de chargement), par σ_{ij}, ε_{ij} les valeurs instantanées des contraintes et des déformations dans *l'état élasto-plastique réel du corps.* Soient σ_{ij}^{0}, ε_{ij}^{0} les contraintes et les déformations résiduelles dans le corps, définies par les différences

$$\sigma_{ij}^{0}=\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{*}, \tag{71.1}$$

$$\varepsilon_{ij}^{0}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{*}, \tag{71.2}$$

et ε_{ij}^{0e} sont les déformations élastiques correspondant aux contraintes résiduelles. Les sollicitations étant alternées, les contraintes et déformations énumérées sont des fonctions du temps variant lentement. Notons aussi que les déformations ε_{ij}^{*}, ε_{ij} sont *cinématiquement possibles*, c.-à-d. qu'elles satisfont aux conditions de compatibilité, tandis que les déplacements correspondants satisfont aux conditions aux limites cinématiques prescrites.

Les déformations réelles ε_{ij} comprennent des composantes élastiques et plastiques

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{p}. \tag{71.3}$$

Par conséquent,

$$\varepsilon_{ij}^{0}=\varepsilon_{ij}^{p}+\varepsilon_{ij}^{0e}, \tag{71.4}$$

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{0e}+\varepsilon_{ij}^{*}+\varepsilon_{ij}^{p}. \tag{71.5}$$

Admettons maintenant que l'on ait trouvé un champ quelconque des contraintes résiduelles fictives $\bar{\sigma}_{ij}$ *indépendant du temps.* Par $\bar{\sigma}_{ij}$ on entend toute solution non triviale des équations différentielles homogènes d'équilibre (64.2) satisfaisant aux conditions *de nullité* aux limites sur un élément de surface du corps S_F. Désignons par $\bar{\varepsilon}_{ij}$ les composantes de la déformation répondant *d'après la loi de Hooke* aux contraintes fictives $\bar{\sigma}_{ij}$. Notons que $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ne sont pas en général des déformations cinématiquement possibles.

Nous conviendrons d'appeler champ de *sécurité* le champ de contraintes

$$\bar{\sigma}_{ij}+\sigma^{*}_{ij}\equiv\sigma^{s}_{ij}$$

si, pour tous changements de sollicitations dans les limites données, la condition d'écoulement n'est pas atteinte, c.-à-d. si (f étant la fonction d'écoulement, cf. paragraphe 16)

$$f(\sigma^{s}_{ij})<K. \tag{71.6}$$

Nous conviendrons d'appeler champ *admissible* le champ de contraintes

$$\bar{\sigma}_{ij}+\sigma^{*}_{ij}\equiv\sigma^{a}_{ij}$$

si l'état de contrainte peut atteindre la surface d'écoulement, c.-à-d. si

$$f(\sigma^{a}_{ij})\leqslant K. \tag{71.7}$$

Théorème de Mellan. *L'adaptation est faite si l'on peut trouver un champ de contraintes résiduelles fictives $\bar{\sigma}_{ij}$, indépendant du temps, tel que, pour toutes variations de la charge dans les limites données, la somme de ce champ et du champ de contraintes σ^{*}_{ij} dans un corps élastique parfait satisfait à la condition de sécurité* (condition suffisante).

L'adaptation est impossible s'il n'existe aucun champ de contraintes résiduelles $\bar{\sigma}_{ij}$, indépendant du temps, tel que la somme $\bar{\sigma}_{ij}+\sigma^{*}_{ij}$ soit admissible (condition nécessaire).

La condition nécessaire est évidente: l'adaptation ne peut pas être en principe réalisée s'il n'existe aucune distribution des contraintes résiduelles telle que $f(\sigma^{a}_{ij})\leqslant K$.

Admettons maintenant que le champ approprié de contraintes résiduelles $\bar{\sigma}_{ij}$ existe. Montrons que dans ce cas l'adaptation est faite.

Examinons l'énergie élastique fictive $\tilde{\Pi}$ des différences des contraintes $\sigma^{0}_{ij}-\bar{\sigma}_{ij}$:

$$\tilde{\Pi}=\frac{1}{2}\int(\sigma^{0}_{ij}-\bar{\sigma}_{ij})(\varepsilon^{0e}_{ij}-\bar{\varepsilon}_{ij})\,dV.$$

Les différences des contraintes $\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}$ sont liées aux différences des déformations $\varepsilon^{0e}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}$ par des relations homogènes linéaires de la loi de Hooke. La dérivée de l'énergie $\tilde{\Pi}$ par rapport au temps est donc égale à

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \frac{d}{dt} (\varepsilon^{0e}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij})\, dV.$$

Mais, d'après la condition, les contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ et les déformations $\bar{\varepsilon}_{ij}$ sont indépendantes du temps, par conséquent,

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})\, \xi^{0e}_{ij} dV.$$

Conformément à (71.5), on a:

$$\xi^{0e}_{ij} = \xi_{ij} - \xi^p_{ij} - \xi^*_{ij}. \tag{71.8}$$

Il y aura alors

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})(\xi_{ij} - \xi^p_{ij} - \xi^*_{ij})\, dV.$$

Remarquons maintenant que les différences des contraintes $\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}$ satisfont aux conditions d'équilibre lorsque les forces extérieures sont nulles et les vitesses de déformation $\xi_{ij} - \xi^*_{ij}$ sont cinématiquement possibles. La puissance des forces intérieures est égale à celle des forces extérieures correspondantes; ces dernières étant nulles sur S_F et $v_i - v^*_i = 0$ sur S_u, on a alors:

$$\int (\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})(\xi_{ij} - \xi^*_{ij})\, dV = 0.$$

On peut établir aussi la même relation par transformation formelle de l'intégrale de volume en intégrale de surface (cf. paragraphe 64). Ainsi,

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = -\int (\sigma^0_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})\, \xi^p_{ij} dV.$$

Cette équation peut être récrite au moyen de la relation (71.1) sous une autre forme:

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = -\int (\sigma_{ij} - \sigma^s_{ij})\, \xi^p_{ij}\, dV.$$

Comme le vecteur vitesse de la déformation plastique ξ^p_{ij} est dirigé suivant la normale à la surface d'écoulement convexe Σ, le vecteur σ_{ij} atteint la surface d'écoulement et le vecteur σ^s_{ij}, qui est un vecteur de sécurité, se trouve à l'intérieur de Σ (cf. fig. 199, *b* où au lieu de σ'_{ij} il y aura σ^s_{ij}), on est en présence du principe local du maximum:

$$(\sigma_{ij} - \sigma^s_{ij})\, \xi^p_{ij} > 0. \tag{71.9}$$

Ainsi, $\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} < 0$ tant que $\xi_{ij}^p \neq 0$. L'énergie élastique $\tilde{\Pi}$ étant non négative, l'écoulement plastique s'arrêtera à un certain moment $\left(\text{c.-à-d. } \xi_{ij}^p = 0, \frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = 0\right)$. Par la suite, les contraintes résiduelles ne changeront plus dans le temps et le corps n'éprouvera que des déformations élastiques lors de la variation des sollicitations.

En réalité, la construction s'adaptera à un certain champ de contraintes résiduelles dépendant du programme de chargement.

Il est rationnel de choisir le champ des contraintes résiduelles $\bar{\sigma}_{ij}$ de sorte que le domaine des changements admissibles des sollicitations soit maximal.

Dans ce sens l'application du théorème de Mellan conduit aux *frontières inférieures* pour les limites de changement des charges. La réalisation pratique de ce schéma dans des problèmes concrets est liée à certaines difficultés surtout dans les cas où les charges dépendent de plusieurs paramètres. En général, la recherche du champ des contraintes résiduelles $\bar{\sigma}_{ij}$ optimal, qui étend au maximum le domaine de l'adaptation, est un problème de programmation mathématique. Dans les treillis et les systèmes triangulaires, les conditions de sécurité sont généralement des inégalités linéaires, ce qui permet d'exploiter avantageusement les méthodes bien développées de la programmation linéaire. Notons aussi que, pour définir les charges admissibles, on ne doit considérer que les sollicitations inférieures aux valeurs limites.

Un procédé de construction simple pour les solutions approchées, basé sur le théorème de Mellan, est exposé dans le paragraphe suivant.

Le théorème statique de l'adaptation a été démontré pour le cas général par Mellan en 1938.

2. Théorème cinématique de l'adaptation (théorème de Koiter). Soient des déplacements nuls sur un élément de surface du corps S_u et des charges variant lentement dans les limites données sur le reste de la surface S_F.

Prenons un champ de vitesses arbitraire quelconque des déformations plastiques $\xi_{ij0}^p = \xi_{ij0}^p(t)$. Nous l'appellerons *admissible* si les accroissements des déformations plastiques

$$\Delta\varepsilon_{ij0}^p = \int_0^\tau \xi_{ij0}^p \, dt$$

forment, dans un intervalle de temps τ quelconque, un champ cinématiquement admissible (autrement dit, $\Delta\varepsilon_{ij0}^p$ satisfont aux conditions de compatibilité et le champ de glissements correspondant satisfait aux conditions de nullité sur S_u). Au champ de vitesses ξ_{ij0}^p correspondent le champ de contraintes σ_{ij0} (d'après la loi asso-

ciative) et l'unique champ de vitesses des contraintes résiduelles « accompagnantes » $\dot{\sigma}^0_{ij0}$, que l'on peut définir de la manière suivante. Il découle de (71.3) et (71.2):

$$\xi^0_{ij} = \xi^e_{ij} - \xi^*_{ij} + \xi^p_{ij}.$$

Remplaçant ici les composantes ξ^p_{ij} par les composantes ξ^p_{ij0}, on aura alors:

$$\xi^0_{ij0} = \xi^e_{ij} - \xi^*_{ij} + \xi^p_{ij0}.$$

Les vitesses des déformations ξ^e_{ij} et ξ^*_{ij} sont liées par la loi de Hooke aux vitesses des contraintes $\dot{\sigma}_{ij}$ et $\dot{\sigma}^*_{ij}$, par conséquent, c'est par la même loi que sont liées également les différences $\xi^e_{ij} - \xi^*_{ij}$ et $\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^*_{ij} \equiv \dot{\sigma}^0_{ij0}$. De la sorte,

$$\xi^0_{ij0} = c_{ijhk}\dot{\sigma}^0_{hk0} + \xi^p_{ij0}, \tag{71.10}$$

où c_{ijhk} sont des constantes élastiques. Considérant l'équilibre du corps quand les charges sont nulles sur S_F, les déplacements sont nuls sur S_u et les relations linéaires non homogènes (71.10) sont vérifiées, on trouvera la distribution unique des vitesses des contraintes résiduelles « accompagnantes » $\dot{\sigma}^0_{ij0}$, des vitesses des déformations résiduelles ξ^0_{ij0} et des vitesses résiduelles v_{i0}. ξ^p_{ij0} joueront alors le rôle de déformations données complémentaires (« superposées »). Les premiers termes du second membre de (71.10) sont les vitesses ξ^e_{ij0} de la déformation élastique dues aux vitesses des contraintes résiduelles $\dot{\sigma}^0_{ij0}$.

Les accroissements des déplacements qui se produisent durant l'intervalle τ sont égaux à

$$\Delta u_{i0} = \int_0^\tau v_{i0}\, dt.$$

Par hypothèse, les accroissements des déformations plastiques $\Delta\varepsilon^p_{ij0}$ au cours du temps τ sont cinématiquement possibles, c'est pourquoi il en est de même des accroissements des déformations élastiques associées $\Delta\varepsilon^e_{ij0}$. A la fin du cycle $t = \tau$ les contraintes résiduelles σ^0_{ij0} retournent à leurs valeurs initiales pour $t = 0$. c.-à-d.

$$\sigma^0_{ij0}\big|_{t=0} = \sigma^0_{ij0}\big|_{t=\tau}. \tag{71.11}$$

Alors

$$\int_0^\tau \xi^e_{ij0}\, dt = 0. \tag{71.12}$$

Théorème de Koiter. *Il n'y a pas d'adaptation si l'on peut trouver un cycle admissible des vitesses de déformation plastique $\dot{\xi}^p_{ij0}$ et un programme quelconque de variation des charges dans les limites données, avec*

$$\int_0^\tau dt \int X_{ni} v_{i0}\, dS_F > \int_0^\tau dt \int \dot{A}(\dot{\xi}^p_{ij0})\, dV, \qquad (71.13)$$

où $\dot{A}(\dot{\xi}^p_{ij0}) = \sigma_{ij0}\dot{\xi}^p_{ij0}$ est la puissance de la déformation plastique pour les vitesses admissibles $\dot{\xi}^p_{ij0}$.

Inversement, l'adaptation a lieu si, pour tous les cycles admissibles des vitesses de déformation plastique et pour toutes les sollicitations (dans les limites données), on peut trouver un nombre $\varkappa > 1$ tel que

$$\varkappa \int_0^\tau dt \int X_{ni} v_{i0}\, dS_F \leqslant \int_0^\tau dt \int \dot{A}(\dot{\xi}^p_{ij0})\, dV. \qquad (71.14)$$

La première partie du théorème est démontrée en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe un cycle admissible pour lequel est vraie l'inégalité (71.13) et que l'adaptation soit faite en même temps. Alors, d'après le théorème de Mellan, il existe un champ de contraintes résiduelles $\bar{\sigma}_{ij}$ qui ne dépend pas du temps et dont la somme avec le champ élastique σ^*_{ij} forme un champ de contraintes admissible σ^a_{ij}. D'après le principe des travaux virtuels on a :

$$\int X_{ni} v_{i0}\, dS_F = \int \sigma^a_{ij}\dot{\xi}^0_{ij0}\, dV. \qquad (71.15)$$

Utilisant la définition de σ^a_{ij} et la formule (71.10), on obtient aisément :

$$\int \sigma^a_{ij}\dot{\xi}^0_{ij0}\, dV = \int \sigma^*_{ij} c_{ijhk}\dot{\sigma}^0_{hk0}\, dV + \int \bar{\sigma}_{ij} c_{ijhk}\dot{\sigma}^0_{hk0}\, dV + \int \sigma^a_{ij}\dot{\xi}^p_{ij0}\, dV.$$

Etant donné que d'après la loi de Hooke $\varepsilon^*_{hk} = c_{ijhk}\sigma^*_{ij}$, on a alors :

$$\int \sigma^*_{ij} c_{ijhk}\dot{\sigma}^0_{hk0}\, dV = \int \dot{\sigma}^0_{hk0}\varepsilon^*_{hk}\, dV = 0,$$

car les contraintes σ^0_{hk0} correspondent aux forces extérieures nulles. Intégrons l'équation (71.15) par rapport au temps de 0 à τ. Les contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ étant indépendantes du temps, on aura alors par suite de (71.12) :

$$\int_0^\tau dt \int \bar{\sigma}_{ij} c_{ijhk}\dot{\sigma}^0_{hk0}\, dV = \int \bar{\sigma}_{ij}\, dV \int \dot{\xi}^e_{ij0}\, dt = 0.$$

Donc,

$$\int_0^\tau dt \int X_{ni} v_{i0}\, dS_F = \int_0^\tau dt \int \sigma^a_{ij} \xi^p_{ij0}\, dV,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité initiale (71.13), car $(\sigma_{ij0} - \sigma^a_{ij})\, \xi^p_{ij0} \geqslant 0$.

La démonstration de la seconde partie du théorème de Koiter est bien plus complexe et elle n'est pas exposée dans cet ouvrage (cf. [77]).

Choisissant le cycle admissible des vitesses de la déformation plastique et écrivant (71.13) avec le signe d'égalité, on peut se servir du théorème de Koiter pour la recherche des *frontières supérieures de l'adaptation*. L'application du théorème de Koiter est liée à des difficultés beaucoup plus importantes que l'application du théorème de Mellan (sauf les systèmes les plus simples — les treillis et les systèmes triangulaires où on peut utiliser les méthodes de la programmation linéaire). Citons encore le procédé inverse, proposé par V. Rosenblum, qui peut être utile et le cycle des travaux de D. Gokhfeld [94].

3. Adaptation des corps inégalement chauffés. Le cas de l'action conjuguée des charges et du champ de température $\theta = \theta\,(x_1, x_2, x_3, t)$, variant dans les limites données, présente un grand intérêt pratique.

Le théorème de Mellan est facilement généralisé pour les corps inégalement chauffés. L'énoncé du théorème reste le même, mais par σ^*_{ij} on entend maintenant le *champ des contraintes thermoélastiques dans un corps élastique parfait* [125].

Le théorème de Koiter s'étend aussi aux corps inégalement chauffés [94, 125], mais l'énoncé du théorème est quelque peu modifié: il est nécessaire d'introduire dans le premier membre de l'inégalité (71.13) le terme

$$3\alpha \int_0^\tau dt \int \theta \dot{\sigma}^0_0\, dV,$$

où α est le coefficient thermique de dilatation linéaire, $\dot{\sigma}^0_0$ la vitesse de la pression moyenne pour le champ des contraintes résiduelles.

4. Remarque portant sur la liaison existant entre les théorèmes de l'adaptation et les théorèmes sur la charge limite. W. Koiter a porté l'attention sur le fait que les théorèmes sur la charge limite (paragraphe 65) sont le corollaire des théorèmes de l'adaptation si l'on admet que les limites données de variation des charges se confondent.

72. MÉTHODE DE SOLUTION APPROCHÉE. EXEMPLE

Comme nous l'avons déjà noté, pour trouver le domaine de l'adaptation à l'aide du théorème de Mellan, il faut considérer les champs admissibles de contraintes résiduelles et disposer en même temps de la solution du problème élastique correspondant pour les charges variant arbitrairement dans les limites prescrites. L'application de ce schéma se heurte à certaines difficultés (surtout dans les cas où il existe plusieurs charges indépendantes). Pour l'analyse de l'adaptation des treillis et systèmes triangulaires simples pour les systèmes de charges à un ou à deux paramètres, on emploie d'habitude des procédés géométriques pour construire les domaines des états admissibles; dans des cas plus compliqués, on peut utiliser les méthodes de la programmation linéaire.

Ci-après nous exposerons le procédé approché commode développé par V. Rosenblum [124] pour la recherche du domaine de l'adaptation, appliqué aux corps de forme arbitraire pour des systèmes de charges à un ou à deux paramètres.

1. Méthode de solution approchée. En se basant sur le théorème de Mellan, considérons le cas où *les charges sont proportionnelles à un paramètre p*; la solution du problème élastique correspondant prend alors la forme

$$\sigma^*_{ij} = p\sigma'_{ij},$$

où σ'_{ij} ne dépendent que des coordonnées. Choisissons ensuite un champ de contraintes résiduelles quelconque

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda\bar{\sigma}'_{ij},$$

où $\bar{\sigma}'_{ij}$ ne dépendent que des coordonnées et λ est un facteur indéterminé. Conformément au théorème de Mellan, il convient de construire le champ

$$\sigma_{ij} = p\sigma'_{ij} + \lambda\bar{\sigma}'_{ij}, \tag{72.1}$$

qui est un champ de sécurité, c.-à-d.

$$f(\sigma_{ij}) < K. \tag{72.2}$$

Il faut trouver la valeur optimale du facteur λ pour laquelle l'intervalle des variations admissibles du coefficient p soit maximal.

Considérons le plan des variables p, λ. A chaque point du plan correspond un état de contrainte quelconque (72.1). Sur ce plan, la condition d'écoulement

$$f(p\sigma'_{ij} + \lambda\bar{\sigma}'_{ij}) = K \tag{72.3}$$

définit la famille des courbes à trois paramètres (en pointillé sur la figure 220) ne passant pas par l'origine des coordonnées $p = 0$, $\lambda = 0$ (car $K > 0$) et délimitant de la sorte un certain domaine de valeurs admissibles. La frontière de ce domaine C est formée soit

par l'enveloppe de la famille (72.3), soit par certaines courbes de la famille les plus proches de l'origine des coordonnées. Si la frontière C est construite, il est aisé de définir l'intervalle admissible des variations du paramètre de la charge p. Soit, par exemple, $p > 0$;

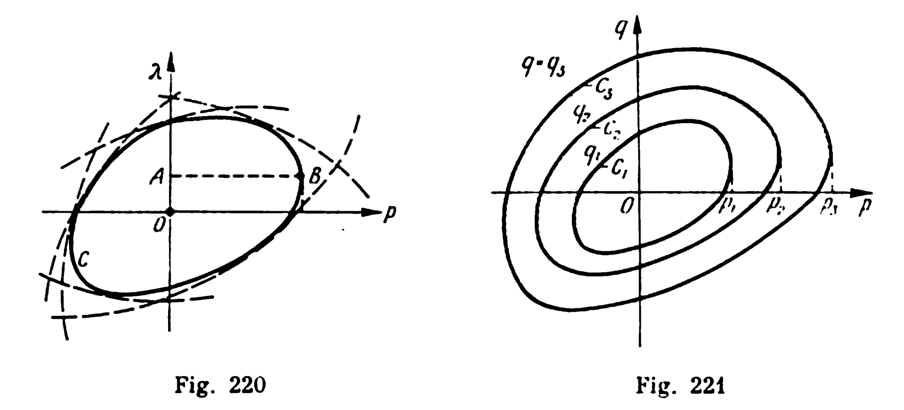


Fig. 220 Fig. 221

la plus grande déviation possible doit être alors inférieure à l'abscisse maximale B. La valeur optimale de λ est égale au segment OA.

Pour un choix heureux du champ de contraintes résiduelles, on peut obtenir une bonne approximation.

Il est facile d'étendre ce procédé aux systèmes de sollicitations à deux paramètres pour lesquels

$$\sigma^*_{ij} = p\sigma'_{ij} + q\sigma''_{ij}, \tag{72.4}$$

et au lieu de (72.3) on aura:

$$f(p\sigma'_{ij} + q\sigma''_{ij} + \lambda\bar{\sigma}'_{ij}) = K. \tag{72.5}$$

Posons une série de valeurs $q = q_1, q_2, q_3, \ldots$, et traçons, comme ci-dessus, des courbes des états admissibles $C_1, C_2, C_3, \ldots$ (fig. 221) sur chacune desquelles notons la valeur maximale du paramètre p ($p = p_1, p_2, p_3, \ldots$). Sur le plan des paramètres p, q, on construit une courbe passant par ces points (fig. 222) et délimitant le domaine des charges admissibles.

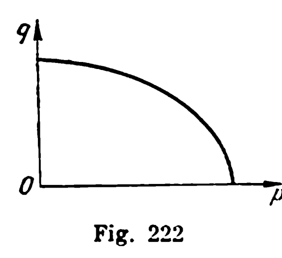


Fig. 222

2. Exemple. Torsion et traction simultanées d'une barre. Trouvons le domaine de l'adaptation pour une barre ronde de rayon a, sollicitée par un effort de traction P et un moment de torsion M. En coordonnées cylindriques r, φ, z, les composantes du tenseur des contraintes σ_z, $\tau_{\varphi z}$ ne sont pas

nulles. Introduisons les grandeurs sans dimensions:

$$\rho = r/a, \quad \tau = \tau_{\varphi z}/\tau_s, \quad \sigma = \sigma_z/\sigma_s, \quad p = \frac{P}{\pi a^2 \sigma_s}, \quad q = \frac{2M}{\pi a^3 \tau_s}.$$

La solution élastique s'écrit alors sous la forme

$$\sigma^* = p, \quad \tau^* = q\rho.$$

Choisissons l'état de contrainte résiduelle suivant:

$$\bar{\sigma} = 0, \quad \bar{\tau} = \lambda(1 + c\rho).$$

La constante c est définie à partir de la condition d'égalité à zéro du moment de contraintes $\bar{\tau}$; on calcule aisément que $c = -4/3$.

Le champ sommaire

$$\sigma = p, \quad \tau = q\rho + \lambda\left(1 - \frac{4}{3}\rho\right) \qquad (72.6)$$

doit être un champ de sécurité, c.-à-d. (pour la condition d'écoulement de von Mises)

$$\sigma^2 + \tau^2 < 1. \qquad (72.7)$$

Considérons d'abord le cas de la torsion pure ($p = 0$); il découle alors de la condition d'écoulement:

$$q\rho + \lambda\left(1 - \frac{4}{3}\rho\right) = \pm 1. \qquad (72.8)$$

Sur le plan q, λ (fig. 223), cette équation définit deux faisceaux de droites aux centres $A\left(q = \frac{4}{3}, \lambda = 1\right)$ et $A'\left(q = -\frac{4}{3}, \lambda = -1\right)$. Etant donné que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, ces faisceaux délimitent le parallélogramme des valeurs admissibles $ABA'B'$; les côtés de ce dernier sont obtenus à partir de (72.8) pour $\rho = 0$ et $\rho = 1$.

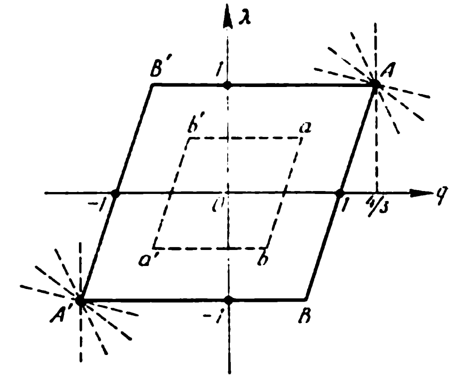


Fig. 223

Examinons certains détails. Notons avant tout que les premières déformations plastiques dans la couche extérieure de la barre apparaissent pour $q = \pm 1$. Si le moment de torsion ne change pas de signe (c.-à-d. si $0 \leqslant q$), l'intervalle admissible maximal de variation de q se caractérise par l'abscisse du point $A\left(q = \frac{4}{3}\right)$. Cette valeur correspond au moment de torsion limite. Si ce moment est

à signe alterné, l'intervalle maximal de variation de q sera défini par la longueur du segment horizontal entre les côtés AB et $A'B'$; il est évident que $q_{max} - q_{min} = 2$ quel que soit λ.

Passons maintenant à l'analyse du cas général où l'effort $p \neq 0$ et varie de manière arbitraire dans les limites $(-p, +p)$. Il résulte alors de la condition d'écoulement:

$$q\rho + \lambda\left(1 - \frac{4}{3}\rho\right) = \pm\sqrt{1-p^2}. \tag{72.9}$$

Cette équation définit sur le plan q, λ le parallélogramme $aba'b'$ (fig. 223) homothétique au parallélogramme $ABA'B'$ et situé à l'intérieur de celui-ci ; il coupe des segments de longueur $\sqrt{1-p^2}$ sur les axes q, λ. Ainsi, l'intervalle des variations admissibles du moment de torsion diminue sous l'effet de la force axiale. Si le moment de torsion ne change pas de signe, on a $q_{max} - q_{min} = \frac{4}{3}\sqrt{1-p^2}$; sinon $q_{max} - q_{min} = 2\sqrt{1-p^2}$.

Exercices du chapitre IX

1. Trouver le domaine de l'adaptation d'un tube circulaire, sollicité par une pression intérieure et un effort longitudinal (selon le procédé approché, paragraphe 72).

2. Trouver le domaine de l'adaptation d'une barre ronde, tordue par le moment M et éprouvant une pression P sur la surface latérale, l'effort axial étant absent.

CHAPITRE X

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE

73. SUR LES CRITÈRES DE LA STABILITÉ

1. Note sur la stabilité des systèmes mécaniques. La stabilité de l'équilibre des systèmes mécaniques dépend de leurs paramètres. Dans certains systèmes mécaniques, parmi ces paramètres il faut citer les sollicitations exercées. Il en est de même des systèmes *élastiques*; les barres minces comprimées, les plaques et les enveloppes perdent la stabilité de l'équilibre pour certaines valeurs des sollicitations de compression.

Supposant que le lecteur connaît les bases de la théorie de la stabilité, nous n'examinerons ici que quelques détails de cette théorie.

Dans la mécanique du solide, les problèmes de la stabilité de l'équilibre sont résolus par l'étude des mouvements du système au voisinage de la position d'équilibre envisagée (*critère dynamique*). L'état d'équilibre d'un système est instable lorsque les petites perturbations provoquent un mouvement divergent au voisinage de cet équilibre; si des oscillations se produisent au voisinage de l'état d'équilibre envisagé, ce dernier est dit stable (stable *en petit*).

La stabilité dépend de la grandeur des perturbations. La stabilité est dite *en grand* lorsque les déviations admissibles sont considérables. La grandeur des déviations est liée à la notion de *degré de stabilité*. Seules les petites perturbations seront envisagées ci-après.

Si le système est conservatif, on peut ne pas considérer ses oscillations; une condition suffisante de la stabilité est fournie par le critère connu de Lagrange-Dirichlet: dans l'état d'équilibre stable l'énergie potentielle du système a le minimum (*critère énergétique*).

2. Stabilité des systèmes élastiques. Il va de soi que le critère dynamique général est vrai aussi lorsque l'on procède à l'étude des problèmes de la stabilité d'équilibre des systèmes élastiques. Cependant, son application y est liée à de grandes difficultés mathématiques, car le mouvement de tels systèmes est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles. L'analyse de la stabilité d'équilibre des corps élastiques est donc entreprise en général à l'aide

d'autres critères plus simples, mais de caractère moins général, de la stabilité de l'équilibre. Examinons-les brièvement.

Le *critère statique de stabilité* consiste en ce qui suit. On considère des états d'équilibre infiniment proches de l'état d'équilibre initial (principal, « trivial »). Outre la forme principale de l'équilibre, une autre forme est possible pour certaines valeurs de la charge. Autrement dit, différentes formes d'équilibre peuvent se réaliser pour la même charge (*point de bifurcation*, *ramifications des formes d'équilibre*). Un tel état peut être considéré comme transitoire entre l'équilibre stable et l'équilibre instable. La charge minimale à laquelle sont possibles différentes formes d'équilibre est dite *critique*. Cette image est montrée schématiquement en ligne pleine sur la figure 224 (exemple de la barre comprimée). En ordonnées on porte la charge P et en abscisses le fléchissement Δ. Lorsque $P < P_{cr}$, la seule forme possible pour une barre régulière en équilibre est la forme rectiligne. Lorsque $P > P_{cr}$ (où P_{cr} est le point de bifurcation), c'est la forme courbée qui répond à un équilibre stable.

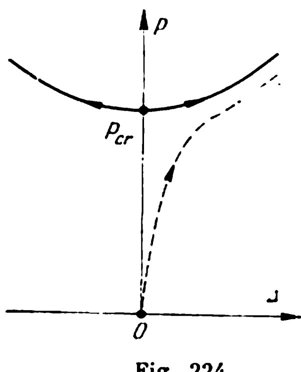


Fig. 224

Pour les systèmes conservatifs, les critères statique et dynamique conduisent aux mêmes valeurs de la charge critique. Du point de vue mathématique, le critère statique mène au problème bien connu des valeurs propres pour les équations différentielles linéaires. Appliquant la méthode statique, Euler a été le premier à étudier la stabilité d'une barre élastique comprimée.

Critère énergétique de stabilité. Si le système élastique considéré est conservatif, la condition suffisante de sa stabilité est la condition du minimum de l'énergie potentielle. Si Π est le potentiel élastique, A le potentiel des forces extérieures, $\mathscr{E} = \Pi - A$ l'énergie totale du système et si le système est en équilibre stable, la seconde variation de l'énergie sera définie positive

$$\delta_1\mathscr{E} > 0.$$

La charge critique est la charge minimale pour laquelle cette propriété est sur le point de disparaître, c.-à-d.

$$\delta_1\mathscr{E} = 0. \qquad (73.1)$$

Le critère énergétique peut être énoncé également sous une forme un peu différente appartenant à S. Timochenko. L'énergie $\mathscr{E} = \Pi - A$ étant minimale dans l'état d'équilibre stable, l'accroissement de l'énergie totale $\delta\mathscr{E} > 0$ ou $\delta\Pi > \delta A$ pour toute déviation petite par rapport à la position d'équilibre. Si pour une

valeur quelconque de la charge l'équilibre cesse d'être stable, on a $\delta\mathscr{E} = 0$, c.-à-d.

$$\delta\Pi = \delta A. \tag{73.2}$$

Soit p le paramètre de la charge, c.-à-d. $\delta A = p\overline{\delta A}$, on a alors:

$$p = \frac{\delta\Pi}{\overline{\delta A}}.$$

La valeur minimale de la charge satisfaisant à cette relation pour des déviations non nulles du système par rapport à la position d'équilibre principale est la charge critique

$$p_{\text{cr}} = \min \frac{\delta\Pi}{\overline{\delta A}}. \tag{73.3}$$

Dans le plan mathématique, nous avons affaire ici à un problème du minimum d'une fonctionnelle quadratique.

Les critères statique et énergétique sont équivalents pour les systèmes conservatifs. Les équations différentielles de stabilité, obtenues en appliquant la méthode statique, sont les équations différentielles d'Euler pour le problème variationnel auquel conduit le critère énergétique.

Il est important, pour le système élastique, que les forces extérieures aient un potentiel, sinon les critères statique et énergétique peuvent conduire à des conclusions erronées (cf. [195]).

Si le système n'est pas conservatif, le seul critère valable est en général le critère dynamique. Le cas de la barre élastique comprimée par une force dirigée suivant la tangente à l'axe de la barre (dite force asservie) est l'exemple le plus simple d'un tel système.

Par la suite, nous supposerons que les forces extérieures ont un potentiel, c.-à-d. que le travail des forces extérieures ne dépend pas du trajet parcouru.

On peut aborder la valeur de la charge critique en suivant les déformations d'un système présentant des *déviations initiales* (défauts initiaux). Par exemple, on peut envisager la compression d'une barre initialement gauchie (ou pour une sollicitation transversale complémentaire). L'accroissement du fléchissement avec l'augmentation de l'effort de compression est montré en pointillé sur la figure 224. Lorsque l'effort s'approche de sa valeur critique P_{cr}, le fléchissement grandit brusquement.

Dans cette position du problème, bien que l'analyse de la stabilité ne soit en fait plus nécessaire, ce procédé a ses défauts. Le comportement du système dépend des déviations initiales qui ne sont pas connues d'avance. En outre, le problème mathématique s'avère plus complexe que pour l'application des critères statique ou énergétique.

3. Stabilité pour les déformations élasto-plastiques. L'expérience montre que les solutions classiques des problèmes de la stabilité

des systèmes élastiques sont souvent peu efficaces. Une des causes majeures de cette divergence sont les propriétés non élastiques des matériaux réels, qui ont pour effet de diminuer nettement la résistance au flambage.

Compte tenu de l'importance pratique du problème (dans la plupart des cas, la disparition de la stabilité dans les constructions modernes se produit au-delà de la limite élastique), les différentes formules empiriques obtenues lors de l'étude expérimentale de la stabilité des barres en compression sont devenues d'un usage très courant. Des procédés théoriques relatifs à l'analyse de la stabilité des constructions travaillant au-delà de la limite élastique ont été développés par la suite.

Le système sollicité par des déformations élasto-plastiques n'est pas conservatif. En conséquence, l'étude de la stabilité de l'équilibre au-delà de la limite élastique doit être basée en général sur l'analyse du mouvement d'un tel système au voisinage de l'état d'équilibre principal lorsque le système en question reçoit certaines perturbations. Cette analyse est extrêmement difficile et ceci pour deux raisons : primo, nous ne disposons pas d'équations sûres de la plasticité pour les déformations cycliques ; secundo, de grosses difficultés mathématiques interviennent même lorsqu'on utilise les équations les plus simples (par exemple les équations de la théorie des déformations ou de la théorie de l'écoulement).

Dans de nombreux cas (mais pas toujours), on peut obtenir la réponse voulue en étudiant la déformation élasto-plastique du système présentant des *déviations initiales*. Cependant, une telle analyse conduit aux problèmes non linéaires et est liée également à de grandes difficultés mathématiques. On part en général d'un critère statique quelconque et l'on cherche la charge pour laquelle sont possibles diverses formes d'équilibre voisines pour telles ou autres conditions supplémentaires. Ces critères, qui sont examinés dans le paragraphe suivant, sont dépourvus de bases théoriques solides ; leur importance est illustrée par l'analyse du comportement des modèles très simples de corps élasto-plastiques et elle est confirmée par des résultats expérimentaux.

74. STABILITÉ D'UNE BARRE EN COMPRESSION. CHARGE À MODULE TANGENTIEL ET CHARGE À MODULE RÉDUIT

1. Stabilité d'une barre élastique. La stabilité de la barre élastique en compression a été étudiée par Euler dans un ouvrage datant de 1757. Nous exposerons brièvement la solution de ce problème basée sur le critère statique en considérant, pour des raisons de simplicité, une barre de section constante et symétrique (fig. 225) ; les axes des x et y seront les axes centraux principaux.

Supposons que pour une valeur quelconque de l'effort de compression P il se produise le flambage de la barre dans le plan de la moindre rigidité Ox; désignons par $u = u(z)$ le déplacement de l'axe de la barre au flambage (fig. 226).

Conformément au critère statique de la stabilité, le flambage se produit dans un état de l'équilibre « indifférente » et a toujours lieu

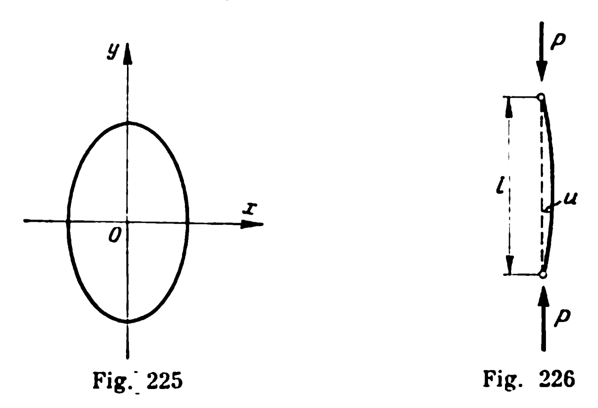


Fig. 225 Fig. 226

pour la même valeur de l'effort axial, c.-à-d. que l'accroissement de l'effort axial est nul au flambage:

$$\delta P = 0. \tag{74.1}$$

La barre gauchit au flambage et subit des déformations supplémentaires infiniment petites $\delta\varepsilon_z$; la barre étant mince, ces déformations supplémentaires obéissent à l'hypothèse des sections planes, c.-à-d.

$$\delta\varepsilon_z = \varepsilon_0 - qx, \tag{74.2}$$

où ε_0 est un allongement axial supplémentaire infiniment petit et q un changement infiniment petit de la courbure. D'après la loi de Hooke les contraintes supplémentaires correspondantes seront

$$\delta\sigma_z = E\delta\varepsilon_z. \tag{74.3}$$

Il est évident que $\delta P = EF\varepsilon_0$, où F est l'aire de la section de la barre; il faut poser $\varepsilon_0 = 0$ en conformité de (74.1).

Le moment fléchissant infiniment petit $-Pu$, qui prend naissance au flambage, est équilibré par le moment des forces intérieures

$$-\int\int \delta\sigma_z x \, dx \, dy = EJq,$$

où J est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe des y. Etant donné que $q = \frac{d^2u}{dz^2}$, il en résulte l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{P}{EJ} u = 0. \tag{74.4}$$

Les conditions aux limites pour une barre reposant à ses deux extrémités sur des appuis simples seront: $u = 0$ pour $z = 0$ et $z = l$. La charge critique correspondante (force critique d'Euler) est égale à

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (74.5)$$

Si l'on introduit le *paramètre de la souplesse*

$$\lambda = \frac{Fl^2}{J} = \left(\frac{l}{\rho}\right)^2,$$

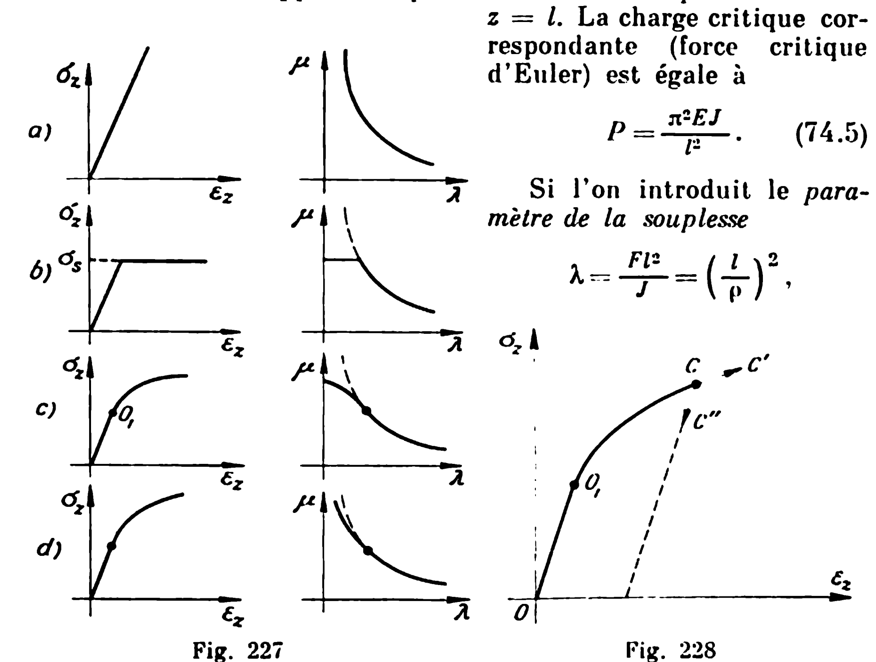


Fig. 227

Fig. 228

où ρ est le rayon d'inertie, et le *paramètre de la charge*

$$\mu = \frac{P}{EF}$$

qui est égal au rapport de la contrainte critique au module d'Young, la formule (74.5) prend la forme

$$\lambda\mu = \pi^2. \qquad (74.6)$$

Sur le plan λ, μ, la frontière de la stabilité sera donc une hyperbole (fig. 227, *a*).

Notons que les résultats ne changeront pas si l'on considère que δP diffère de zéro.

2. Stabilité d'une barre comprimée au-delà de la limite élastique: charge à module tangentiel. Si l'on comprime la barre au-delà de la limite élastique (point *C* sur la figure 228), l'analyse précédente n'est plus valable.

Un procédé simple a été proposé en 1889 par Enguesser pour tenir compte des propriétés plastiques. Admettons que la courbe *OC* est une courbe de la déformation *élastique non linéaire*, autrement dit, considérons la stabilité d'une *barre élastique non linéaire* quelcon-

que. La relation entre les accroissements de la contrainte $\delta\sigma_z$ et de la déformation $\delta\varepsilon_z$ sera

$$\delta\sigma_z = E'\delta\varepsilon_z, \tag{74.7}$$

où $E' = \left(\frac{d\sigma_z}{d\varepsilon_z}\right)_c$ est le module d'élasticité local, appelé parfois *module tangentiel*. Il est évident que dans ce cas la charge critique P' (nous conviendrons de l'appeler *charge à module tangentiel*) sera définie par la formule (74.5) en remplaçant le module d'Young par le module E', c.-à-d.

$$P' = \frac{\pi^2 E'J}{l^2}. \tag{74.8}$$

La frontière de la stabilité dépend de l'allure de la courbe de déformation; les cas typiques sont représentés sur la figure 227. Pour les matériaux à palier d'écoulement prononcé on a $E' = 0$, c.-à-d. que la stabilité disparaît au voisinage de la limite d'écoulement (fig. 227, *b*); cette conclusion est confirmée par des résultats expérimentaux. La frontière de la stabilité est montrée sur la figure 227, *c*, pour le cas du passage graduel au palier d'écoulement. Enfin, pour le matériau écrouissable, la frontière de la stabilité s'écarte de l'hyperbole, répondant à la force critique d'Euler, et monte ensuite (fig. 227, *d*). La solution d'Euler (74.6) est valable jusqu'à la limite élastique O_1; au-delà de cette limite elle est montrée en pointillé.

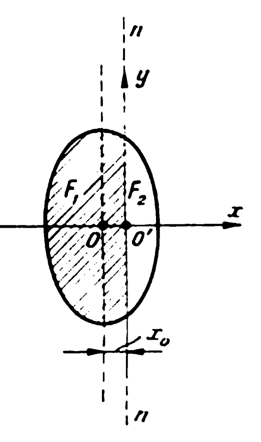


Fig. 229

Le schéma exposé donne en gros une image qualitative correcte.

3. Stabilité de la barre comprimée au-delà de la limite élastique; charge à module réduit. Peu de temps après la publication de l'étude d'Enguesser, il fut constaté par Iassinski que, pour les matériaux réels, une partie de la section F_1 (fig. 229) éprouvait une compression supplémentaire au flambage et que la relation (74.7) était ici valable; quant à l'autre partie de la section F_2, elle subissait une décharge s'effectuant selon la loi de Hooke (74.3) et que, par conséquent, il n'était pas possible de considérer comme correcte la recommandation d'Enguesser.

Par la suite, Enguesser et Karman donnèrent la solution du problème relatif à la stabilité d'une barre comprimée au-delà de la limite d'élasticité en tenant compte des objections de Iassinski. Donnons cette solution.

Les accroissements infiniment petits de la contrainte $\delta\sigma_z$ sont égaux à

$$\delta\sigma_z = \begin{cases} E'\delta\varepsilon_z \text{ dans le domaine du chargement } F_1\,(\delta\varepsilon_z < 0), \\ E\delta\varepsilon_z \text{ dans le domaine de la décharge } F_2\,(\delta\varepsilon_z > 0). \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà noté dans ce qui précède (paragraphe 24), l'hypothèse des sections planes présente un caractère géométrique et n'est pas liée aux propriétés du matériau, et les déformations supplémentaires $\delta\varepsilon_z$ peuvent donc être représentées par la formule précédente (74.2). Le long de la ligne $n - n$, on a $\delta\varepsilon_z = 0$: nous conviendrons d'appeler cette ligne *ligne de séparation* qui par la suite nous servira de ligne de référence pour les x. On a alors :

$$\delta\varepsilon_z = -qx. \tag{74.9}$$

Comme il est admis que *le flambage est réalisable pour la même valeur de l'effort axial*, on a

$$\delta P = \iint \delta\sigma_z \, dx \, dy = 0,$$

d'où

$$S_1E' - S_2E = 0, \tag{74.10}$$

où S_1 et S_2 sont les moments statiques des aires F_1 et F_2 par rapport à la ligne de séparation. Cette équation définit la position de cette ligne (c.-à-d. x_0) qui, comme on le voit aisément, dépend de la forme de la section et du rapport E'/E. Il est clair que le domaine du chargement F_1 est toujours supérieur au domaine de la décharge F_2.

On peut maintenant calculer le moment des forces intérieures par rapport à la ligne neutre :

$$-\iint \delta\sigma_z \, x \, dx \, dy = E_kJq \tag{74.11}$$

où l'on a posé

$$E_k = \frac{E'J_1 + EJ_2}{J}.$$

J_1 et J_2 sont ici les moments d'inertie respectifs des aires F_1 et F_2 par rapport à la ligne de séparation $n - n$. La grandeur E_k est appelée *module réduit* (ou *module d'Enguesser — Karman*).

La distribution des contraintes supplémentaires dans la section de la barre est montrée sur la figure 230. Comparant les moments des forces intérieures pour la distribution $E'nE$ envisagée et pour les distributions $E'nA$, EnB, on en vient à la conclusion que

$$E' \leqslant E_k \leqslant E. \tag{74.12}$$

Ainsi, nous avons l'équation précédente du fléchissement longitudinal mais avec le module réduit E_k au lieu de E ; par conséquent, la charge critique est maintenant égale à

$$P_k = \frac{\pi^2 E_k J}{l^2} \quad \text{ou} \quad \lambda\mu = \pi^2 \frac{E_k}{E}. \tag{74.13}$$

Le module réduit dépend de la forme de la section. Cependant, comme le montrent les calculs, l'influence de la forme de la section transversale sur la valeur du module réduit E_k est faible pour l'acier.

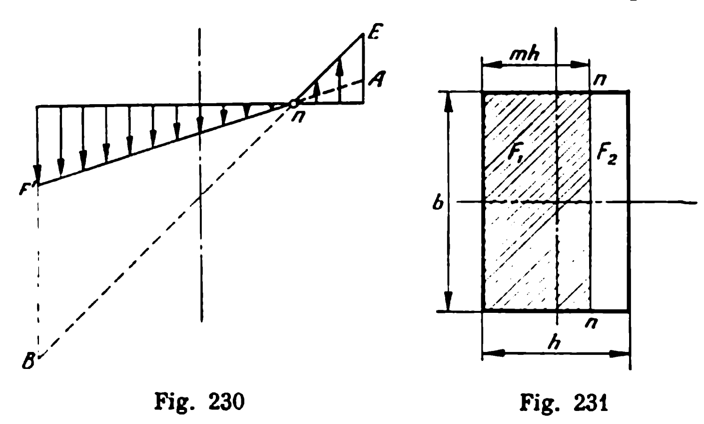


Fig. 230 Fig. 231

Exemple. Considérons une barre de section rectangulaire (fig. 231); désignons par mh ($m < 1$) la hauteur de la zone de chargement F_1, on a alors:

$$S_1 = \frac{1}{2} m^2 h^2, \quad S_2 = \frac{1}{2} (1-m)^2 h^2$$

et l'équation (74.10) définissant m prend la forme

$$m^2 F' - (1-m)^2 E = 0,$$

d'où

$$m = \left(1 + \sqrt{\frac{E'}{E}}\right)^{-1}.$$

Ensuite,

$$J_1 = \frac{bm^3h^3}{3}, \quad J_2 = \frac{b(1-m)^3 h^3}{3}, \quad J = \frac{bh^3}{12}.$$

Le module réduit est égal à

$$E_k = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}.$$

La théorie exposée a été confirmée, pour l'essentiel, de manière satisfaisante par les expériences de Karman et d'autres chercheurs. Par ailleurs, il faut avoir en vue les deux circonstances suivantes.

Premièrement, le module tangentiel E' est déterminé pratiquement avec une faible précision à cause de la dispersion inévitable des points et du changement rapide de la pente de la tangente à la courbe de déformation. Deuxièmement, il existe des doutes, quant à l'exactitude suffisante des résultats expérimentaux, par suite de l'influence notable des conditions aux extrémités et des particularités du chargement dans les machines d'essai.

4. Modèle de Shanley. Importance de la charge à module tangentiel. La solution d'Enguesser — Karman est basée sur l'application du critère statique de la stabilité dans la forme sous laquelle il est employé dans les problèmes de la stabilité des systèmes élastiques. On considère que la barre reste droite jusqu'au moment où elle devient instable, le passage de l'état droit à l'état gauche se faisant pour une valeur constante de l'effort de compression, c.-à-d. pour $\delta P = 0$. Pendant longtemps, aucun doute n'existait quant à la validité de la méthode exposée plus haut pour la solution des problèmes de la stabilité d'une barre comprimée au-delà de la limite élastique.

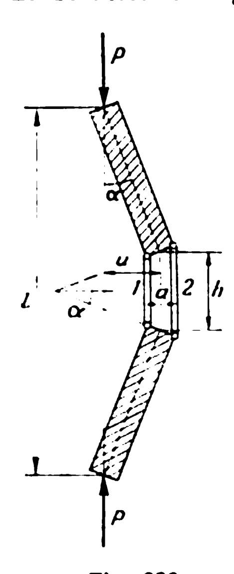


Fig. 232

Il a été trouvé dans une série d'études expérimentales sur la compression des barres en alliages d'aluminium, exécutées récemment pour les besoins de la construction aéronautique, que la charge critique est d'habitude un peu plus proche de la charge à module tangentiel P' que de la charge à module réduit E_k. Les expériences ont montré que le fléchissement apparaît *avant que ne soit atteinte la charge à module réduit* P_k, et que d'ailleurs il s'effectue au début sans être marqué par la décharge du matériau. Ces faits ont été décrits sous un angle nouveau dans les études de F. Shanley [189] et dans les travaux suivants d'autres auteurs.

Si l'on rejette la restriction selon laquelle $\delta P = 0$ en cherchant la charge minimale à laquelle devient possible le gauchissement dans des conditions de la *force de compression croissante* ($\delta P > 0$), on trouve que cette charge est la charge à module tangentiel P'. Ceci a été montré par Shanley sur un exemple particulier d'une colonne idéalisée, constituée de deux barres rigides dont chacune est de longueur $l/2$ et qui sont reliées entre elles par une petite articulation élasto-plastique (fig. 232); les deux paliers déformés de celle-ci (chacun ayant l'aire $F/2$, $h \ll l$) subissent une traction ou une compression. A l'état initial, le système est rectiligne; le système dans l'état dévié (où u est le « fléchissement ») est montré sur la figure 232. Soient ε_1 et ε_2 les déformations supplémentaires au flambage et δP

l'accroissement de la charge. Etablissant les conditions d'équilibre du système

$$\delta P = \frac{F}{2}(\varepsilon_1 E' - \varepsilon_2 E), \qquad Pu = \frac{Fa}{4}(\varepsilon_1 E' + \varepsilon_2 E)$$

et appliquant la relation $u = \frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{4a}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, on trouve, en éliminant ε_1 et ε_2, que

$$u\left[\frac{4a}{l} - \frac{2}{a}\frac{P}{F}\left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E}\right)\right] = \frac{\delta P}{F}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right).$$

L'état dévié ($u \neq 0$) s'avère possible:

1) pour les paliers élastiques ($E' = E$) et la charge d'Euler

$$P_{\mathrm{E}} = \frac{EFa^2}{l},$$

2) au-delà de la limite élastique suivant le schéma du module tangentiel ($E = E'$) pour la charge

$$P' = \frac{E'Fa^2}{l},$$

3) au-delà de la limite élastique suivant le schéma du module réduit ($\delta P = 0$) pour la charge

$$P_k = P' \frac{2E}{E + E'}.$$

On trouve aisément que ε_2 est proportionnelle à $(P - P')$; mais $\varepsilon_2 > 0$, et l'on aura $u = 0$ pour $P < P'$. Si $P' \leqslant P \leqslant P_k$, on a alors une bifurcation de l'équilibre et, en plus de la solution triviale, il est possible d'obtenir la solution

$$u = \frac{a}{2}\frac{P - \overline{P}}{P_k - P}\frac{P_k - P'}{P'}, \quad (\delta P = P - \overline{P}),$$

où $\overline{P}$ est la valeur de la charge au point de bifurcation; cette relation est montrée sur la figure 233. La charge à module tangentiel est la charge minimale à laquelle est possible le flambage, le fléchissement (courbe *1*) augmentant avec l'accroissement de l'effort de compression P et tendant vers l'infini lorsque l'on s'approche de la charge à module réduit P_k. Si l'on empêche les déplacements de la barre jusqu'à une certaine charge $\overline{P} > P'$ et si on la relâche ensuite, celle-ci fléchira suivant la ligne *2* en pointillé. Le flambage peut avoir lieu à n'importe quelle charge dans l'intervalle (P', P_k). Lorsque la force $P > P'$, la flexion est suivie de la décharge et de l'apparition de déformations résiduelles, c'est pourquoi l'analyse de

Shanley n'est pas un retour au schéma approché initial d'Enguesser; néanmoins, *au moment de la bifurcation* la décharge est absente. Ainsi, les perturbations infinitésimales conduisent à la flexion lorsque la charge est à module tangentiel. Cependant, ces déviations ne sont pas dangereuses à l'étape initiale et ce n'est qu'avec l'accroissement ultérieur de la charge qu'il se crée un état menaçant.

La charge à module tangentiel P' et la charge à module réduit P_k sont appelées parfois respectivement *charges critiques inférieure et supérieure*; elles délimitent le domaine de flambage.

La frontière inférieure P' est moins dangereuse et plus facile à définir; elle est de ce fait pratiquement plus intéressante.

Il convient de noter que la différence entre les charges P' et P_k est souvent petite. Sur la courbe de compression (fig. 234), le point

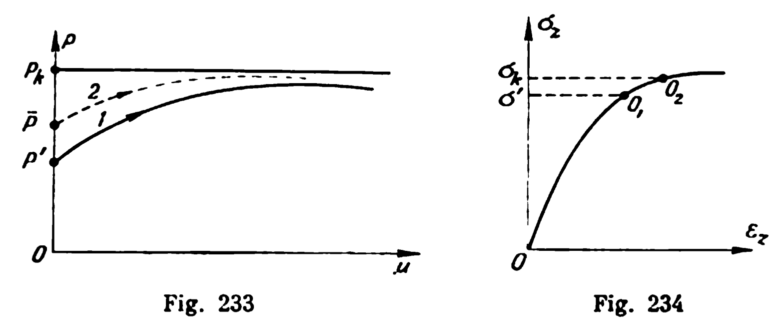


Fig. 233 Fig. 234

O_1 correspond à la charge à module tangentiel et le point O_2 à la charge à module réduit. Les contraintes σ' et σ_k sont souvent voisines l'une de l'autre, ce qui s'explique par la diminution du module tangentiel E' au fur et à mesure qu'on se déplace suivant la courbe de déformation.

L'analyse des conditions de flambage des barres réelles, exécutée suivant les méthodes approchées ou numériques par Y. Rabotnov [121], A. Pflüger [180] et autres auteurs, a confirmé les conclusions de F. Shanley. V. Kliouchnikov [112] a étudié le mouvement du modèle idéalisé (fig. 232) en faisant la supposition que toute la masse du système est concentrée au milieu de la barre; il en est venu à la même conclusion suivant laquelle le *commencement* du flambage tombait sur la charge à module tangentiel. Cf. également le livre de Y. Panovko et I. Goubanova [20].

5. Charge critique inférieure. Les études effectuées ont déterminé l'importance de la charge à module tangentiel pour la barre comprimée. Nous conviendrons de l'appeler *charge critique inférieure.*

La situation est bien plus embrouillée en ce qui concerne l'établissement du critère de la stabilité au-delà de la limite élastique pour les systèmes plus complexes: bandes, plaques, enveloppes. On applique d'habitude l'un des procédés suivants.

Le *premier procédé* consiste à considérer, tout comme dans le cas du corps élastique parfait, la bifurcation de l'équilibre *pour des forces extérieures fixes.* Des domaines de décharge apparaissent dès que se manifeste le flambage. Appliqué à la barre comprimée, ce schéma donne une charge à module réduit. Nous supposerons que ce procédé conduit à la *charge critique supérieure.*

Le *second procédé* est basé sur l'analyse de Shanley. On recherche la bifurcation de l'équilibre sous la condition que le chargement est encore en cours (il n'y a pas de décharge au moment de la bifurcation). Le mouvement perturbé d'une plaque idéalisée a été étudié récemment par V. Kliouchnikov [113] (équivalent bidimensionnel du modèle montré sur la figure 232). Il a été établi par cette analyse que le second procédé conduit à la charge critique inférieure si l'on se base sur les équations de la théorie de l'écoulement plastique.

Le second procédé est appliqué ci-après; nous supposons qu'il conduit à la *charge critique inférieure.* Bien entendu, cette conception n'est pas bien argumentée. De plus, on est loin de savoir s'il est toujours possible de réaliser dans le sens indiqué plus haut la « mise en charge ultérieure » grâce à l'accroissement du paramètre de charge dans les problèmes de stabilité des enveloppes. Néanmoins, la simplicité relative, la marge de sécurité plus grande de la charge critique inférieure ainsi que les erreurs notables relevées dans la détermination du module tangentiel E', rendant moins précises les solutions élaborées d'après les deux critères, nous incitent à préférer ici le deuxième procédé.

75. STABILITÉ D'UNE BANDE FLÉCHIE PAR DES COUPLES

1. Généralités. Considérons le problème du flambage latéral d'une bande lorsque celle-ci est fléchie par des couples au-delà de la limite élastique (fig. 235, *a*). Les extrémités de la bande sont fixées en charnière. La section de la bande a la forme d'un rectangle étiré (fig. 235, *b*). Le matériau de la bande obéit aux équations de la théorie de l'écoulement plastique, la condition d'écoulement de von Mises étant vérifiée dans les zones plastiques $|y| > \xi$, hachurées sur la figure 235, *a*. Il y a un noyau élastique lorsque $|y| < \xi$; il est aisé de voir (cf. paragraphe 24) que

$$\frac{\xi}{h} \equiv \zeta = \sqrt{3(1-\mu)}, \quad \mu = \frac{|M|}{M_*}, \tag{75.1}$$

où $M_* = \sigma_s bh^2$ est le moment fléchissant limite. Seule la contrainte σ_z diffère de zéro avant le flambage, avec d'ailleurs $|\sigma_z| = \sigma_s$ pour $|y| \geqslant \xi$. Lorsque le moment fléchissant est assez important, il se produit le flambage latéral (dans la direction des x), suivi d'une torsion.

Désignons par x', y', z' le trièdre des axes pour la section transversale arbitraire d'une bande après le flambage; les axes des x' et y' sont dirigés suivant les axes centraux principaux de la section transversale (fig. 235, *c*). Désignons par γ l'angle de rotation de la section

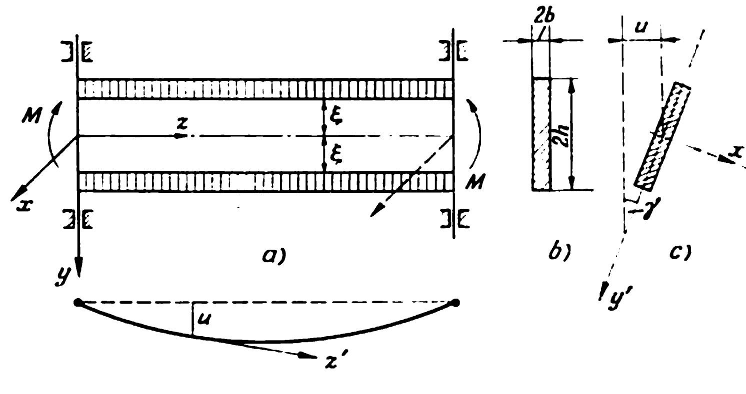


Fig. 235

par rapport à l'axe des z (angle de torsion); la torsion par unité de longueur sera alors égale à $\frac{d\gamma}{dz}$. Ensuite, soit u la flexion latérale au flambage, la courbure correspondante de l'axe de la bande est alors égale à $\frac{d^2u}{dz^2}$.

Le vecteur moment sur l'extrémité de la bande $z = l$ est montré sur la figure 235, *a* en pointillé; ses projections sur les axes des y' et z' sont égales respectivement à

$$L_{y'} = M\gamma, \quad L_{z'} = -M\frac{du}{dz}. \tag{75.2}$$

La bande subit des déformations supplémentaires pour un flambage infiniment petit. Tout comme dans le cas élastique, ces déformations comprennent la flexion de la bande et sa torsion. On peut négliger les composantes du tenseur des contraintes σ_x, τ_{xz}, τ_{xy} du fait que les surfaces latérales de la bande sont libres de contraintes et l'épaisseur de la bande est petite; on néglige aussi la contrainte σ_y étant donné que les fibres n'exercent pas de pression réciproque à la flexion et à la torsion. Donc, seules les contraintes supplémentaires $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{yz}$ apparaissent lors du flambage.

2. Frontière inférieure de la stabilité. On recherchera la charge critique inférieure; dans ce cas il n'y aura pas de décharge au moment de la bifurcation. C'est pourquoi dans les zones plastiques $|y| \geqslant \xi$ on aura $\delta\sigma_z = 0$. D'après les équations de la théorie de l'écoule-

ment (13.7), on a:

$$\delta\varepsilon_z = \frac{1}{E}\,\delta\sigma_z \quad \text{pour} \quad |y| \leqslant \xi; \quad \delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\,\delta\tau_{yz}. \tag{75.3}$$

Conformément à la deuxième relation, les accroissements de la contrainte tangentielle et du cisaillement sont liés par la loi de Hooke et le couple de torsion est donc proportionnel à la torsion, c.-à-d.

$$L_{z'} = C_0 \frac{d\gamma}{dz}, \tag{75.4}$$

où C_0 est la rigidité à la torsion d'une bande *élastique*.

Ensuite, comme dans les zones plastiques on a $\delta\sigma_z = 0$, la rigidité à la flexion latérale est définie par la rigidité du noyau élastique $|y| < \xi$. Les accroissements des déformations axiales $\delta\varepsilon_z$ obéissent à l'hypothèse des sections planes, c'est pourquoi le moment fléchissant $L_{y'}$ au flambage équivaut à

$$L_{y'} = B\frac{d^2u}{dz^2}, \quad B = \frac{4}{3}E\xi b^3 = B_0\zeta. \tag{75.5}$$

$B_0 = \frac{4}{3}Ehb^3$ désigne ici la rigidité à la flexion d'une bande *élastique*.

Comparant les formules présentées ci-dessus, on obtient:

$$-M\frac{du}{dz} = C_0\frac{d\gamma}{dz}, \quad M\gamma = B\frac{d^2u}{dz^2}. \tag{75.6}$$

Selon les conditions des extrémités articulées, on a:

$$u = 0,\ \gamma = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \text{ et } z = l. \tag{75.7}$$

Intégrant la première des équations (75.6), on trouve que $C_0\gamma = -Mu$; alors

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{M^2}{BC_0}u = 0.$$

La solution de cette équation, satisfaisant à la condition de nullité pour $z = 0$, a la forme (A est une constante arbitraire)

$$u = A\sin\frac{Mz}{\sqrt{BC_0}}.$$

De la deuxième condition aux limites on trouve:

$$A\sin\frac{Ml}{\sqrt{BC_0}} = 0.$$

Par conséquent, outre la forme initiale (triviale) de l'équilibre ($A = 0$), le flambage est possible pour

$$\frac{Ml}{\sqrt{BC_0}} = \pi,\ 2\pi,\ \ldots$$

Le moment critique est égal à

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{BC_0}.$$

Introduisant le paramètre de la souplesse $\lambda = \frac{M_* l}{\sqrt{B_0 C_0}}$, on peut représenter la dernière relation sous la forme

$$\lambda\mu = \pi \sqrt{\zeta}, \tag{75.8}$$

où

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mu \leqslant \frac{2}{3}, \\ \sqrt{3(1-\mu)} & \text{pour } \frac{2}{3} \leqslant \mu \leqslant 1. \end{cases}$$

La frontière de la stabilité sur le plan λ, μ est montrée sur la figure 236. La ligne en pointillé y répond à une bande élastique parfaite ($\zeta = 1$). Le point D, pour lequel $\mu = 2/3$, correspond à l'apparition de la première déformation plastique. La charge critique baisse brusquement en présence de déformations plastiques.

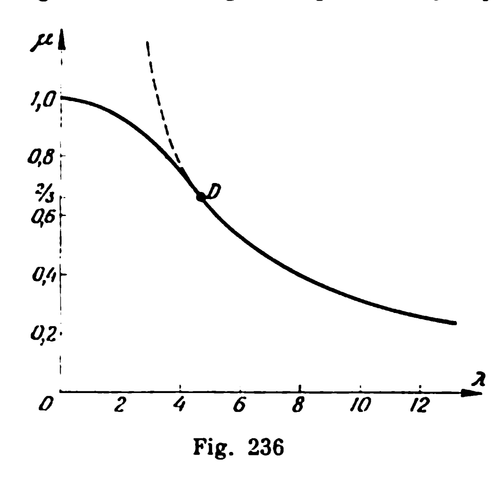


Fig. 236

3. **Considérations finales.** La théorie générale de la stabilité d'une flexion de forme plane au-delà de la limite élastique et ses applications à différents problèmes particuliers sont exposées dans la première édition russe de cet ouvrage. Les charges critiques supérieures y sont également décrites. Les calculs ont montré que les charges critiques inférieure et supérieure sont proches l'une de l'autre. L'influence de l'écrouissage a fait l'objet d'une étude dans les travaux [106]. L'importance théorique des charges critiques a reçu une bonne confirmation dans les études de B. Neal [178].

La stabilité des barres à parois minces aux déformations élasto-plastiques a fait l'objet d'une étude dans l'ouvrage [109] sur la base des équations de la théorie de l'écoulement suivant le schéma de la « mise en charge toujours en cours » (charge critique inférieure).

76. STABILITÉ DES PLAQUES COMPRIMÉES

Le flambage des plaques et enveloppes a été étudié par A. Iliouchine et d'autres auteurs, (cf. [9, 28, 75]) sur la base de la théorie des déformations et la notion classique relative à la perte de stabilité pour des forces extérieures invariables. Le flambage s'accompagne

alors de l'apparition de domaines de décharge, ce qui complique sensiblement l'analyse. La plupart des difficultés subsistent lorsque l'on applique la théorie de l'écoulement et le même critère.

Les mêmes problèmes se résolvent de manière beaucoup plus simple si l'on se base sur la théorie de l'écoulement et si l'on recherche la *charge critique inférieure* correspondant au flambage pour la mise en charge toujours en cours. Comme nous l'avons déjà noté, l'interprétation de cette condition peut causer ici des difficultés; cependant, nous l'appliquerons ayant en vue que l'on trouve ainsi une frontière de la stabilité avec une marge de sécurité plus grande. Examinons brièvement sous ce point de vue le problème du flambage des plaques.

1. Equations fondamentales (1). Soit une plaque (d'épaisseur h) qui se déforme dans son plan (x, y) au-delà de la limite élastique. On suppose pour des raisons de simplicité qu'il se réalise dans la plaque avant le flambage un état de contrainte homogène (compression dans deux directions perpendiculaires):

$$\sigma_x = -p, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Au flambage les contraintes dans la plaque reçoivent des accroissements infiniment petits

$$\delta\sigma_x, \ \delta\sigma_y, \ \delta\tau_{xy}$$

(les autres composantes de la contrainte sont négligées comme étant secondaires pour la plaque). Partant des équations de la théorie de l'écoulement (13.14) pour le cas général du matériau écrouissable, on obtient des accroissements infiniment petits correspondants des composantes de la déformation:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\delta\sigma_x - \nu\delta\sigma_y) - \frac{1}{3}F(T)\,\delta T\,(2p-q), \\ \delta\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\delta\sigma_y - \nu\delta\sigma_x) - \frac{1}{3}F(T)\,\delta T\,(2q-p), \\ \delta\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\,\delta\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (76.1)$$

avec

$$T^2 = \frac{1}{3}(p^2 - pq + q^2),$$

$$-\,\delta T = \frac{1}{6T}\left[(2p-q)\,\delta\sigma_x + (2q-p)\,\delta\sigma_y\right],$$

$$F(T) = \frac{1}{2T^2}\frac{d\Phi}{dT}.$$

(1) On suppose que le lecteur connaît les bases de la théorie de la flexion et de la stabilité des plaques élastiques (cf. [38]).

Ici $\Phi(T)$ est le travail de la déformation plastique; $\Phi(T)$ est une fonction caractéristique du matériau donné, qui est indépendante du type de l'état de contrainte.

Considérons la traction simple; admettons que la courbe de traction a pour équation $\varepsilon_x = f(\sigma_x)$, alors l'accroissement du travail de la déformation plastique équivaut à

$$dA_p = \sigma_x \, d\varepsilon_x^p = \sigma_x f'(\sigma_x) \, d\sigma_x - \frac{1}{E} \sigma_x \, d\sigma_x.$$

La dérivée $f'(\sigma_x)$ est inverse au module local (tangentiel) E', donc,

$$\frac{1}{\sigma_x} \frac{dA_p}{d\sigma_x} = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{3T} \frac{d\Phi}{dT},$$

puisque $A_p = \Phi$; E' est ici le module tangentiel pour la contrainte de traction σ_x correspondant à l'intensité donnée T.

Portant les valeurs de T, δT et $F(T)$ dans les formules (76.1), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} E\delta\varepsilon_x &= A_{xx}\delta\sigma_x + A_{xy}\delta\sigma_y, \\ E\delta\varepsilon_y &= A_{xy}\delta\sigma_x + A_{yy}\delta\sigma_y, \\ G\delta\gamma_{xy} &= \delta\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (76.2)$$

où sont introduites les notations

$$\left.\begin{aligned} A_{xx} &= 1 + \theta(2p - q)^2, \\ A_{xy} &= -\nu + \theta(2p - q)(2q - p), \\ A_{yy} &= 1 + \theta(2q - p)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (76.3)$$

avec

$$\theta = \frac{1}{12} \frac{1}{T^2} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right).$$

$\theta = 0$ pour le corps élastique et $\theta \to \infty$ lorsque l'on passe au palier d'écoulement.

Résolvant les équations (76.2) par rapport aux accroissements de la contrainte, on trouve:

$$\left.\begin{aligned} \delta\sigma_x &= \frac{E}{\omega}(A_{yy}\delta\varepsilon_x - A_{xy}\delta\varepsilon_y), \\ \delta\sigma_y &= \frac{E}{\omega}(-A_{xy}\delta\varepsilon_x + A_{xx}\delta\varepsilon_y), \\ \delta\tau_{xy} &= G\delta\gamma_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (76.4)$$

où les notations sont

$$\omega = (1 - \nu^2)\,\omega_1, \quad \omega_1 = 1 + \frac{5 - 4\nu}{1 - \nu^2} \left(p^2 - \frac{8 - 10\nu}{5 - 4\nu} pq + q^2 \right) \theta.$$

Par hypothèse la bifurcation se réalise en l'absence des domaines de décharge, les formules (76.4) sont donc vérifiées dans toute la plaque.

Conformément à la théorie de Kirchhoff relative à la flexion des plaques, les accroissements des déformations au flambage seront des fonctions linéaires de la distance à partir de la surface moyenne:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_x &= e_1 - z\varkappa_1, \\ \delta\varepsilon_y &= e_2 - z\varkappa_2, \\ \delta\gamma_{xy} &= 2\,(e_{12} - z\varkappa_{12}), \end{aligned}\right\} \tag{76.5}$$

où e_1, e_2 et $2e_{12}$ sont les accroissements infiniment petits des déformations de la surface moyenne, et $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ des variations infiniment petites de ses courbures et de sa torsion. On sait que

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \tag{76.6}$$

où $w = w\,(x,\ y)$ est le fléchissement de la plaque au flambage.

Les accroissements des contraintes changent évidemment eux aussi de façon linéaire suivant l'épaisseur de la plaque. Maintenant il est facile de calculer les accroissements des moments de flexion δM_x, δM_y et de torsion δM_{xy}:

$$\left.\begin{aligned} \delta M_x &= \int \delta\sigma_x z\,dz = -\frac{D}{\omega_1}\,(A_{yy}\varkappa_1 - A_{xy}\varkappa_2), \\ \delta M_y &= \int \delta\sigma_y z\,dz = -\frac{D}{\omega_1}\,(-A_{xy}\varkappa_1 + A_{xx}\varkappa_2), \\ \delta M_{xy} &= \int \delta\tau_{xy} z\,dz = -D\,(1-\nu)\,\varkappa_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{76.7}$$

où l'intégration est opérée dans les limites de $-\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$, et $D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la plaque *élastique*.

Projetant sur l'axe des z les forces agissant sur l'élément de la plaque dans l'état de flambage, on obtient l'équation d'équilibre connue

$$\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} - ph\varkappa_1 - qh\varkappa_2 = 0. \tag{76.8}$$

D'où, à l'aide des formules (76.7) et (76.6), on trouve l'équation différentielle du flambage de la plaque (l'épaisseur h de la plaque est supposée constante et l'état de contrainte initial homogène):

$$A_{yy}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,(\omega_1 - \nu\omega_1 - A_{xy})\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \\ + A_{xx}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h\omega_1}{D}\left(p\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{76.9}$$

Une équation différentielle analogue a été indiquée par C. Pearson [179].

$\theta = 0$ pour la plaque élastique, et l'équation du flambage prend la forme

$$\Delta\Delta w + \frac{h}{D}\left(p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (76.10)$$

L'équation (76.9) est apparemment semblable à l'équation de la stabilité d'une plaque anisotrope élastique.

2. Conditions aux limites. Si le bord de la plaque *est encastré rigidement*, on a alors tout le long de celui-ci:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

où n est la direction de la normale au contour.

Si le bord de la plaque est sur un *appui* simple, on a le long de ce bord:

$$w = 0, \quad \delta M_n = 0,$$

où δM_n est l'accroissement du moment fléchissant sur le contour.

Enfin, si le bord de la plaque (par exemple $x = \text{const} = a$) *est libre*, le moment fléchissant δM_x et l'effort transversal (1) s'annulent le long de celui-ci:

$$\delta M_x = 0, \quad N_x + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} = 0. \qquad (76.11)$$

Soulignons que les conditions aux limites (tout comme l'équation différentielle elle-même) sont homogènes.

3. Méthode énergétique. La détermination de la charge critique se réduit ainsi à la recherche des valeurs propres du problème. On peut chercher directement les solutions non triviales de l'équation différentielle (76.9). Dans la plupart des cas, il vaut mieux cependant partir de l'équation énergétique. On peut déduire cette dernière en passant de l'équation différentielle à l'énoncé variationnel correspondant.

Il est aisé (identiquement au procédé de S. Timochenko [38] et de Billard [28]) de déduire directement l'équation énergétique en égalant le travail de la déformation de flexion au flambage au travail des efforts extérieurs le long des déplacements résultant du flambage.

4. Flambage d'une bande rectangulaire comprimée. Considérons le problème du flambage d'une plaque rectangulaire longue, comprimée dans un sens (fig. 237). On a ici $q = 0$, et la plaque étant

(1) N_x, N_y sont les efforts tranchants:

$$N_x = \frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y}, \quad N_y = \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_y}{\partial y}.$$

élongée ($b \gg a$), on peut supposer qu'il se réalise la forme cylindrique de perte de la stabilité, c.-à-d. $w = w(x)$. Les extrémités $x = 0$ et $x = a$ sont appuyées, c.-à-d. on a le long de celles-ci $w = 0$, $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$.

L'équation différentielle du flambage (76.9) prend la forme

$$A_{yy}\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{p\omega_1 h}{D}\frac{d^2w}{dx^2} = 0.$$

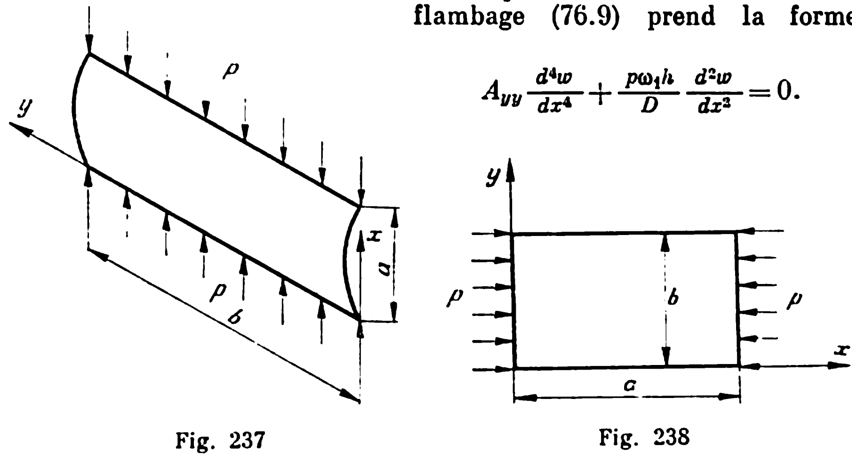


Fig. 237 Fig. 238

La pression critique, comme on le voit aisément, est égale à

$$p = p_0\frac{A_{yy}}{\omega_1},$$

où $p_0 = \frac{\pi^2}{a^2}\frac{D}{h}$ est la pression critique pour une bande *élastique*. Le facteur

$$\frac{A_{yy}}{\omega_1} = \frac{1+\frac{1}{4}\left(\frac{E}{E'}-1\right)}{1+\frac{5-4\nu}{1-\nu^2}\frac{1}{4}\left(\frac{E}{E'}-1\right)} \leqslant 1.$$

Avec la diminution du module tangentiel ($E' \to 0$) la charge critique baisse de façon monotone jusqu'à la valeur $\frac{1-\nu^2}{5-4\nu}p_0$ qu'elle prend sur le palier d'écoulement. Ainsi, contrairement au cas de la barre comprimée, il n'y a pas ici de perte totale de la stabilité sur le palier d'écoulement.

5. Stabilité d'une plaque rectangulaire appuyée, comprimée dans un sens (fig. 238). Dans ce cas, $q = 0$ et les conditions aux limites ont la forme:

$$\text{pour } x=0 \text{ et } x=a \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$

$$\text{pour } y=0 \text{ et } y=b \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

On cherche la solution de l'équation différentielle du flambage (76.9) sous la forme ordinaire

$$w = c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{76.12}$$

où c_{mn} est une constante arbitraire, m et n des nombres entiers; on voit aisément que les conditions aux limites sont satisfaites. Portant (76.12) dans l'équation (76.9), on obtient:

$$c_{mn} \left\{ \pi^2 \left[A_{yy} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(\omega_1 - \nu\omega_1 - A_{xy}) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + A_{xx} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_1 hp}{D} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right\} = 0.$$

La solution recherchée étant non triviale, l'expression figurant à l'intérieur des accolades doit être nulle; alors

$$p = \frac{\pi^2 D}{\omega_1 h} \left[A_{yy} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2(\omega_1 - \nu\omega_1 - A_{xy}) \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + A_{xx} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \left(\frac{a}{m}\right)^2 \right].$$

Il est facile de voir que $\omega_1 - \nu\omega_1 - A_{xy} > 0$ et que, en conséquence, tous les termes sont positifs; pour la recherche de p minimum, il faut poser $n = 1$ (c.-à-d. que dans la direction des y il y a toujours une demi-onde). On choisit le nombre m en fonction du rapport $\frac{a}{b}$ et des coefficients de l'équation de manière que p soit minimum.

6. **Considérations finales.** Comme nous l'avons déjà noté, on partira de l'énoncé énergétique et on cherchera la charge critique par la méthode de Ritz pour considérer des problèmes plus complexes.

L'image qualitative de la frontière de la stabilité des plaques que l'on tire de la théorie exposée est juste; cependant, les valeurs théoriques des charges critiques diffèrent parfois sensiblement des résultats expérimentaux. Il est à noter que ces derniers s'accordent mieux avec les résultats des travaux de Billard [28] et de Stowell dans lesquels on applique les équations de la théorie des déformations et où l'on suppose que seule une déformation plastique se produit quand la stabilité disparaît.

La divergence susmentionnée s'explique probablement par l'influence des déviations constatées par rapport à la forme parfaite. Il est notoire que, même pour les plaques et les coques élastiques, la théorie classique de la stabilité conduit à des résultats qui s'écartent des données expérimentales. En déformations plastiques, l'influence des déplacements finis, changements de géométrie, déviations du matériau et des conditions aux limites sur la charge critique augmente nettement. Pour obtenir des résultats quantitatifs plus satisfaisants, l'analyse laborieuse de la déformation des plaques en présence des perturbations initiales est vraisemblablement inévitable.

Les publications relatives à la stabilité des plaques et des coques au-delà de la limite élastique sont très nombreuses. Nous indiquerons ici les livres de A. Volmir et de S. Timochenko et les aperçus [73, 75] dans lesquels le lecteur trouvera les références nécessaires.

Exercices du chapitre X

1. Calculer le module réduit E_k pour une section circulaire.

2. Déduire l'équation différentielle du flambage (pour la charge critique inférieure)

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\lambda^2\mu^2\frac{(1-t)^2}{\sqrt{3[1-\mu(1-t)]}}\gamma=0$$

d'une bande console fléchie par une force P appliquée au centre de gravité de la section d'extrémité $t = 1$ (on pose $z = lt$, $\mu = Pl/M_*$).

3. Déduire l'équation différentielle du flambage (pour la charge critique inférieure)

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\lambda^2\mu^2\frac{(1-t)^4}{\zeta}\gamma=0$$

d'une bande console fléchie par une charge Q/l, uniformément répartie le long de l'axe (ici $\mu=\frac{Ql}{2M_*}$ où Q est la totalité de la charge).

4. Montrer que, pour la condition d'incompressibilité $\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$, l'équation différentielle du flambage d'une plaque, comprimée dans la direction des x, prend la forme

$$\frac{A_{yy}}{\omega_1}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{ph}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$$

CHAPITRE XI

PROBLÈMES DYNAMIQUES

77. PROPAGATION DES ONDES ÉLASTO-PLASTIQUES DANS LES BARRES

1. Généralités. L'action des charges appliquées brusquement à un corps ne se propage pas instantanément, mais se transmet d'un point à l'autre par ondulations.

Jusqu'à tout récemment, les études ne portaient que sur le mouvement des ondes élastiques, c.-à-d. sur la propagation des perturbations dans le milieu *élastique*; la théorie dynamique de l'élasticité a des applications importantes dans la sismologie et la technique.

Dès la fin de la Seconde Guerre Mondiale, un intérêt considérable est porté sur les questions de la propagation des perturbations dans le milieu *élasto-plastique*, et ceci pour les raisons suivantes. Tout chargement de choc plus ou moins intense s'accompagne de déformation plastique. Le problème de la résistance de différentes machines et constructions, éprouvant des chocs (ou soumises à l'effet des explosions), ne peut être étudié que si l'on arrive à comprendre clairement les lois de la propagation des déformations élasto-plastiques précédant la rupture. D'autre part, les milieux réels (par exemple en sismologie) n'étant jamais tout à fait élastiques, il devient indispensable de tenir compte de l'influence des propriétés plastiques. Finalement, les problèmes dynamiques peuvent acquérir une certaine importance dans l'analyse des procédés technologiques rapides du traitement des métaux.

Les premiers problèmes relatifs à la propagation des ondes élasto-plastiques de compression (de traction) dans une barre furent envisagés par Kh. Rakhmatouline [122], T. Karman et P. Duwez [166], et par G. Taylor [191]. Différentes généralisations de ce problème furent étudiées par Kh. Rakhmatouline [24], G. Chapiro [134], V. Sokolovski, etc. Des renvois détaillés peuvent être trouvés dans les livres [21,24,50] et dans les aperçus [64,70,74].

2. Hypothèses principales. Considérons le problème relatif à la propagation des ondes dans une barre prismatique longue dont l'axe se confond avec l'axe des x. Dans nos raisonnements, nous partirons des hypothèses principales suivantes.

1) Lorsque la barre se déforme, ses sections transversales restent planes et normales à l'axe des x.

2) Les déformations sont petites, par conséquent, on peut négliger les variations des dimensions de la barre.

3) On peut négliger les forces d'inertie correspondant au mouvement des particules de la barre dans les directions transversales (par suite du rétrécissement ou de l'élargissement de la section).

4) On peut négliger l'influence de la vitesse de déformation sur la courbe du rapport entre la contrainte σ_x et la déformation ε_x.

Le problème envisagé dans le présent paragraphe étant un problème unidimensionnel, nous conviendrons d'écrire respectivement σ, ε, u, v au lieu de σ_x, ε_x, u_x, v_x.

L'allongement relatif ε et la contrainte σ sont répartis uniformément sur la section. Jusqu'à la limite élastique le matériau obéit à la loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \text{ pour } |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad (77.1)$$

où E est le module d'Young, et σ_0, ε_0 correspondent à la limite élastique (fig. 239, *a*). Nous supposons que la courbe de compression est analogue à la courbe de traction. La décharge se fait suivant une droite. En accord avec les résultats expérimentaux, nous supposons que la branche de chargement (pour $\sigma > 0$) a sa concavité dirigée vers le bas, l'angle de pente de la tangente étant une fonction décroissante de la déformation:

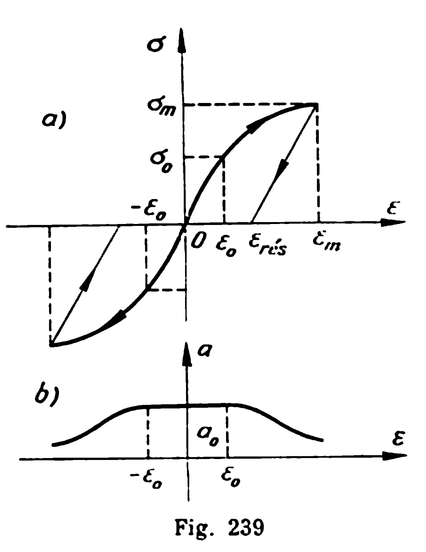


Fig. 239

$$0 < \frac{d\sigma}{d\varepsilon} < E \text{ pour } |\varepsilon| > \varepsilon_0.$$

Dans les problèmes dynamiques, les vitesses de déformation sont grandes et peuvent exercer une influence notable sur la courbe de déformation. La relation adoptée $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ entre la contrainte et la déformation n'est donc que la première approximation, et elle se rapporte à une certaine vitesse de déformation moyenne dans l'intervalle donné. Il convient d'envisager le modèle élasto-visco-plastique du milieu pour tenir compte de l'influence de la vitesse de déformation (cf. chapitre XII).

3. Equation du mouvement. Des équations différentielles de mouvement du milieu continu (4.1) on tire:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (77.2)$$

La densité $\rho \approx$ const par suite de la petitesse de la déformation. Etant donné que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{77.3}$$

où la grandeur

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$$

est appelée *vitesse locale de propagation des perturbations* (« vitesse locale du son »).

Dans le domaine élastique, la vitesse de propagation est constante

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \equiv a_0.$$

Dans le domaine plastique, la vitesse de propagation diminue avec la croissance de la déformation (fig. 239, *b*).

Il est commode de remplacer l'équation du second ordre (77.3) par un système de deux équations différentielles du premier ordre

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{77.4}$$

pour les fonctions ε, v, où v est la vitesse des particules. Il est facile de s'assurer que ce système est du type hyperbolique (cf. Appendice).

Soient des fonctions v et ε définies le long d'une ligne L quelconque. Ajoutant, comme toujours, les relations

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

on obtient le long de L un système de quatre équations algébriques linéaires par rapport aux dérivées premières $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}$, et l'on trouve:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ldots, \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

où Δ est le déterminant du système, et $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ les numérateurs appropriés. Il est aisé de voir que

$$\Delta = dx^2 - a^2 dt^2.$$

Si L est une ligne caractéristique, le long de cette ligne les dérivées sont indéterminées, c.-à-d. $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Par conséquent,

$$dx \pm a\,dt = 0.$$

Les conditions de nullité des numérateurs conduisent maintenant aux relations

$$a\,d\varepsilon \pm dv = 0.$$

Introduisons la fonction

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{77.5}$$

On a alors:

$$d\,[v \pm \varphi(\varepsilon)] = 0.$$

Ainsi, le système d'équations différentielles envisagé a deux familles différentes de caractéristiques réelles:

$$\left.\begin{aligned} dx - a\,dt &= 0, \\ v - \varphi(\varepsilon) &= \text{const} = \xi, \end{aligned}\right\} \tag{77.6}$$

$$\left.\begin{aligned} dx + a\,dt &= 0, \\ v + \varphi(\varepsilon) &= \text{const} = \eta, \end{aligned}\right\} \tag{77.7}$$

c.-à-d. qu'il se rapporte au type hyperbolique. La grandeur a est la vitesse de propagation des perturbations.

La solution du système (77.4), possédant dans un domaine x, t quelconque des dérivées premières continues, sera appelée par convention *onde*. Les relations (77.6) se rapportent à l'*onde directe* (qui se propage dans la direction des x positifs) et les relations (77.7), à l'*onde inverse*.

Le point de séparation de deux ondes, se déplaçant avec le temps le long de la barre, est appelé *front*. Il sera représenté sous forme d'une ligne quelconque sur le plan x, t.

Le front présentera une *faible discontinuité* si les grandeurs ε, v sont continues et leurs dérivées premières sont discontinues.

Le front présentera une *forte discontinuité* si les fonctions ε, v elles-mêmes sont discontinues. On appelle de telles ondes *ondes discontinues* ou *ondes de choc*.

Les premières relations de (77.6) et (77.7) définissent les lois de propagation des perturbations, les secondes relient les vitesses et les déformations des particules sur les caractéristiques.

4. Chargement de choc d'une barre semi-infinie. Considérons une barre semi-infinie $x \geqslant 0$ se trouvant dans l'état de repos pour $t = 0$. Soient des perturbations quelconques appliquées à l'extré-

mité $x = 0$ de la barre pour $t \geqslant 0$, et qui peuvent être de type différent. Par exemple, on peut définir sur l'extrémité $x = 0$ de la barre la vitesse

$$v = v(t)$$

ou la contrainte

$$\sigma = \sigma(t).$$

Si un corps de masse m et de vitesse initiale v_0 heurte la barre à son extrémité, on a alors:

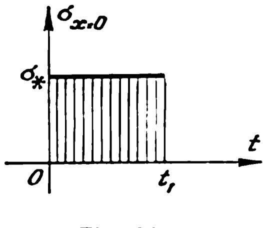


Fig. 240

$$m\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma S \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

où S est l'aire de la section de la barre, avec $v = v_0$ pour $t = 0$.

Le chargement de choc présente de l'intérêt lorsqu'une contrainte finie quelconque σ_* ou, ce qui revient au même, une déformation quelconque ε_* est brusquement appliquée à l'extrémité $x = 0$ de la barre.

Nous nous bornerons à envisager le problème essentiel suivant: au moment $t = 0$, une traction σ_* est communiquée à l'extrémité de la barre et cette traction est maintenue constante (fig. 240) pendant un certain intervalle de temps $0 \leqslant t < t_1$. La charge est totalement enlevée au moment $t = t_1$. Ainsi, les conditions initiales et les conditions aux limites ont la forme

$$\begin{aligned} &\text{pour } t=0 \quad && u(x, t) = 0 \quad && (x \geqslant 0), \\ & && \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad && (x > 0), \\ &\text{pour } x=0 \quad && \sigma = \text{const} = \sigma_* \quad && (0 \leqslant t < t_1), \\ & && \sigma = 0 \quad && (t \geqslant t_1). \end{aligned}$$

5. Propagation de l'onde élastique. Lorsque $\sigma_* \leqslant \sigma_0$ les déformations dans la barre seront élastiques, la vitesse de l'onde est alors constante ($a = a_0$) et l'équation (77.3) passe à l'équation des ondes classique. Sa solution sous la forme de d'Alembert se présente comme suit:

$$u = f(x - a_0 t) + \psi(x + a_0 t),$$

où f, ψ sont des fonctions arbitraires, déterminées par des données initiales et aux limites. Dans le plan x, t les caractéristiques

$$x - a_0 t = \text{const}, \quad x + a_0 t = \text{const}$$

représentent des familles de droites parallèles.

Quand un choc se produit, le long de la barre commence à se propager une onde directe

$$u = f(x - a_0 t).$$

Mais lorsque $x = 0$, on a $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(-a_0 t) = \varepsilon_*$, où $\varepsilon_* = \frac{1}{E}\sigma_*$. Il en découle que $f(\zeta) = \varepsilon_* \zeta + C$, c.-à-d.

$$u = \varepsilon_* (x - a_0 t) + C.$$

Etant donné que le déplacement est continu sur le front de l'onde, on a alors $u = 0$ pour $x = at$, c.-à-d. $C = 0$, et la solution sera:

$$u = \varepsilon_* (x - a_0 t).$$

Nous avons l'image suivante dans le plan x, t (fig. 241, a). Au-dessous du front $x = a_0 t$ se trouve un domaine de repos; sur le

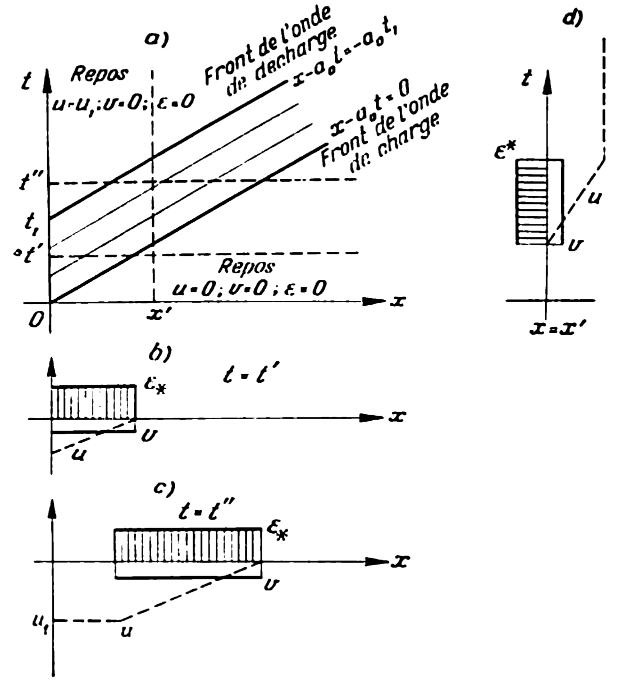


Fig. 241

front la discontinuité affecte la déformation ε, la contrainte σ et la vitesse des particules v. Au moment t' fixé, la distribution des déformations, des vitesses v et des déplacements u est montrée sur la figure 241, b; les particules de la barre, se trouvant au repos avant l'arrivée

du front de l'onde, acquièrent une vitesse constante $-\varepsilon_* a$ (de sens inverse au mouvement de l'onde) après le passage de celui-ci. Le déplacement accroît linéairement avec l'éloignement du front.

Au moment $t = t_1$, l'extrémité de la barre se décharge (*choc de décharge*) ; le front de l'onde de décharge se propage vers la droite à la vitesse a_0, laissant après son passage l'état de repos $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$, $v = 0$, $u = \text{const} = u_1$.

La déformation de la barre au moment $t'' > t_1$ est montrée sur la figure 241, *c*. L'image du changement de l'état avec le temps en un point quelconque $x = x'$ est représentée sur la figure 241, *d*.

6. Transformation des équations, ondes simples. Examinons maintenant la propagation des ondes élasto-plastiques. Lorsque $\sigma_* > \sigma_0$, la vitesse de l'onde est variable, la déformation plus grande se propageant avec une vitesse plus petite; l'onde « s'évanouit » avec le temps.

Le système d'équations différentielles non linéaires (77.4) est réductible et se transforme de manière analogue aux équations du problème plan (cf. paragraphe 33).

Prenant ξ, η pour des fonctions nouvelles, on obtient:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + a \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - a \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{77.8}$$

Ce système est linéarisé par inversion des variables; lorsque le jacobien est différent de zéro

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, t)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0,$$

on trouve aisément le système canonique:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} - a \frac{\partial t}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} + a \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0. \tag{77.9}$$

Le système canonique n'est pas équivalent aux équations initiales (77.8) du fait que, à l'inversion des variables, se perdent les solutions pour lesquelles $\Delta(\xi, \eta) = 0$. Ces solutions, jouant un rôle important, peuvent être trouvées directement. A l'aide de (77.8) on obtient:

$$\Delta(\xi, \eta) = 2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2}{a} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

d'où il résulte que les solutions perdues ont la forme:

1) $\xi = \text{const} = \xi_0$, $\eta = \text{const} = \eta_0$,
2) $\eta = \text{const} = \eta_0$,
3) $\xi = \text{const} = \xi_0$.

Dans le premier cas, il découle de (77.8) que $v = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, c.-à-d. que l'on aura un état de déformation constante et de vitesse constante (état de repos en particulier).

Dans le second cas, une des équations (77.8) est satisfaite, car $\eta = \eta_0$, et l'autre, après le changement $\xi = \eta_0 - 2\varphi(\varepsilon)$, prend la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} = \frac{d\varepsilon}{0}$$

ont des intégrales évidentes

$$\varepsilon = C_1, \quad x - at = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. La solution du système d'équations initial est

$$\eta = \varphi(\varepsilon) + v = \eta_0, \quad x - at = \Phi(\varepsilon),$$

où Φ est une fonction arbitraire. Donc, les caractéristiques sont rectilignes, et la déformation, la contrainte et la vitesse des particules sont constantes le long de chacune d'entre elles.

L'*onde centrée* pour laquelle les caractéristiques droites sont issues d'un centre O quelconque (fig. 242) est un cas particulier important.

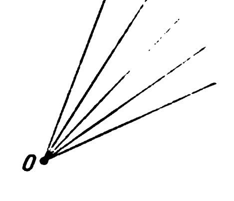


Fig. 242

Le *troisième cas* ($\xi = \text{const}$) est analogue au second à cette différence près que l'onde se déplace ici dans le sens inverse.

Les solutions exposées sont appelées *ondes simples* et sont représentées sur le plan ξ, η par des points (pour le domaine des valeurs constantes) ou par des segments de droite. Tout comme dans le cas de la déformation plane (paragraphe 33), on établit facilement le théorème important: l'*onde simple est toujours contiguë au domaine des valeurs constantes* (*en particulier, au domaine de repos*).

7. Propagation de l'onde de chargement élasto-plastique. Lorsqu'un choc est appliqué à l'extrémité de la barre, une onde simple de traction $v + \varphi(\varepsilon) = \eta_0$ commencera à se propager dans la barre; un état de repos étant en aval de l'onde, on a donc $\eta_0 = 0$ et

$$v + \varphi(\varepsilon) = 0.$$

Les diverses déformations se propageront à des vitesses différentes: les déformations élastiques à une vitesse maximale a_0 et les déformations au-delà de la limite élastique, à des vitesses plus petites. Sur le front de l'onde $x - a_0 t = 0$ (fig. 243, *a*), la déformation subit un saut de zéro à ε_0 et la vitesse des particules, de zéro à $v = -\varphi(\varepsilon_0) = -a_0\varepsilon_0$. Aussitôt après vient l'onde centrée de traction

$$v + \varphi(\varepsilon) = 0, \quad x - at = 0,$$

qui est caractérisée sur le plan x, t par un faisceau de caractéristiques droites, issues de l'origine des coordonnées, et qui est appelée parfois onde de Riemann. La vitesse de propagation de la déformation est constante le long de chaque rayon ; cette vitesse diminue évidemment lorsque l'on passe aux caractéristiques de pente plus accusée.

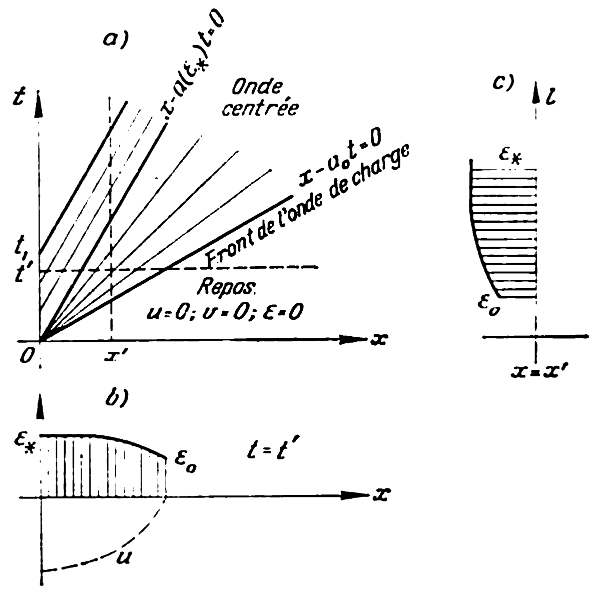


Fig. 243

Dès que la déformation maximale ε_* est atteinte, l'état est fixé et une perturbation constante ε_* se propage plus loin à partir de l'extrémité de la barre à une vitesse minimale $a(\varepsilon_*)$.

Si l'on observe l'état en un point fixe $x = x'$ (fig. 243, *c*), on a alors un état de repos pour $t < \frac{x'}{a_0}$; le front de l'onde arrive au moment $t = \frac{x'}{a_0}$; la déformation ε, la contrainte σ et la vitesse v subissent le saut décrit précédemment ; ensuite, la déformation plastique apparaît et croît progressivement dans l'intervalle de temps $\frac{x'}{a_0} < t < \frac{x'}{a(\varepsilon_*)}$; cette dernière atteint sa valeur maximale au moment $t = \frac{x'}{a(\varepsilon_*)}$ pour ne plus changer ensuite. La distribution des déformations et des déplacements le long de la barre en un moment t' quelconque est montrée sur la figure 243, *b*.

Nous ferons deux remarques pour conclure. Primo, l'image décrite de la déformation n'est vraie que jusqu'au moment où commence à se manifester la décharge ; secundo, on a étudié ici la propagation de l'*onde de traction* ; pour un choc de compression, les signes de la déformation ε, de la vitesse v et du déplacement u seront inversés.

8. **Onde de décharge.** Au moment $t = t_1$, une nouvelle onde dite *onde de décharge* commence à se propager dans la direction des x positifs.

Dans le domaine de décharge, les *différences* des contraintes et des déformations sont liées par la loi de Hooke

$$\sigma - \sigma_m = E(\varepsilon - \varepsilon_m), \tag{77.10}$$

où σ_m, ε_m sont les valeurs de la contrainte et de la déformation, atteintes dans la section donnée de la barre vers le moment du début de la décharge (fig. 239, *a*) ; ces grandeurs sont les fonctions inconnues de x. Portant (77.10) dans l'équation du mouvement (77.2), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x),$$

où

$$\psi(x) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_m - E\varepsilon_m)$$

est inconnue.

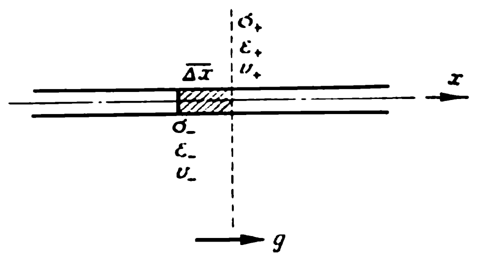


Fig. 244

Il importe de construire pour cette équation une solution telle qu'elle s'accorde avec la solution de l'équation différentielle du chargement (77.3) ; la frontière de séparation des solutions n'est pas connue d'avance. Nous passerons sans nous arrêter sur ce problème aux limites particulier (cf. [24]) car on n'en a pas besoin pour le cas simple envisagé de la décharge de choc.

Montrons que l'*onde de décharge se déplace à la vitesse de l'onde élastique* a_0. Considérons les conditions cinématique et dynamique de compatibilité sur le front de l'onde de décharge. Au passage du front la contrainte et la déformation subissent des discontinuités

$$\sigma_+ - \sigma_- = [\sigma],$$

$$\varepsilon_+ - \varepsilon_- = [\varepsilon],$$

où σ_+, ε_+, σ_-, ε_- sont les valeurs de σ, ε en aval et en amont du front (fig. 244) qui se déplace à une vitesse g quelconque. Conformément à la loi de Hooke

$$[\sigma] = E[\varepsilon]. \tag{77.11}$$

La condition de continuité du déplacement (*condition de compatibilité cinématique*) doit être vérifiée sur le front de l'onde. Considérons l'élément d'une barre de longueur Δx (avant le passage de l'onde de décharge); la longueur de cet élément après le passage du front sera:

$$\overline{\Delta x} = \Delta x - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)\,\Delta x.$$

D'autre part $\left(\frac{\Delta x}{g}\right.$ est le temps que met l'onde à parcourir le segment $\left.\Delta x\right)$,

$$\Delta x = \Delta x + (v_+ - v_-)\frac{\Delta x}{g}.$$

Les discontinuités de la déformation et de la vitesse des particules de la barre sont donc liées par la relation

$$-[v] = g\,[\varepsilon]. \qquad (77.12)$$

Ensuite, la variation du mouvement de l'élément Δx lors du passage de l'onde de décharge doit obéir aux lois de la dynamique (*condition de compatibilité dynamique*); suivant le théorème sur la quantité de mouvement:

$$-\rho\Delta x\,[v] = [\sigma]\frac{\Delta x}{g}. \qquad (77.13)$$

Eliminant de cette relation les discontinuités $[v]$, $[\sigma]$ à l'aide de (77.11), (77.12), on trouve que l'onde de décharge se propage à la vitesse de l'onde élastique:

$$g = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = a_0.$$

Noterons que la théorie générale des conditions de compatibilité cinématiques et dynamiques et ses applications à la propagation des ondes dans les milieux élastique et plastique sont exposées dans le livre de T. Thomas [61].

9. Déformation résiduelle. La déformation résiduelle est calculée sur la base de la relation (77.11); la charge étant totalement enlevée, on a $\sigma_- = 0$. Mais alors la déformation résiduelle est égale à

$$\varepsilon_- = \varepsilon_+ - \frac{\sigma_+}{E}.$$

Le front de l'onde de décharge, qui se déplace à la vitesse maximale a_0, devance les ondes simples; les plus lentes de ces ondes étant associées aux déformations plastiques maximales, la valeur de la déformation résiduelle diminue en amont du front au fur et à mesure de la propagation de l'onde de décharge le long de la barre.

Dans le plan x, t, cette image se présente comme suit (fig. 245). La distance entre le front de charge et celui de décharge, qui se

déplacent à une vitesse constante a_0, est constante (fig. 245, *a*). Les ondes simples (éventail sur la figure 245) « s'atténuent » de plus en plus avec le temps et, par suite, il y a de moins en moins de déformations plastiques sur le segment entre les fronts. Ainsi, la déformation résiduelle tend vers zéro au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité de la barre (fig. 245, *c*).

Les conclusions théoriques sont confirmées de manière satisfaisante par les résultats expérimentaux [24, 50, 64, 70, 74] Remarquons

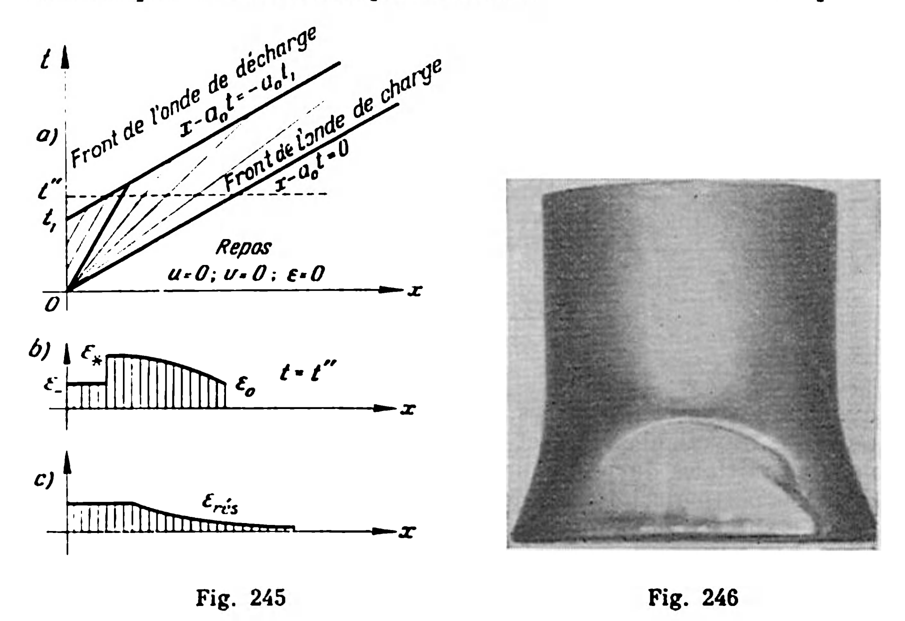


Fig. 245 Fig. 246

que la supposition sur la petitesse des déformations n'est pas essentielle. Les calculs relatifs à la géométrie de la barre déformée au choc concordent bien avec les résultats expérimentaux (fig. 246).

78. SCHÉMA D'UN CORPS RIGIDE-PLASTIQUE DANS LES PROBLÈMES DYNAMIQUES. QUELQUES THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

1. Sur le schéma du corps rigide-plastique dans les problèmes dynamiques. S'il est admissible de négliger l'influence de la vitesse de déformation, la relation entre la contrainte et la déformation peut être représentée conventionnellement par la courbe σ-ε, montrée sur la figure 247, *a* ; le segment initial linéaire est élastique. Lorsque les déformations plastiques sont considérables, on peut négliger les déformations élastiques, c.-à-d. comme pour les pro-

blèmes de la statique, partir du schéma du corps rigide-plastique. On vient alors à la courbe montrée sur la figure 247, *b*. Si l'écrouissage est négligeable, il est rationnel de partir du schéma du corps rigide-plastique parfait (fig. 247, *c*).

Le fait de négliger les déformations élastiques simplifie notablement la solution et permet d'obtenir des résultats simples dans une série de problèmes dynamiques.

Le schéma rigide-plastique est valable *si le travail plastique est sensiblement plus grand (disons d'un ordre de grandeur) que l'énergie élastique*. Cette condition découle des solutions de certains problèmes

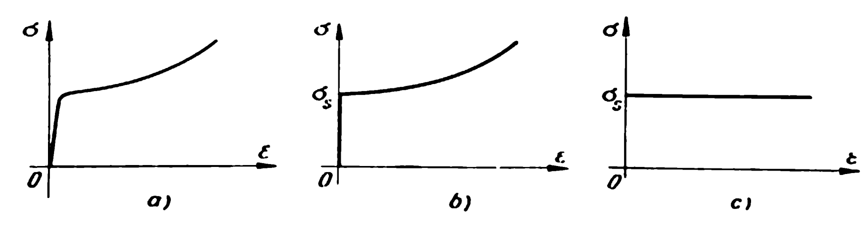


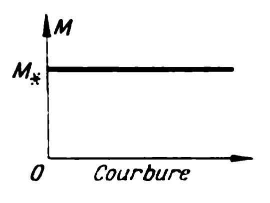
Fig. 247

dynamiques élasto-plastiques. Il va de soi qu'une estimation rigoureuse du travail plastique et de l'énergie élastique sur la base des données initiales du problème est pratiquement impossible. Cependant, les particularités du problème envisagé permettent d'habitude de voir s'il est possible de négliger la déformation élastique. Par exemple, si l'on a besoin de déterminer les changements plastiques considérables de la géométrie du corps résultant d'un choc, on peut généralement exclure les déformations élastiques de l'examen. Un exemple d'un autre type est le problème relatif à une forte explosion (sphérique) dans un milieu élasto-plastique; bien qu'ici le travail plastique puisse dépasser de beaucoup l'énergie élastique, on doit néanmoins tenir compte des déformations élastiques s'il y a lieu de connaître l'intensité des ondes élastiques obtenues à l'explosion.

Le schéma rigide-plastique est devenu d'une application courante dans les problèmes relatifs à l'effet de la charge impulsive sur les poutres, plaques circulaires, coques qui sont d'un intérêt pratique considérable. Ainsi, la poutre reste rigide tant que le moment fléchissant M n'a pas atteint la valeur limite M_*. Par la suite, des articulations plastiques (ou zones plastiques), dans lesquelles $|M| = \text{const} = M_*$ (fig. 248), se forment dans la poutre. Etudiant le mouvement des portions rigides et plastiques de la poutre, compte tenu des conditions à leurs frontières, on peut déterminer les déformations résiduelles de la poutre et la durée de la déformation. La

simplicité relative des équations du mouvement de la poutre rigide-plastique permet de déterminer les petits fléchissements aussi bien que les fléchissements importants de celle-ci.

Cependant, il ne faut pas oublier que l'application du schéma rigide-plastique dans les problèmes dynamiques ne conduit en général qu'à une bonne concordance qualitative avec les résultats expérimentaux pour les déplacements; pour ce qui est des divergences quantitatives, elles peuvent être considérables.



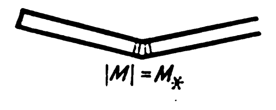


Fig. 248

Les premières études relatives à l'application du schéma rigide-plastique dans les problèmes dynamiques sont dues à A. Gvozdev (1943) et G. Taylor (1946). Le développement intense de cette direction commença un peu plus tard après la publication des travaux de E. Lee et P. Symonds (1952), W. Prager et H. Hopkins (1954) et d'autres auteurs sur la dynamique des poutres et plaques rigides-plastiques (cf. [64,135,164,185]).

2. Quelques théorèmes énergétiques. Dans la dynamique du corps rigide-plastique, on n'a pas encore trouvé des théorèmes assez généraux qui permettraient d'obtenir des estimations efficaces pour les solutions (de façon analogue aux théorèmes relatifs à la charge limite, chapitre VIII). Quelques théorèmes simples de caractère particulier ont été récemment établis par J. Martin [171].

Soient, au moment initial $t = 0$, v_i^0 les vitesses connues des points du corps rigide-plastique envisagé; lorsque $t > 0$, seront nulles sur la surface du corps soit les forces de surface X_{ni}, soit les vitesses v_i. La configuration du corps est supposée *peu variable* à la déformation; les forces massiques ne sont pas considérées pour des raisons de simplicité.

Pour les hypothèses avancées, on connaît l'énergie cinétique initiale du corps, qui lors du mouvement ultérieur est totalement dépensée pour la déformation plastique de ce corps étant donné que les forces extérieures ne produisent aucun travail pour $t > 0$. Il est naturel que le mouvement cesse à un certain moment $t = \bar{t}$.

T h é o r è m e 1. *Le temps de la déformation $\bar{t}$ a une frontière inférieure*

$$\bar{t} \geqslant \frac{\int \rho v_i^0 v_i' \, dV}{\int \sigma_{ij}^* \xi_{ij}' \, dV}, \tag{78.1}$$

où ρ est la densité du corps, v_i' le champ de vitesses cinématiquement admissible *indépendant du temps*, σ_{ij}^* sont les contraintes, déterminées d'après les vitesses de déformation ξ_{ij}' conformément à la loi

associative de l'écoulement plastique (cf. paragraphe 16)

$$\xi_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}},\quad \lambda\geqslant 0,$$

où $f(\sigma_{ij})-K=0$ est l'équation de la surface d'écoulement.

Désignons par D' la puissance de la déformation plastique cinématiquement possible, qui figure dans le dénominateur du second membre de (78.1).

D é m o n s t r a t i o n. Conformément à l'équation générale de la mécanique, on a (le point désigne la dérivée par rapport au temps):

$$\int(-\rho\dot{v}_i)v_i'\,dV=\int\sigma_{ij}\xi_{ij}'\,dV,$$

où σ_{ij}, $\dot{v}_i$ sont les contraintes et les accélérations réelles. En vertu du principe local du maximum $(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})\,\xi_{ij}'\geqslant 0$ (cf. paragraphes 64, 65), donc

$$\int\sigma_{ij}\xi_{ij}'\,dV\leqslant\int\sigma_{ij}^*\xi_{ij}'\,dV\equiv D'.$$

Ainsi,

$$\int(-\rho\dot{v}_i)v_i'\,dV\leqslant D'.$$

Intégrant cette inégalité par rapport au temps de $t=0$ à $t=\bar{t}$, on trouve:

$$\left[-\int\rho v_iv_i'\,dV\right]_0^{\bar{t}}\leqslant\bar{t}D'.$$

Tenant compte des valeurs initiales de v_i et supposant $v_i|_{t=\bar{t}}=0$, on aboutit à l'inégalité (78.1).

T h é o r è m e 2. *Pour les déplacements superficiels $\bar{u}_i$ durant le temps de la déformation est valable l'estimation supérieure*

$$\int X_{ni}'\bar{u}_i\,dS\leqslant\int\frac{1}{2}\rho v_i^{0\,2}\,dV,\tag{78.2}$$

où X_{ni}' sont des efforts indépendants du temps et correspondant à l'état de contrainte d'écoulement statiquement possible σ_{ij}' (cf. paragraphe 64,5), c.-à-d. $f(\sigma_{ij}')-K\leqslant 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Conformément à l'équation générale de la mécanique, on a:

$$\int(-\rho\dot{v}_i)v_i\,dV=\int\sigma_{ij}\xi_{ij}\,dV.$$

Suivant le principe local du maximum

$$\int\sigma_{ij}\xi_{ij}\,dV\geqslant\int\sigma_{ij}'\xi_{ij}\,dV.$$

Mais en vertu de (64.6)

$$\int \sigma'_{ij}\xi_{ij}\,dV = \int X'_{ni}v_i\,dS.$$

Par conséquent,

$$-\frac{d}{dt}\int \frac{\rho}{2}v_i^{\circ}\,dV \geqslant \int X'_{ni}v_i\,dS.$$

Intégrant cette inégalité par rapport au temps de $t=0$ à $t=\bar{t}$ et tenant compte du fait que $u_i = 0$ et $v_i = v_i^0$ pour $t = 0$, et $u_i = \bar{u}_i$, $v_i = 0$ pour $t = \bar{t}$, on aboutit à l'inégalité recherchée.

On peut sans peine énoncer les théorèmes cités en termes de forces et déplacements généralisés, ce qui est commode pour la considération des barres, plaques et enveloppes.

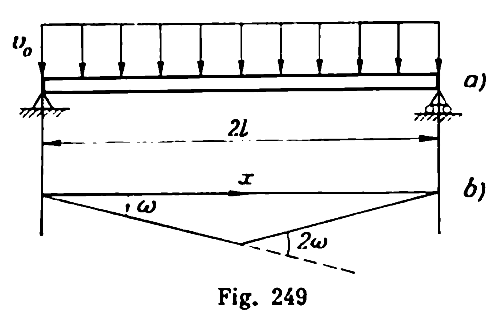


Fig. 249

La comparaison des estimations obtenues d'après les théorèmes de Martin et de quelques résultats précis montre que le temps de la déformation $\bar{t}$ est défini avec une petite erreur; quant à l'estimation des déplacements, elle est sensiblement majorée.

Le point le plus faible des théorèmes démontrés est l'hypothèse de la petitesse des changements de la forme du corps, qui s'accorde mal avec les conditions d'applicabilité du schéma du corps rigide-plastique dans les problèmes dynamiques.

3. Exemple. Soit une poutre simplement appuyée (fig. 249, *a*) qui, au moment $t = 0$, subit l'action d'une charge impulsive communiquant à toutes les sections de la poutre une vitesse initiale constante v_0. Prenons comme champ cinématiquement admissible de vitesse indépendant du temps la distribution triangulaire montrée sur la figure 249, *b*. On a alors une articulation plastique au milieu de la poutre dont chaque moitié pivote comme un solide par rapport à l'appui à la vitesse angulaire ω. Ce qui donne alors $v' = \omega x$, et $D' = 2M_*\omega$. Il est aisé de voir que

$$\int \rho v_i^0 v'_i\,dV = 2\int mv_0\omega x\,dx = mv_0 l^2\omega,$$

où m est la masse d'une unité de longueur de la poutre. Conformément à l'inégalité (78.1), on obtient:

$$\bar{t} \geqslant \frac{mv_0 l^2}{2M_*}, \tag{78.3}$$

ce qui coïncide avec la valeur exacte trouvée par P. Symonds. Calculons ensuite le second membre de l'inégalité (78.2)

$$\int \frac{1}{2} \rho v_i^{0\,2} \, dV = 2 \int_0^l \frac{m v_0^2}{2} \, dx = m l v_0^2.$$

Prenons comme charge statiquement possible l'effort concentré P' appliqué au milieu de la poutre et correspondant à son état limite, c.-à-d. $P' = \frac{2}{l} M_*$. Il résule alors de (78.2) l'estimation pour la flèche $\bar{u}$ au milieu de la poutre

$$\bar{u} \leqslant \frac{1}{2} \frac{m l v_0^2}{M_*}. \tag{78.4}$$

Cette estimation est une fois et demie supérieure à la valeur précise.

4. **Considérations finales.** Les théorèmes exposés ont été étendus par J. Martin aux corps présentant un écrouissage et une viscosité.

Dans l'étude de V. Tamouj [131] récemment publiée, il est montré que les accélérations réelles minimisent une certaine fonctionnelle. Ce principe peut être appliqué en particulier pour obtenir des solutions approchées; cf. également [174].

79. CHOC LONGITUDINAL D'UNE BARRE RIGIDE-PLASTIQUE CONTRE UN OBSTACLE FIXE

Considérons, à la suite de Taylor [191], le problème relatif au choc normal d'une barre cylindrique (de longueur initiale l_0), se déplaçant à la vitesse initiale v_0, contre un obstacle indéformable fixe. Soit la courbe conventionnelle connue de la compression statique uniaxiale d'un cylindre $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, où σ, ε sont la contrainte et la déformation rapportées respectivement à l'aire initiale F_0 et à la longueur initiale l_0 (fig. 247, *a*); négligeant les déformations élastiques, on obtient la courbe montrée sur la figure 247, *b*; l'écoulement plastique commence alors pour la valeur $\sigma = \sigma_s$ (« limite d'écoulement »).

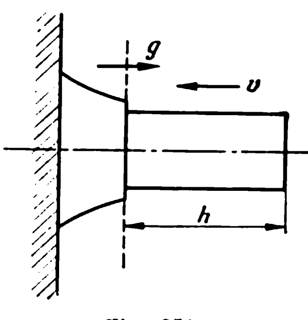


Fig. 250

Supposons que le front d'onde de la déformation plastique se propage à partir de l'obstacle fixe à la vitesse g en laissant en amont un matériau en repos; à droite du front le matériau est rigide et se déplace comme un solide (fig. 250) à une vitesse décroissante v.

L'aire de la section transversale et la contrainte changent par saut sur le front : on a F_0 et σ_s en aval du front (car le matériau devient y devient presque plastique), et F et σ en amont.

Il découle de l'équation d'incompressibilité que

$$gF = (v + g)\, F_0. \tag{79.1}$$

La déformation en amont du front peut être évaluée comme suit : en une unité de temps une colonne de la partie non déformée de longueur $v + g$ se transforme en une colonne du matériau déformé de longueur g. La déformation relative de la compression sera alors

$$\varepsilon = -\frac{g-(v+g)}{v+g} = \frac{v}{v+g}. \tag{79.2}$$

Soit h la longueur de la partie non déformée de l'éprouvette au moment t ; il est évident que

$$-\frac{dh}{dt} = v + g. \tag{79.3}$$

Lorsque le front de l'onde passe par l'élément de la barre $dx = -dt\,(v + g)$, la vitesse de cette dernière s'annule. D'après le théorème de la quantité de mouvement

$$\rho F_0\,(v + g)\, dt \cdot v = F_0\,(\sigma - \sigma_s)\, dt,$$

où ρ est la densité supposée invariable ; de la sorte

$$\rho\,(v + g)\, v = \sigma - \sigma_s. \tag{79.4}$$

Etablissons l'équation du mouvement de la partie non déformée de la barre ; cette partie ayant une longueur variable h et, par conséquent, une masse variable, il convient d'ajouter dans le second membre de l'équation

$$\rho h F_0 \frac{dv}{dt} = P$$

la force de réaction de la masse séparée aux forces appliquées. Mais le matériau de la barre devenant presque plastique en aval du front de l'onde, on peut donc considérer que la « force sommaire » P atteint la valeur $-\sigma_s F_0$. Ainsi, l'équation du mouvement de la partie non déformée de la barre a la forme

$$\rho h \frac{dv}{dt} = -\sigma_s. \tag{79.5}$$

Il résulte de (79.2) et (79.3) :

$$dt = -\frac{\varepsilon}{v}\, dh,$$

et l'on obtient de (79.5) en multipliant par v :

$$\frac{1}{2}\, d\,(\rho v^2) = \sigma_s \varepsilon\, d\,(\ln h).$$

Mais, en vertu de (79.2) et (79.4), on a:

$$\rho v^2 = \varepsilon (\sigma - \sigma_s). \qquad (79.6)$$

Donc,

$$d [\varepsilon (\sigma - \sigma_s)] = 2\sigma_s \varepsilon d (\ln h).$$

D'où, pour les conditions initiales

$$h = l_0, \quad v = v_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

on obtient:

$$\ln \frac{h}{l_0} = \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\left[\varepsilon \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} - 1\right)\right]}{\varepsilon}. \qquad (79.7)$$

La valeur de ε_0 est déterminée à partir de (79.6):

$$\rho v_0^2 = \varepsilon_0 (\sigma_0 - \sigma_s), \qquad \sigma_0 = \sigma(\varepsilon_0).$$

La courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ étant connue, l'équation (79.7) définit alors la déformation résiduelle ε en fonction de la longueur h.

Conformément à (79.6), la vitesse v est trouvée comme une fonction de h et, d'après la relation (79.2), on trouve la vitesse du front de l'onde plastique g comme une fonction de h. Finalement, la dépendance du temps est déterminée d'après l'équation (79.3). Calculée de la sorte la configuration de la barre déformée au choc s'accorde bien avec les résultats expérimentaux (fig. 246) et avec les calculs effectués suivant une théorie plus exacte qui tient compte de l'élasticité du matériau.

80. FLEXION D'UNE POUTRE RIGIDE-PLASTIQUE SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE IMPULSIVE

1. Sur le schéma d'une poutre rigide-plastique. La poutre reste rigide tant que le moment fléchissant M n'atteint pas sa valeur limite M_*. Des articulations plastiques fixes (stationnaires) ou mobiles (non stationnaires) (fig. 251, *b*) ou, enfin, des zones plastiques (fig. 251, *c*) peuvent alors prendre naissance. On aura, entre les articulations et les zones plastiques, des segments rigides pour lesquels $|M| < M_*$. Au cours du mouvement, la position des articulations et des zones plastiques est généralement sujette à des variations. Des charges dynamiques intenses conduisent souvent aux déformations considérables de la poutre. Il est naturel que les efforts longitudinaux qui peuvent apparaître en l'absence de déplacements des appuis, revêtent une importance particulière. Ci-après nous considérons les problèmes simples dans lesquels les efforts axiaux sont absents.

Le schéma rigide-plastique conduit dans les problèmes dynamiques à des résultats satisfaisants si le travail plastique dépasse sensiblement (disons d'un ordre de grandeur) l'énergie élastique maximale de la poutre $\frac{M_*^2 l}{2EJ}$, où J est le moment d'inertie de la section transversale, l la longueur de la poutre. Cette condition est vérifiée d'habitude pour des flexions plastiques sensibles de la poutre.

2. Conditions de compatibilité cinématique. Dirigeons l'axe des x suivant l'axe de la poutre et soit l la longueur (ou demi-longueur) de la poutre. Introduisons les notations suivantes: $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\omega = \dot{\theta}$, $\dot{\omega}$ sont respectivement l'angle de pente de la tangente à l'axe de la poutre, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire; $v = \dot{u}$, $\dot{v}$ sont respectivement la vitesse du fléchissement et son accélération. Désignons ensuite par ξl la distance entre l'extrémité gauche de la poutre et l'articulation plastique (fig. 251, *a*) ou entre cette extrémité et la zone plastique (fig. 251, *b*); désignons par $g = l\dot{\xi}$ la vitesse à laquelle se déplace l'articulation (ou à laquelle se propage la zone plastique). Nous conviendrons de marquer par l'indice — les valeurs situées à gauche de l'articulation (à gauche de la frontière de la zone plastique) et par l'indice + les valeurs situées à droite.

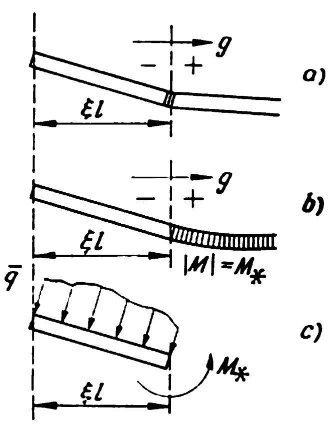


Fig. 251

Les conditions de compatibilité cinématique doivent être vérifiées sur l'articulation (sur la frontière) $x = l\xi$. Ce sera avant tout la condition évidente de continuité du fléchissement:

$$u_- = u_+. \tag{80.1}$$

La dérivation de cette relation par rapport au temps donne:

$$\frac{\partial u_-}{\partial t} + \frac{\partial u_-}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u_+}{\partial t} + \frac{\partial u_+}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

ou

$$v_- - v_+ = -g\,(\theta_- - \theta_+).$$

Ici le second membre est nul. En effet, on a $g = 0$ pour une articulation plastique immobile; si celle-ci se déplace à une vitesse finie, les sections voisines ne parviennent pas à tourner d'un angle fini durant l'instant que met l'articulation à franchir la section mentionnée. Ainsi donc,

$$v_- = v_+. \tag{80.2}$$

Procédant maintenant à la dérivation de cette relation par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{v}_- - \dot{v}_+ = -g(\omega_- - \omega_+), \tag{80.3}$$

c.-à-d. que la discontinuité de l'accélération du fléchissement est proportionnelle à la discontinuité de la vitesse angulaire.

3. Sur les équations du mouvement de la poutre rigide-plastique. L'analyse du mouvement de la poutre rigide-plastique est fondée sur l'examen conjoint des mouvements de ses parties rigides et plastiques.

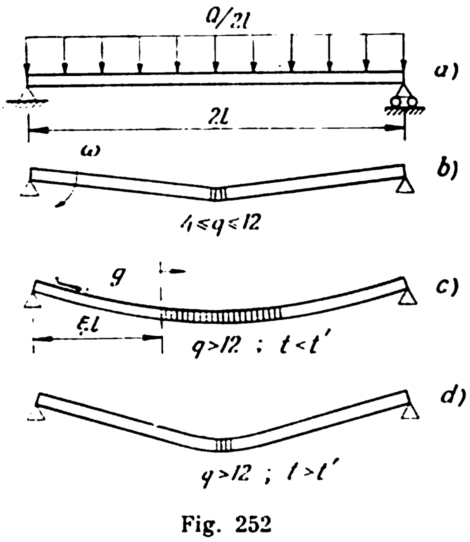


Fig. 252

L'équation du mouvement des points de la zone plastique est simple. D'après la condition d'écoulement, le moment fléchissant y est constant (M = const = M_*), l'effort tranchant est donc nul et l'équation du mouvement a la forme

$$m\ddot{u} = \overline{q}(x, t), \tag{80.4}$$

où $\overline{q}(x, t)$ est la charge répartie.

Il est également facile d'écrire l'équation du mouvement du *tronçon rigide* (fig. 251, *c*) pour une *articulation immobile.* Si l'articulation n'est pas stationnaire, la longueur du tronçon rigide (et par conséquent sa masse $m\xi l$) varie ; il est donc nécessaire, en général, de tenir compte des forces réactives apparaissant par suite de la séparation des particules du corps (ou de l'adjonction des particules à celui-ci). On sait que ces forces sont proportionnelles à la différence des vitesses des particules et du corps. Dans le problème considéré du mouvement de la poutre rigide-plastique, cette différence, en vertu de (80.2), est nulle à la frontière. Donc, il n'y a pas de forces réactives complémentaires et, en général, on peut partir des énoncés ordinaires des lois de la mécanique.

4. Exemple de la poutre sur appuis articulés soumise à une charge impulsive uniformément répartie. Considérons le mouvement d'une poutre sur appuis articulés (fig. 252, *a*) éprouvant l'action d'une charge uniformément répartie $\overline{q} = Q/2l$ du type explosif ; cette dernière agit dans l'intervalle du temps $(0, \tau)$ durant lequel elle est

constante (fig. 253, *a*) ou décroît (fig. 253, *b*), et on suppose que

$$\int_0^t Q\,dt \geqslant tQ(t). \tag{80.5}$$

Introduisons le paramètre sans dimensions de la charge $q = QI/M_*$.

La poutre ne se déformera pas tant que le moment fléchissant maximal n'aura pas atteint sa valeur limite M_*. Cela aura lieu,

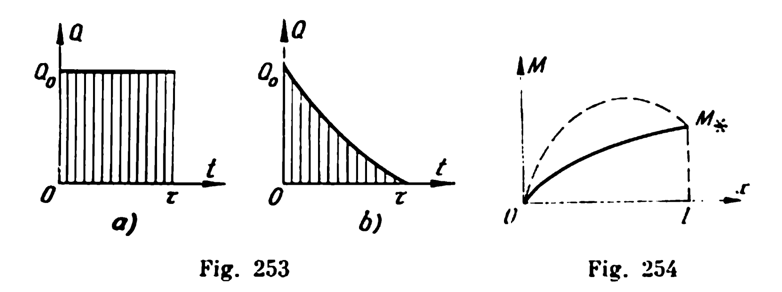


Fig. 253

Fig. 254

comme il est aisé de le voir, pour la section moyenne de la poutre lorsque $q = 4 \equiv q_1$. Ainsi, la poutre reste rigide si la *charge est faible* ($q < 4$).

Mouvement d'une poutre à charge moyenne ($4 \leqslant q \leqslant 12$). Lorsque la charge dépasse un peu q_1, les moitiés rigides de la poutre tournent sur les appuis (fig. 252, *b*) pour une articulation plastique fixe au milieu. L'équation de la rotation de la moitié gauche de la poutre a la forme

$$\frac{ml^3}{M_*}\dot{\omega} = \frac{3}{4}(q-4). \tag{80.6}$$

La charge atteignant instantanément la valeur maximale, les conditions initiales sont donc nulles, notamment:

$$u = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{pour } t = 0. \tag{80.7}$$

L'équation (80.6) garde sa signification tant que le moment fléchissant dans la moitié rigide de la poutre n'excède nulle part M_*. Le moment fléchissant est défini par une charge uniformément répartie d'intensité $Q/2l$, la charge d'inertie $- m\dot{\omega}x$ et le moment limite M_* dans l'articulation. L'épure du moment fléchissant est montrée sur la figure 254 en ligne pleine pour des petites valeurs de l'accélération angulaire et en pointillé pour des grandes accélérations. Dans ce dernier cas, l'effort tranchant est négatif au voisinage de l'articulation, ce qui aura lieu, comme il est facile de le voir, pour $ml\dot{\omega} > Q/2l$. L'équation (80.6) est donc vraie pour

$ml\dot{\omega} < Q/2l$. En posant $ml\dot{\omega} = Q/2l$ dans l'équation (80.6), on trouvera la charge maximale $q = 12 \equiv q_2$ au-dessous de laquelle le mouvement se réalise avec une articulation concentrée au milieu de la poutre.

Intégrant l'équation (80.6), on obtient :

$$\frac{ml^3}{M_*}\omega = \frac{3}{4}I(t) - 3t \qquad \left(I(t) = \int_0^t q\,dt\right). \tag{80.8}$$

Le mouvement cessera au moment $t = \bar{t}$, quand s'annulera la vitesse angulaire ; on aura alors :

$$I(\bar{t}) - 4\bar{t} = 0. \tag{80.9}$$

Intégrant ensuite l'équation (80.8) et supposant $t = \bar{t}$, on trouve la forme de la poutre déformée (point d'inflexion au milieu, fig. 252, *b*) définie par l'angle $\bar{\theta} = \theta(\bar{t})$:

$$\frac{ml^3}{M_*}\bar{\theta} = \frac{3}{4}\int_0^{\bar{t}} I(t)\,dt - \frac{3}{32}I^2(\bar{t}). \tag{80.10}$$

Pour l'impulsion rectangulaire (fig. 253, *a*), on aura :

$$\frac{ml^3}{M_*}\bar{\theta} = \frac{3}{32}(q_0 - 4)\,q_0\tau^2 \qquad \left(q_0 = \frac{Q_0 l}{M_*} \leqslant 12\right). \tag{80.11}$$

La flèche maximale est égale à $\bar{u} = l\bar{\theta}$.

Mouvement de la poutre sous une charge importante ($q > 12$). Dans ce cas il se forme au chargement une zone plastique $|x| \geqslant \xi l$ (fig. 252, *c*) dans laquelle le moment fléchissant est constant. Dans des conditions déterminées, cette zone se réduit (cf. ci-après) en se contractant en un moment quelconque $t = t'$ à un point qui s'identifie à l'articulation plastique au milieu. Lorsque $t > t'$, il se produit un mouvement avec une articulation fixe (fig. 252, *d*).

Considérons le *mouvement pour* $t < t'$. Dans la zone plastique, il est décrit par l'équation (80.4), avec la charge $\bar{q} = Q/2l$ qui est indépendante de x ; le tronçon plastique se déplace donc vers le bas sans se déformer (fig. 252, *c*). Supposons tout d'abord que la charge $Q(t)$ augmente et trouvons ξ. Pour un élément sur la frontière $x = \xi l$ on a :

$$ml\xi\dot{\omega} - \frac{Q}{2l} = 0. \tag{80.12}$$

La rotation de la partie rigide est définie par l'équation

$$\frac{ml^3\xi^3}{M_*}\dot{\omega} = \frac{3}{4}(q\xi^2 - 4), \tag{80.13}$$

qui est analogue à l'équation (80.6). Il résulte des équations écrites que

$$q\xi^2-12=0, \tag{80.14}$$

$$4\sqrt{3}\frac{ml^3}{M_*}\dot{\omega}=q^{3/2}. \tag{80.15}$$

Les équations présentées sont valables pour une charge croissante $Q_*(t)$, quand $g < 0$ et quand la partie gauche de la poutre $x < l\xi$ reste droite. Conformément aux équations (80.4) et (80.13), le saut d'accélération à la frontière est alors égal à :

$$\dot{v}_- - \dot{v}_+ = \frac{M_*}{4ml^2}\left(q-\frac{12}{\xi^2}\right)=0$$

en se réduisant à zéro en vertu de (80.14). Le saut des vitesses angulaires est nul lui aussi.

Supposons maintenant que la charge $Q\ (t)$ décroît, alors

$$q\xi^2-12 \leqslant 0, \tag{80.16}$$

sinon la condition de compatibilité (80.3) ne sera pas valable. Etablissons l'équation des moments de la quantité de mouvement de la moitié de la poutre $0 \leqslant x \leqslant l$ relativement à l'appui gauche :

$$\int_0^t \frac{Ql}{4}\,dt - M_* t = \int_0^l mvx\,dx. \tag{80.17}$$

Lorsque $x \leqslant \xi l$, on a $v=\omega x$, pour $x \geqslant \xi l$, on a conformément à (80.4) $mv=\int_0^t Q/2l\,dt=\frac{M_*}{2l^2}I\ (t)$ et l'équation (80.17) prend donc la forme

$$\frac{1}{4}\xi^2 I\,(t)-t=\frac{ml^3\xi^3}{3M_*}\omega. \tag{80.18}$$

Dérivant cette équation par rapport au temps et appliquant la relation (80.13), on obtient que $\frac{1}{2}I\ (t)=\frac{ml^3\xi}{M_*}\omega$. Il est alors facile de voir que

$$\xi^2=\frac{12t}{I\,(t)}, \tag{80.19}$$

$$\left(\frac{ml^3}{M_*}\right)^2\omega^2=\frac{I^3\,(t)}{48t}. \tag{80.20}$$

Recherchons les conditions pour lesquelles le régime considéré est réalisable. Dérivant (80.19), on trouve que, par suite de la condition (80.5) que l'on peut écrire sous la forme $I\ (t) \geqslant tq$, on aura :

$$2\xi\dot{\xi}=\frac{12}{I}\left(1-\frac{tq}{I}\right)\geqslant 0,$$

autrement dit, $g \geqslant 0$. Eliminant ici la grandeur I à l'aide de (80.19), on trouve:

$$l\xi\,(q\xi^2 - 12) = -24gt,$$

c.-à-d. que l'inégalité (80.16) a vraiment lieu.

Faisant $t \to 0$ dans la relation (80.19), on aboutit à la position initiale de la frontière

$$q_0\xi_0^2 = 12, \quad \xi_0 = \xi(0). \tag{80.21}$$

Au moment t' on a $\xi = 1$, par conséquent,

$$I(t') - 12t' = 0. \tag{80.22}$$

A ce moment la vitesse angulaire ω' peut être trouvée à partir de (80.20):

$$\frac{ml^3}{M_*}\omega' = 6t', \tag{80.23}$$

et le déplacement du point médian u' par intégration de l'équation pour $\dot{u}'$:

$$\frac{ml^2}{M_*}u' = \frac{1}{2}\int_0^{t'} I(t)\,dt. \tag{80.24}$$

Mouvement pour $t > t'$. A ce stade final du mouvement, la vitesse angulaire de la rotation de la moitié nouvellement « durcie » de la poutre est définie par l'équation précédente (80.6), mais avec la condition initiale: $\omega = \omega'$ pour $t = t'$.

Après avoir trouvé la solution correspondante et appliqué les relations (80.22), (80.23), on obtient:

$$\frac{ml^2}{M_*}\omega = \frac{3}{4}I(t) - 3t \quad (t \geqslant t'). \tag{80.25}$$

Pour $\omega = 0$, le mouvement se termine au moment $\bar{t}$ défini par la relation

$$I(\bar{t}) - 4\bar{t} = 0. \tag{80.26}$$

Intégrant l'équation (80.25), on trouve l'angle de rotation accumulé au stade considéré du mouvement:

$$\frac{ml^3}{M_*}\theta = \frac{3}{4}\int_{t'}^{t} I(t)\,dt - \frac{3}{2}(t^2 - t'^2).$$

Déterminant maintenant le déplacement $l\theta$ au moment final $\bar{t}$ et cumulant le déplacement précédent (80.24), on obtient le dépla-

cement total du point médian $\bar{u}$:

$$\frac{ml^2}{M_*}\bar{u}=\frac{3}{4}\int_{t'}^{\bar{t}} I(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{t'} I(t)\,dt-\frac{3}{32}\left[I^2(\bar{t})-\frac{1}{9}I^2(t')\right]. \qquad (80.27)$$

Une brisure se forme au point médian de la poutre au stade final du mouvement.

Dans le cas de l'impulsion rectangulaire (fig. 253, *a*)

$$I(t)=\begin{cases} q_0 t & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ q_0\tau & \text{pour } t>\tau, \end{cases}$$

et des relations (80.22), (80.26) il découle que

$$t'=\frac{1}{12}q_0\tau, \quad \bar{t}=\frac{1}{4}q_0\tau.$$

Conformément à (80.27), la flexion résiduelle maximale équivaut à:

$$\frac{ml^2}{M_*}\bar{u}=\frac{q_0\tau^2}{12}(q_0-3) \quad (q>12). \qquad (80.28)$$

Dans l'exemple donné, conformément à (80.19) et dans l'intervalle de temps $(0, \tau)$ la frontière $\xi=\xi_0$, c.-à-d. elle est fixe; elle ne se déplacera que pour $t>\tau$.

On calcule aisément l'énergie absorbée par la poutre. Pour la charge moyenne ($q_0\leqslant 12$), cette absorption se fait dans l'articulation centrale. Lorsque la charge est forte ($q_0>12$), l'énergie est absorbée sur la frontière stationnaire $\xi=\xi_0$, dans la zone des déformations plastiques continues $\xi_0<\xi<1$ et dans l'articulation centrale $\xi=1$.

5. **Considérations finales.** L'analyse d'autres cas de chargement montre que la « forme » de l'impulsion a peu d'influence sur les flèches qui, en général, sont déterminées par la charge maximale q_0 et l'impulsion totale

$$q_0\tau_0=\int_0^\infty q\,dt.$$

Les autres cas de charges (concentrées, non uniformes, . . .) et de fixations de poutres sont étudiés dans plusieurs ouvrages [185,186] par des procédés analogues. Les données expérimentales confirment de manière satisfaisante les calculs effectués d'après le schéma rigide-plastique pour les déformations plastiques développées. Les divergences constatées parfois sont liées d'habitude à l'influence des efforts axiaux apparaissant en grandes flexions et des déviations de la plasticité parfaite.

Exercices du chapitre XI

1. Une barre cylindrique ronde $z\geqslant 0$ subit la torsion résultant d'un choc appliqué à son extrémité $z=0$. Si le moment de torsion est suffisamment grand, il se propage une onde de déformation élasto-plastique.

Déduire l'équation différentielle de la propagation de la déformation de torsion en supposant que le matériau obéit au schéma élasto-plastique avec un palier d'écoulement et que les sections de la barre tournent d'un bloc.

Réponse.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=b_*^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \quad b_*=b_0\left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad b_0=\sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

où b_0 est la vitesse de propagation de l'onde élastique, c le rayon du noyau élastique, θ l'angle de rotation de la section.

2. Trouver la vitesse de propagation de l'onde de torsion de la déformation élasto-plastique pour la barre écrouissable (paragraphe 30,3).

3. Déduire l'équation différentielle des oscillations longitudinales de la barre de section variable (S étant l'aire de la section).

Réponse.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{S'(x)}{S(x)}\sigma=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

4. La déformation dynamique ε^d est deux fois plus grande que la déformation ε^s obtenue en chargement statique (lent) lorsqu'une charge de traction est subitement appliquée à une barre élastique ($\sigma = E\varepsilon$) dont la masse est insignifiante en comparaison de celle de la charge (cf. [36], I, paragraphe 64). Trouver le rapport $\varepsilon^d/\varepsilon^s$ pour la barre obéissant à la loi de déformation $\sigma = B\varepsilon^\beta$, où B et β sont des constantes $(0 < \beta \leqslant 1)$. Montrer que $\frac{\varepsilon^d}{\varepsilon^s} \geqslant 2$ et tend vers $e = 2{,}718\ldots$ pour $\beta \to 0$.

CHAPITRE XII

MILIEUX COMPLEXES. VISCO-PLASTICITÉ

81. MILIEUX COMPLEXES

1. Influence de la viscosité. Dans les chapitres précédents il a été question de la déformation plastique indépendante du temps (*plasticité athermique*). En comparaison des équations de Hooke, les nouvelles équations d'état décrivaient de façon plus complète les propriétés mécaniques des corps réels et, justement pour cette raison, les résultats obtenus acquièrent une grande importance dans la solution des problèmes relatifs à la résistance des machines et des constructions. La théorie des déformations plastiques et la théorie de l'écoulement plastique se rapportent à la description des phénomènes d'équilibre irréversibles de la déformation.

Cependant, il n'est pas toujours possible de négliger l'influence de la viscosité (qui est liée aux mouvements thermiques des atomes) ; l'analyse des phénomènes de la déformation dans le temps devient alors inévitable. Dans certains cas (par exemple, lors de la déformation des aciers dans les conditions de température normale), cette influence du temps est infiniment petite et l'on peut se baser sur les théories mentionnées de la plasticité. Dans d'autres cas, cette influence s'avère considérable en changeant sensiblement toute l'image de la déformation. Ainsi, dans des conditions de hautes températures, même les aciers résistants font preuve d'écoulement pour de faibles contraintes et peuvent avec le temps accumuler de grandes déformations (phénomène du *fluage*). Lorsqu'on a affaire à des mouvements rapides (liés par exemple aux oscillations, chocs), on a souvent besoin de tenir compte de la viscosité.

Dans la technique moderne, une importance de plus en plus grande est attachée à l'application des propriétés mécaniques complexes des hauts-polymères auxquels se rapportent une gamme diversifiée de types de caoutchouc ainsi que différents matériaux fibreux naturels ou synthétiques. Tous ces matériaux sont caractérisés par le rôle important que joue le temps dans leur comportement ; les phénomènes de la déformation sont ici *non équilibrés.*

Une science nouvelle dite *rhéologie* est en voie d'édification sur la base de l'étude des propriétés mécaniques des milieux complexes (cf. [30, 59]). Dans ce chapitre, nous n'envisageons que les *milieux plastiques complexes*; on comprendra sous ce terme un milieu plastique « ordinaire » compliqué par les phénomènes relativement simples de la viscosité. Pour ce qui est des équations rhéologiques plus complètes, nous recommandons les livres [23, 59, 69].

2. Modèles mécaniques. Les équations mécaniques d'état des milieux complexes sont d'habitude illustrées moyennant des modèles mécaniques simples. Pour des raisons de simplicité, on considère dans cette division l'état de contrainte uniaxial (traction d'une barre); désignons par σ la contrainte correspondante, par ε l'allongement relatif et par ξ la vitesse de l'allongement relatif.

Fig. 255

L'*élément élastique*, obéissant à la loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{81.1}$$

est représenté sous forme d'un ressort (fig. 255, *a*).

L'*élément visqueux*, obéissant à la loi de viscosité de Newton

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{81.2}$$

où μ est le coefficient de viscosité, est représenté par un modèle constitué d'un piston qui se déplace dans un cylindre rempli d'un liquide visqueux (fig. 255, *b*).

Le *corps rigide-plastique* ne se déforme pas lorsque les contraintes sont inférieures à la limite d'écoulement; l'écoulement ne se manifeste que lorsque les contraintes satisfont à la condition d'écoulement ($\sigma = \sigma_s$). Ce milieu est représenté sous la forme d'un palier à frottement sec (fig. 255, *c*).

Combinant ces modèles simples, on peut aboutir à différents milieux complexes. Par exemple, le *milieu élasto-plastique* se caractérise par un modèle dans lequel sont mis en série un élément élastique et un élément plastique (fig. 256). D'autres exemples de milieux complexes sont exposés ci-après.

Finalement, notons que l'on peut attribuer à l'élément élastique (ou visqueux) une loi d'élasticité (ou de viscosité) *non linéaire*. Par exemple, la relation

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B \mid \sigma \mid^{m-1} \sigma, \tag{81.3}$$

où B et m sont des constantes, correspond à l'écoulement visqueux non linéaire (fluage) des métaux. On peut envisager également le modèle du milieu plastique écrouissable.

3. Visco-élasticité. La connexion des éléments élastiques et visqueux conduit aux *milieux* dits *élasto-visqueux*.

La connexion en parallèle (fig. 257, *a*) de deux éléments, dont l'un est élastique et l'autre visqueux, conduit au *milieu élasto-visqueux de Foigt*

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (81.4)$$

On peut obtenir cette équation si l'on tient compte du fait que la contrainte totale dans le milieu se compose de la contrainte corres-

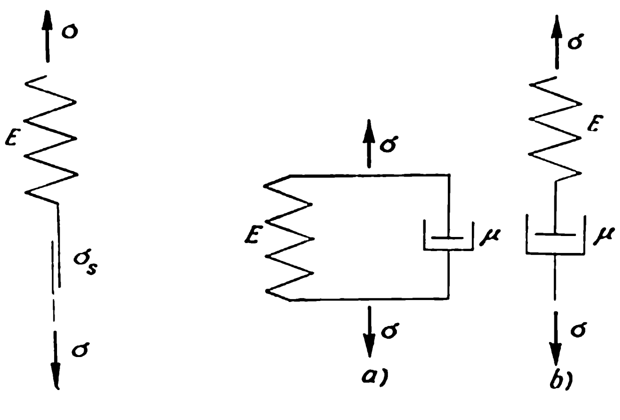


Fig. 256 Fig. 257

pondant à la déformation élastique et de la contrainte due à la résistance de viscosité. Le milieu élasto-visqueux en état de repos $\left(\frac{d\varepsilon}{dt} = 0\right)$ se comporte comme un milieu élastique. La contrainte dans le milieu croît avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Si l'on communique à un milieu une déformation constante $\varepsilon =$ $=$ const, elle y sollicitera une contrainte constante $\sigma = E\varepsilon$. Si on charge le milieu avec une contrainte constante

$$\sigma = \text{const} = \sigma_0 \text{ pour } t \geqslant 0,$$

on obtient alors à partir de (81.4):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\mu}t}\right),$$

autrement dit, la déformation s'accumule progressivement en tendant vers la valeur $\frac{\sigma_0}{E}$.

Le milieu élasto-visqueux a été étudié en détail pour la première fois par W. Foigt en rapport avec le problème de l'amortissement

des oscillations et fut par la suite examiné par de nombreux chercheurs [42, 46, 69].

Pour la *connexion en série* (fig. 257, *b*), on fait la somme des vitesses de déformation correspondant à la même contrainte. La loi de la déformation d'un tel milieu, obtenue pour la première fois par Maxwell, a la forme

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\mu}. \tag{81.5}$$

Considérons les propriétés de ce milieu. Si l'on transmet au milieu une contrainte constante (σ = const), celui-ci se déformera à une vitesse constante, autrement dit, il coulera à la manière d'un liquide visqueux. Lorsque le chargement est rapide de $\sigma = \sigma_0$, une déformation $\frac{\sigma_0}{E}$ apparaîtra immédiatement (grâce au terme élastique) dans le milieu. Si l'on supprime la contrainte, la vitesse de déformation deviendra nulle elle aussi, mais il restera dans le milieu une certaine déformation constante.

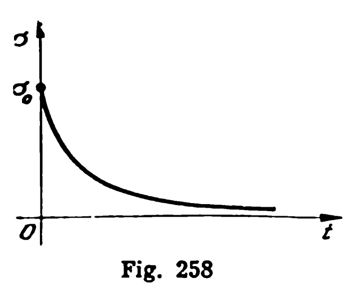


Fig. 258

Soit σ_0 la contrainte appliquée au corps au moment $t = 0$; l'allongement initial correspondant est égal à $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$. Fixons maintenant la déformation en posant $\varepsilon = \text{const} = \varepsilon_0$ (par exemple, en fixant les extrémités de la barre). Alors $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, et il découle de (81.5):

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\mu}=0,$$

d'où

$$\sigma=\sigma_0 e^{-t/t_0},$$

où $t_0 = \frac{E}{\mu}$ est appelé *temps de relaxation*. De la sorte, la contrainte baisse avec le temps suivant une loi exponentielle et tend vers zéro (fig. 258). Le *milieu de relaxation* de Maxwell décrit qualitativement la propriété importante des corps réels qui réside en l'affaiblissement de l'état de contrainte avec le temps pour une déformation invariable (*relaxation des contraintes*). L'équation de Maxwell est souvent appliquée pour les descriptions qualitatives des phénomènes de relaxation; quant aux résultats quantitatifs, ils s'accordent mal avec les résultats expérimentaux.

Les modèles présentés possèdent deux paramètres E, μ.

La description des propriétés mécaniques complexes (par exemple, des propriétés des hauts-polymères) exige l'application de *modèles*

à éléments multiples qui se caractérisent par un grand nombre de paramètres. Le modèle, montré sur la figure 259, *a*, comporte déjà trois paramètres E_1, E_2, μ_1.

Un exemple de modèle à quatre paramètres E_1, E_2, μ_1, μ_2 est représenté sur la figure 259, *b*.

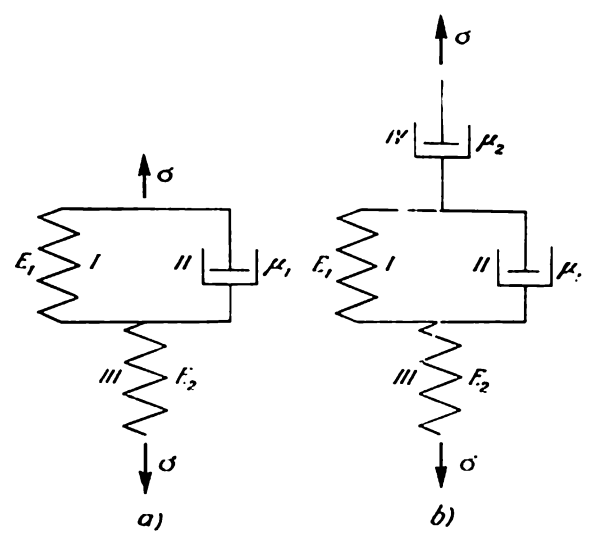


Fig. 259

De tels milieux (à *n* paramètres et à paramètres continuellement distribués) font l'objet de la *théorie de la visco-élasticité linéaire* [23, 42, 69].

Les milieux de relaxation non linéaires jouent un rôle important dans la *théorie du fluage des métaux* [1, 14, 23].

4. Visco-plasticité. L'union des éléments visqueux et plastiques conduit aux *milieux* dits *visco-plastiques*.

La *connexion en parallèle* (fig. 260, *a*) de deux éléments, dont l'un est visqueux et l'autre plastique, donne un *milieu visco-plastique*, vraisemblablement traité pour la première fois par Chvédov (1900) et par Bingham (1922). La loi de la déformation prend alors la forme

$$\sigma = \sigma_s + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{pour} \quad \sigma \geqslant \sigma_s; \tag{81.6}$$

le milieu ne subit pas de déformations pour $\sigma < \sigma_s$.

Ce schéma reflète le fait que, pour de nombreux matériaux, l'écoulement notable n'apparaît que pour une charge déterminée; la vitesse de l'écoulement dépend alors de la viscosité du milieu.

Les caractéristiques visco-plastiques distinguent de nombreux matériaux usuels tels que les métaux à température suffisamment élevée, différents lubrifiants consistants, peintures, etc. Le perfectionnement de nombreux processus technologiques (traitement à chaud des métaux, déplacement de diverses matières plastiques dans les machines, conduites, etc.) implique l'étude du mouvement des

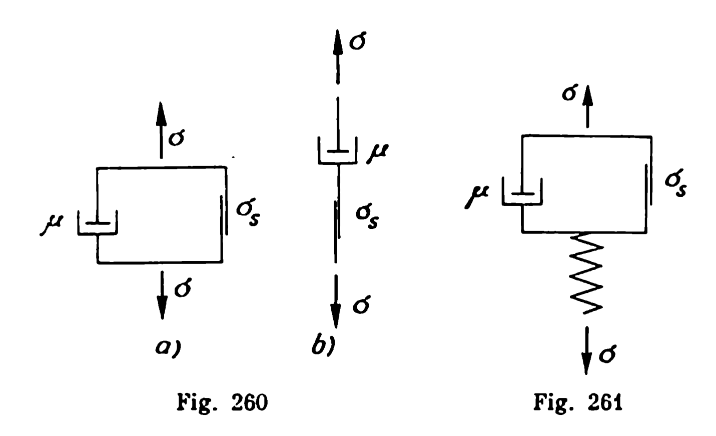


Fig. 260 Fig. 261

matériaux visco-plastiques. La théorie hydrodynamique du graissage pour des matériaux lubrifiants consistants est elle-aussi basée sur les équations de l'écoulement visco-plastique.

Les équations du milieu visco-plastique seront envisagées plus en détail dans le paragraphe suivant.

La *connexion en série* de deux éléments (fig. 260, *b*), dont l'un est visqueux et l'autre plastique, conduit à un *milieu en fluage plastique* présentant un intérêt notable dans les problèmes du fluage.

Lorsque $\sigma < \sigma_s$, ce milieu se comporte comme un liquide visqueux qui obéit à la loi de viscosité de Newton (81.2) ou à la loi d'écoulement non linéaire, par exemple à l'équation (81.3).

Lorsque $\sigma = \sigma_z$, le milieu coule comme un corps plastique parfait (cf. paragraphe 83).

L'association d'un grand nombre d'éléments visqueux et plastiques conduit à des milieux visco-plastiques complexes.

5. Elasto-visco-plasticité. La connexion des éléments de ces trois types (élasto-visqueux et plastique) nous donne des milieux beaucoup plus complexes. Ainsi, le modèle représenté sur la figure 261 est parfois utilisé dans les problèmes dynamiques. Pour obtenir l'équation correspondante, il faut écrire, comme d'habitude, les lois de la déformation pour chaque élément et établir les conditions d'équilibre et de continuité des déformations.

82. MILIEU VISCO-PLASTIQUE

1. Relations fondamentales. Considérons plus en détail le milieu visco-plastique; nous conviendrons d'appeler ainsi le milieu dont le modèle est formé par la connexion *en parallèle* d'un élément visqueux et d'un élément plastique (fig. 260, *a*). Le milieu visco-plastique est l'objet d'une étude poussée en raison de ses applications pratiques variées.

On fera appel à des suppositions complémentaires ordinaires pour passer de l'équation (81.4), décrivant l'état de contrainte uniaxial, au cas de l'état de contrainte complexe. On admet avant tout la *condition d'incompressibilité*

$$\xi_{ij}\delta_{ij} = 0. \tag{82.1}$$

Ensuite, on obtient les composantes de la contrainte σ_{ij} en sommant les composantes de la contrainte σ'_{ij}, liées aux propriétés plastiques, et les composantes de la contrainte σ''_{ij} qui sont dues à la résistance de viscosité:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}. \tag{82.2}$$

Les composantes de la contrainte σ'_{ij} sont définies par les équations (13.12) de la théorie de la plasticité de von Mises, c.-à-d.

$$s'_{ij} = \frac{2\tau_s}{H}\xi_{ij}, \tag{82.3}$$

la condition d'écoulement de von Mises étant alors satisfaite:

$$s'_{ij}s'_{ij} = 2\tau_s^2. \tag{82.4}$$

Soit une résistance de viscosité obéissant à la loi de la viscosité linéaire de Newton (5.5), c.-à-d.

$$s''_{ij} = 2\mu'\xi_{ij} \quad (3\mu' = \mu). \tag{82.5}$$

En faisant la somme des contraintes, on vient aux relations du milieu visco-plastique

$$s_{ij} = 2\left(\frac{\tau_s}{H} + \mu'\right)\xi_{ij}. \tag{82.6}$$

Il en découle la relation

$$T = \tau_s + \mu' H, \tag{82.7}$$

qui représente la généralisation de l'équation (81.6). Notons que l'on peut considérer le milieu visco-plastique comme le cas limite du milieu visqueux non linéaire

$$s_{ij} = 2g(H)\xi_{ij}, \tag{82.8}$$

pour lequel $T = g(H)H$. Pour le milieu visco-plastique, on a $g(H) = \mu' + \frac{\tau_s}{H}$.

2. Equations de l'écoulement visco-plastique. Les relations (82.6) constituent, conjointement avec la condition d'incompressibilité (82.1) et trois équations du mouvement, un système de dix équations pour dix fonctions inconnues s_{ij}, σ, v_i.

Introduisant dans les équations différentielles d'équilibre les composantes de la contrainte conformément à (82.6), on obtient (avec l'équation d'incompressibilité (82.1)) le système de quatre équations pour la pression moyenne σ et les composantes de la vitesse v_i; ce système est d'une forme très complexe, nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire de le reproduire ici.

Dans le cas de la déformation plane, $v_z = 0$ et alors $\sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Les équations différentielles d'équilibre seront satisfaites si l'on introduit la fonction des contraintes $\Phi(x, y)$, à savoir:

$$\sigma_x = 2\mu' \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = 2\mu' \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -2\mu' \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\, \partial y}.$$

La condition d'incompressibilité est identifiée lors de l'introduction de la fonction du courant $\Psi(x, y)$:

$$v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Les fonctions Φ et Ψ sont déterminées à partir du système de deux équations différentielles non linéaires du second ordre qui résultent de la relation (82.7) et de la relation

$$\sigma_x - \sigma_y = 4\left(\frac{\tau_s}{H} + \mu'\right)\xi_x, \qquad (82.9)$$

découlant de (82.6).

Eliminant une des fonctions, Φ par exemple, on peut obtenir une équation différentielle non linéaire du quatrième ordre par rapport à la fonction du courant Ψ. Cette équation a été appliquée par A. Iliouchine [100] et A. Ichlinski [102] pour l'analyse de plusieurs problèmes relatifs à l'écoulement visco-plastique.

Les équations du milieu visco-plastique trouvent des applications pour résoudre différents problèmes technologiques concernant le traitement des métaux par pression, l'écoulement de matières plastiques variées dans les tubes et ouvertures, la théorie du graissage par lubrifiants consistants, etc. (cf. [81]). Les relations (82.6), complétées par des déformations élastiques, sont utilisées également dans les problèmes de la dynamique plastique s'il est impossible de négliger l'influence de la vitesse de déformation. La théorie de la couche limite a été développée dans les problèmes hydrodynamiques de l'écoulement visco-plastique.

Comme nous l'avons déjà noté, le milieu visco-plastique peut être considéré comme le cas limite d'un milieu visqueux non linéaire. Cette conception permet d'écrire facilement les équations variationnelles de l'écoulement visco-plastique, notamment, le principe du minimum de la dissipation totale (caractérisant les propriétés de minimum du champ de vitesses réel) et le principe du minimum de la dissipation complémentaire (caractérisant les propriétés de minimum de l'état de contrainte réel). L'analyse détaillée de la première équation variationnelle est donnée dans l'ouvrage récemment publié de P. Mossolov et V. Miasnikov [116].

3. Ecoulement permanent dans un tube. Considérons le problème relatif à l'écoulement d'une masse visco-plastique dans un tube circulaire long. Le mouvement est supposé lent, permanent et à symétrie axiale; la rotation de la masse dans le tube est absente. On a alors dans le système des coordonnées cylindriques r, φ, z:

$$v_r = 0, \quad v\varphi = 0.$$

Calculant les composantes de la vitesse de déformation, on trouve:

$$\xi_r = \xi_\varphi = \eta_{r\varphi} = \eta_{\varphi z} = 0, \quad \xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \eta_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

Mais $\xi_z = 0$, d'après la condition d'incompressibilité, par conséquent, $v_z = v_z(r)$. Conformément aux relations (82.6) on obtient:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \sigma; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad \tau_{rz} = -\tau_s + \mu' \frac{dv_z}{dr}.$$

Il est admis ici que $\frac{dv_z}{dr} \leqslant 0$, alors $\frac{\eta_{rz}}{H} = -1$.

Ensuite, à partir des équations d'équilibre (4.3) on trouve:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0.$$

Il en résulte que $\sigma = \sigma(z)$, le gradient de pression $\frac{\partial \sigma}{\partial z} \equiv q$ étant une grandeur constante. Substituant τ_{rz} dans la dernière équation et effectuant l'intégration sous les conditions que la masse visco-plastique adhère aux parois du tube (c.-à-d. $v_z = 0$ pour $r = b$) et que la vitesse v_z soit limitée pour $\tau_s \geqslant 0$ et $r \geqslant 0$, on obtient:

$$v_z = \frac{q}{4\mu'}(b^2 - r^2) - \frac{\tau_s}{\mu'}(b - r).$$

Du fait que $|\tau_{rz}| \geqslant \tau_s$ à l'intérieur de la zone déformée, la solution n a le sens que pour $\frac{dv_z}{dr} \leqslant 0$, c.-à-d. pour

$$r \geqslant \frac{2\tau_s}{q} \equiv c.$$

Le reste de la masse ne se déforme pas et se déplace à l'intérieur du tube comme un solide. La vitesse augmente suivant une loi parabolique d'une valeur nulle sur les parois du tube à la valeur maximale

pour $r = c$ (fig. 262). La valeur de la contrainte tangentielle est égale à $bq/2$ près de la paroi du tube, elle baisse ensuite jusqu'à la valeur τ_s à la frontière du noyau non déformable. Puisque $c \leqslant b$,

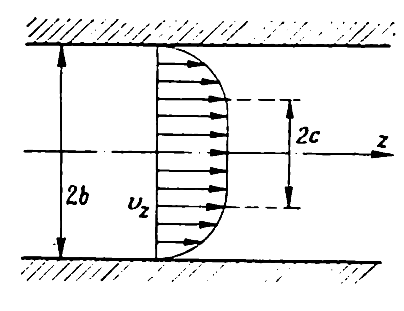


Fig. 262

l'écoulement n'est donc possible que pour un gradient de pression suffisamment grand:

$$q \geqslant \frac{2\tau_s}{b}.$$

Calculant la quantité de la masse passant par unité de temps, on obtient:

$$Q = 2\pi \int_0^b r v_z \, dr = \frac{\pi}{\mu'} \left[\frac{q}{8} (b^4 - c^4) - \frac{\tau_s}{3} (b^3 - c^3) \right].$$

Dans le cas du liquide visqueux $\tau_s = 0$, donc $c = 0$, il n'y a pas de noyau rigide, et la dernière équation conduit alors à la formule connue de Poiseuille

$$Q = \frac{\pi b^4}{8\mu'} q.$$

Dans le cas du corps rigide-plastique $\mu' = 0$, $c = b$, qui est un autre cas limite, le glissement s'effectue dans une couche mince avoisinant la paroi du tube.

83. MILIEU PLASTIQUE FLUANT

1. Relations fondamentales. Passons maintenant à l'examen plus détaillé du milieu plastique fluant dont le modèle est constitué par la *connexion en série* des éléments visqueux et plastique (fig. 260, *b*). Ce milieu a des applications très intéressantes dans la théorie du fluage des métaux où, d'ailleurs, il faut souvent tenir compte également de la déformation élastique et de l'influence de

l'« écrouissage ». Nous envisagerons ici une variante simple des relations fondamentales, tenant compte seulement de la viscosité non linéaire et de la plasticité parfaite.

Pour le modèle représenté sur la figure 260, *b*, la sommation ne concerne que les vitesses de déformation, la contrainte restant la même dans les deux éléments.

De la sorte, on a:

$$\xi_{ij}=\xi'_{ij}+\xi''_{ij}. \tag{83.1}$$

Les vitesses de la déformation plastique sont égales à

$$\xi'_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad T<\tau_s, \\ \lambda' s_{ij} & \text{pour} \quad T=\tau_s. \end{cases} \tag{83.2}$$

Les vitesses de la déformation visqueuse sont égales à

$$\xi''_{ij}=\frac{1}{2}\bar{g}(T)\,s_{ij}, \tag{83.3}$$

où $\bar{g}(T)$ est une fonction connue. Notons que

$$T = g(H'')\,H'', \tag{83.4}$$

avec $g(H'')\,\bar{g}(T) = 1$. Nous avons donné ici les relations fondamentales « d'après le critère de von Mises ». Il est aisé de formuler des relations analogues pour un autre critère (par exemple pour le critère de τ_{max}).

2. Equations de l'écoulement plastique fluant. Si les contraintes sont inférieures à la limite d'écoulement, le corps ne subit qu'un fluage conformément aux relations du type (81.3), les vitesses de la déformation totale étant alors $\xi_{ij} = \xi''_{ij}$. Des domaines « visqueux » ($T < \tau_s$) et « plastiques » ($T = \tau_s$) apparaissent dans le corps lorsque la charge est suffisamment grande. Dans les premiers domaines, les composantes de la vitesse de déformation ξ_{ij} sont liées avec les composantes de la contrainte par les équations (83.3); dans les seconds domaines, elles sont liées par les relations

$$\xi_{ij}=\left[\lambda'+\frac{1}{2}\bar{g}(\tau_s)\right]s_{ij}.$$

Des conditions appropriées de continuité des contraintes et des vitesses doivent être observées sur les frontières de zones différentes. Tant que l'état limite n'est pas obtenu, l'écoulement de l'ensemble du corps est déterminé par la déformation du « noyau visqueux ».

3. Ecoulement d'une sphère creuse sous l'action de la pression. Considérons le problème relatif à l'écoulement permanent d'une sphère creuse à plasticité fluante subissant la pression intérieure p (fig. 41). Conservons ici les notations utilisées dans le paragraphe 25.

Soit $v = v(r)$ la vitesse radiale. L'équation d'incompressibilité a la forme

$$\frac{dv}{dr} + 2\frac{v}{r} = 0,$$

d'où l'on trouve que

$$v = \frac{C}{r^2},$$

où C est une constante arbitraire. Calculant maintenant les vitesses de déformation et l'intensité des vitesses de déformations du cisaillement, on obtient:

$$\xi_r = -\frac{2C}{r^3}, \quad \xi_\varphi = \xi_\chi = \frac{C}{r^3}, \quad H = 2\sqrt{3}\frac{C}{r^3}.$$

L'intensité des contraintes tangentielles équivaut à $T = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_\varphi - \sigma_r)$. L'équation différentielle d'équilibre (25.1) prend alors la forme

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sqrt{3}}{r} T. \qquad (83.5)$$

Supposons que $T < \tau_s$. Admettons la fonction puissance $T = \bar{B}H^{\bar{\mu}}$, où $\bar{B}$, $0 < \bar{\mu} \leqslant 1$ sont respectivement le coefficient et l'exposant du fluage. Portant T dans l'équation d'équilibre (83.5) et effectuant l'intégration pour les conditions aux limites $\sigma_r = -p$ pour $r = a$ et $\sigma_r = 0$ pour $r = b$, on obtient:

$$\sigma_r = s\left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^{3\bar{\mu}}\right], \quad T = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\mu}s\left(\frac{b}{r}\right)^{3\bar{\mu}}, \quad s = \frac{p}{\beta^{3\bar{\mu}} - 1}. \qquad (83.6)$$

Il est évident que l'intensité des contraintes tangentielles décroît avec l'accroissement du rayon r. Lorsque la pression est suffisante (à savoir, pour $p > \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}\bar{\mu}}(1 - \beta^{-3\bar{\mu}})$, il apparaît une zone plastique $a \leqslant r \leqslant c$ dans laquelle $T = \tau_s$. Dans cette zone la solution est définie par les formules (25.8); récrivons ces formules:

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln\frac{r}{a} - p, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_s. \qquad (83.7)$$

Dans le domaine extérieur $c \leqslant r \leqslant b$, on peut obtenir la solution à partir des formules (83.6) en remplaçant p par $-q = -(\sigma_r)_{r=c}$, et le rayon a par le rayon c. Sur la frontière $r = c$, σ_r et T sont continus. Il est facile de voir que $q = 2\sigma_s \ln\frac{c}{a} - p$. Ensuite, à partir de la condition $T = \tau_s$ pour $r = c$ on trouve l'équation définissant le rayon c:

$$\frac{1}{3\bar{\mu}}\left[1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{3\bar{\mu}}\right] + \ln\frac{c}{b} = \frac{p}{2\sigma_s} - \ln\frac{b}{a}. \qquad (83.8)$$

La vitesse $v(r)$ est calculée pour la valeur appropriée de la constante arbitraire C.

La zone plastique envahit l'ensemble de la sphère lorsque $c = b$; on tire alors de (83.8) la valeur de la charge limite p_*.

Exercices du chapitre XII

1. A partir de l'équation (81.4), établir l'équation différentielle des oscillations longitudinales d'une barre élasto-visqueuse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

où $u = u(x, t)$ est le déplacement suivant l'axe de la barre, $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

2. Partant de l'équation de fluage établi (81.3) et des hypothèses habituelles, déduire l'équation différentielle de la vitesse de fléchissement de la poutre

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \pm \frac{|M|^m}{D},$$

où M est le moment fléchissant, D la rigidité de la poutre en fluage.

3. Obtenir la loi de la déformation

$$E_1 \varepsilon + \mu_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sigma + \frac{\mu_1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt}$$

du milieu à trois éléments, montré sur la figure 259, *a*.

4. Obtenir la loi de la déformation

$$\mu_1 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\mu_1}{E_2} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{E_1}{E_2}\right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\mu_2} \sigma$$

du milieu à quatre éléments, montré sur la figure 259, *b*.

5. Résoudre le problème sur l'écoulement visco-plastique permanent entre deux plaques rugueuses parallèles dans le cas de la déformation plane. Montrer que l'épaisseur du noyau rigide est $2c = 2\tau_s/q$.

6. Déduire la formule de la vitesse $v(r)$ dans le problème sur l'écoulement de la sphère creuse (paragraphe 83) en présence de la zone plastique.

7. Résoudre le problème sur l'écoulement d'un tube creux à plasticité fluante sous l'action d'une pression intérieure.

APPENDICE

1. SUR LE TYPE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans la théorie de la plasticité, la dynamique de gaz, la statique des massifs pulvérulents et dans d'autres branches de la mécanique, on a affaire à des systèmes de deux équations quasi linéaires aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à deux fonctions u, v de deux variables indépendantes x, y:

$$\left.\begin{aligned} A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1\frac{\partial u}{\partial y}+C_1\frac{\partial v}{\partial x}+D_1\frac{\partial v}{\partial y}=E_1, \\ A_2\frac{\partial u}{\partial x}+B_2\frac{\partial u}{\partial y}+C_2\frac{\partial v}{\partial x}+D_2\frac{\partial v}{\partial y}=E_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où les coefficients A_1, B_1, . . ., E_2 sont les fonctions données de x, y, u, v. Les propriétés des solutions de ce système et les méthodes de construction de ces solutions dépendent sensiblement du type de système. Examinons ce problème.

Soient u, v des valeurs données le long d'une certaine ligne $x = x(s)$, $y = y(s)$, dans le plan x, y:

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Si l'on introduit dans le problème l'espace à quatre dimensions x, y, u, v, les équations $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$, $v = v(s)$, y représentent une ligne L quelconque; quant aux solutions des équations différentielles $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, elles forment une surface quelconque (surface intégrale).

La question principale est de savoir s'il est possible de faire passer une certaine surface intégrale par la ligne L donnée (problème de Cauchy). Cette question est liée à la possibilité de définir univoquement les dérivées des fonctions inconnues u, v le long de la ligne L en vertu des équations différentielles (1) elles-mêmes. En langage géométrique, la détermination univoque le long de L à partir des équations différentielles elles-mêmes des dérivées partielles premières signifie la détermination, le long de L, du plan tangent à la surface intégrale.

Les équations différentielles (1), si on les considère le long de L, ont des coefficients connus et peuvent être utilisées pour la détermination des dérivées partielles. Connaissant u et v le long de L, on a donc pour équations complémentaires les relations évidentes

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy. \tag{2}$$

Le long de L, les équations (1) et (2) forment un système d'équations algébriques linéaires non homogènes par rapport aux dérivées partielles premières. Les dérivées partielles sont définies de façon non unique si, le long de L, le déterminant du système Δ et les numérateurs convenables Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 dans les formules de Craemer se réduisent à zéro. Ecrivons la première condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

ou bien sous une forme développée

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0, \tag{3}$$

où on a introduit les notations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} a &= C_1A_2 - A_1C_2, \\ 2b &= C_1B_2 - B_1C_2 + D_1A_2 - A_1D_2, \\ c &= D_1B_2 - B_1D_2. \end{aligned}\right\}$$

L'équation différentielle (3) se décompose en deux équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right). \tag{4}$$

Si dans un domaine x, y quelconque on a $b^2 - ac > 0$, on a alors en chaque point de ce domaine deux *directions caractéristiques* différentes; dans ce domaine le système (1) sera du *type hyperbolique.*

Si $b^2 - ac = 0$ dans un domaine x, y quelconque, on a alors en chaque point du domaine en question une seule direction caractéristique : dans ce cas le système (1) est du *type parabolique.*

Finalement, si $b^2 - ac < 0$, il n'existe pas de directions caractéristiques réelles dans le domaine correspondant, et le système (1) est appelé *elliptique.*

Les coefficients des équations (1) étant des fonctions de x, y, u, , le système (1) peut être en général de type différent dans divers domaines.

La solution du système d'équations de type hyperbolique est étroitement liée aux lignes caractéristiques, définies par les équa-

tions différentielles (4) et couvrant le domaine x, y d'un réseau curviligne.

Notons que si le système est linéaire, autrement dit, si les coefficients de l'équation (1) ne sont les fonctions que de x et y, le réseau des lignes caractéristiques ne dépend pas de la solution. Pour les équations non linéaires, les lignes caractéristiques dépendent de la solution recherchée.

Egalant à zéro les numérateurs $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, on vient aux relations entre les fonctions inconnues u, v qui sont vérifiées le long des caractéristiques.

La théorie des équations différentielles hyperboliques (1) a été exposée dans le livre de R. Courant et K. Friedrichs [45], chapitre II. Les problèmes de la théorie des équations différentielles hyperboliques à deux variables indépendantes ont été traités également dans le livre de R. Courant et D. Hilbert « Les méthodes de la physique mathématique », vol. II, chapitre V; dans le « Cours des mathématiques supérieures » de V. Smirnov, vol. IV, chapitre III; dans le livre de B. Rojdestvenski et N. Ianenko « Systèmes d'équations quasi linéaires », 1968.

2. SUR LES ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES

Dans de nombreuses divisions de la mécanique des milieux déformables (état de contrainte plan et état de la déformation plane dans la théorie de la plasticité, quelques problèmes dynamiques de la théorie de la plasticité, etc.) on rencontre le système d'équations *homogènes*

$$\left.\begin{aligned} A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1\frac{\partial u}{\partial y}+C_1\frac{\partial v}{\partial x}+D_1\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\ A_2\frac{\partial u}{\partial x}+B_2\frac{\partial u}{\partial y}+C_2\frac{\partial v}{\partial x}+D_2\frac{\partial v}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où les coefficients $A_1, B_1, \ldots, D_2$ sont les fonctions de u et v *seulement*.

Dans ce cas, le système (1) est dit *réductible*, étant donné qu'il est réduit au système linéaire par inversion des variables. Soit

$$x = x\,(u,\ v), \quad y = y\,(u,\ v).$$

Procédant à la dérivation, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} 1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ 1=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\right\}$$

D'où l'on trouve les dérivées partielles:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x},$$

où Δ est le déterminant fonctionnel:

$$\Delta=\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\neq 0.$$

Portant les dérivées partielles dans l'équation (1) et divisant par Δ, on vient au système *linéaire*:

$$\left.\begin{aligned} A_1\frac{\partial y}{\partial v}-B_1\frac{\partial x}{\partial v}-C_1\frac{\partial y}{\partial u}+D_1\frac{\partial x}{\partial u}=0,\\ A_2\frac{\partial y}{\partial v}-B_2\frac{\partial x}{\partial v}-C_2\frac{\partial y}{\partial u}+D_2\frac{\partial x}{\partial u}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le système (2) n'est pas en général équivalent au système (1), car les solutions réduisant à zéro le déterminant fonctionnel Δ se perdent lors de la transformation. Néanmoins, ces solutions se distinguent par la simplicité et peuvent être obtenues directement.

Ces solutions simples (ondes simples, paragraphe 77; états de contrainte simples, paragraphe 33, etc.) ont des applications importantes.

Les problèmes de la théorie des équations réductibles ont été traités dans le livre de R. Courant et K. Friedrichs [45], chapitre II, ainsi que dans les articles de S. Kristianovitch [133] et de S. Mikhline [41].

BIBLIOGRAPHIE [1]

A. Livres

1. АРУТЮНЯН Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести (Aroutiounian N. Quelques problèmes de la théorie du fluage), Гостехиздат, 1952.
2. БЕЗУХОВ Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести (Bésoukhov N. Notions fondamentales de la théorie de l'élasticité, de la plasticité et du fluage), Высшая школа, 1961.
3. БИРГЕР И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения (Birguer I. Plaques circulaires et enveloppes de révolution), Оборонгиз, 1961.
4. ВОЛЬМИР А. С. Устойчивость упругих систем (Volmir A. Stabilité des systèmes élastiques), Физматгиз, 1963.
5. ГВОЗДЕВ А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия (Gvozdev A. Calcul de la portance des constructions suivant la méthode de l'équilibre limite), Стройиздат, 1949.
6. ГОЛУШКЕВИЧ С. С. Плоская задача теории предельного равновесия сыпучей среды (Golouchkévitch S. Problème plan de la théorie de l'équilibre limite des massifs pulvérulents), Гостехиздат, 1948.
7. ГОЛЬДЕНБЛАТ И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред (Goldenblat I. Quelques problèmes de la mécanique des milieux déformables), ГИТТЛ, 1955.
8. ИВЛЕВ Д. Д. Теория идеальной пластичности (Ivlev D. Théorie de la plasticité parfaite), Наука, 1966.
9. ИЛЬЮШИН А. А. Пластичность (Iliouchine A. La plasticité), Гостехиздат, 1948.
10. ИЛЬЮШИН А. А. Пластичность (Iliouchine A. La plasticité), Изд. АН СССР, 1963.
11. ИЛЬЮШИН А. А., ЛЕНСКИЙ В. С. Сопротивление материалов (Iliouchine A., Lenski V. Résistance des matériaux), Физматгиз, 1959.

---

[1] La bibliographie se rapportant à la théorie de la plasticité est très vaste ; outre la littérature citée, le répertoire ne comprend que les titres de quelques ouvrages relatifs à l'application de la théorie ainsi que quelques aperçus. On pourra trouver des références complémentaires dans les livres et les aperçus ainsi que dans les revues scientifiques publiant des travaux ayant trait à la théorie de la plasticité (Mathématique et mécanique appliquées ; Mécanique du solide ; Revue de physique technique et de mécanique appliquée ; Mécanique appliquée ; Journ. Appl. Mechan. (JAM, paraissant en traduction russe) ; Journ. Mechan. a. Phys. of Solids (JMPS) ; Ing. Arch., etc.). Cf. également la collection des traductions de la revue « Mécanique » ; revues référatives « Mécanique » et Appl. Mechan. Rev.

11a. ИВЛЕВ Д. Д., БЫКОВЦЕВ Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела (Ivlev D., Bykovtsev G. Théorie du corps plastique écrouissable), Наука, 1971.
12. ИЛЬЮШИН А. А., ОГИБАЛОВ П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров (Iliouchine A., Ogibalov P. Déformations élastoplastiques des cylindres creux), Изд. МГУ, 1960.
13. КАЧАНОВ Л. М. Механика пластических сред (Katchanov L. Mécanique des milieux plastiques), Гостехиздат, 1948.
14. КАЧАНОВ Л. М. Теория ползучести (Katchanov L. Théorie du fluage), Физматгиз, 1960.
15. ЛЕЙБЕНЗОН Л. С. Курс теории упругости (Léibenzon L. Cours de la théorie de l'élasticité), Гостехиздат, 1947.
16. МАЛМЕЙСТЕР А. К. Упругость и неупругость бетона (Malmeister A. Elasticité et non-élasticité du béton), Изд. АН ЛатССР, 1957.
17. МИХЛИН С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности (Mikhline S. Equations fondamentales de la théorie mathématique de la plasticité), Изд. АН СССР, 1934.
18. МОСКВИТИН В. В. Пластичность при переменных нагружениях (Moskvitine V. Plasticité aux charges alternées), Изд. МГУ, 1965.
19. НОВОЖИЛОВ В. В. Теория упругости (Novogilov V. Théorie de l'élasticité), Судпромгиз, 1958.
20. ПАНОВКО Я. Г., ГУБАНОВА И. И. Устойчивость и колебания упругих систем (Panovko Y., Goubanova I. Stabilité et oscillations des systèmes élastiques), Наука, 1967.
21. ПОНОМАРЁВ С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении (Ponomarev S. et al. Calculs de la résistance dans la construction mécanique), тт. I, II, III, Машгиз, 1956-1959.
22. РАБОТНОВ Ю. Н. Сопротивление материалов (Rabotnov Y. Résistance des matériaux), Физматгиз, 1962.
23. РАБОТНОВ Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций (Rabotnov Y. Fluage des éléments de constructions), Наука, 1966.
24. РАХМАТУЛЛИН Х. А., ДЕМЬЯНОВ Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках (Rakhmatouline Kh., Démianov Y. Résistance aux charges intenses de courte durée), Физматгиз, 1961.
25. РЖАНИЦЫН А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов (Rjanitsyn A. Calcul des constructions compte tenu des propriétés plastiques des matériaux), Стройиздат, 1954.
26. РУППЕНЕЙТ К. В. Некоторые вопросы механики горных пород (Rouppéneit K. Sur quelques problèmes de la mécanique des terrains) Углетехиздат, 1954.
27. Сборник « Остаточные напряжения » (Collection « Contraintes résiduelles »), ИЛ, 1957.
28. Сборник « Теория пластичности » (Collection « Théorie de la plasticité »), ИЛ, 1948.
29. Сборник « Проблемы механики » (Collection « Problèmes de la mécanique »), ИЛ, 1955 (статья Гейрингер).
30. Сборник « Реология » (Collection « Rhéologie »), ИЛ, 1963.
31. СЕДОВ Л. И. Введение в механику сплошных сред (Sédov L. Introduction à la mécanique des milieux continus), Физматгиз, 1962.
32. СЕДОВ Л. И. Механика сплошной среды (Sédov L. La mécanique du milieu continu), тт. 1 и 2, Наука, 1973.
33. СОКОЛОВСКИЙ В. В. Теория пластичности (Sokolovski V. Théorie de la plasticité), Высшая школа, 1969.
34. СОКОЛОВСКИЙ В. В. Статика сыпучей среды (Sokolovski V. La statique des massifs pulvérulents), Гостехиздат, 1954.
35. ТАРНОВСКИЙ И. Я. и др. Теория обработки металлов давлением (Tarnovski I. et al. Théorie du traitement des métaux par pression), Металлургиздат, 1963.

36. ТИМОШЕНКО С. П. Сопротивление материалов (Timochenko S. Résistance des matériaux), Гостехиздат, 1945.
37. ТИМОШЕНКО С. П. Теория упругости (Timochenko S. Théorie de l'élasticité), ОНТИ, 1937.
38. ТИМОШЕНКО С. П. Устойчивость упругих систем (Timochenko S. Stabilité des systèmes élastiques), Гостехиздат, 1955.
39. ТОМЛЕНОВ А. Д. Теория пластических деформаций металлов (Напряженное состояние при ковке и штамповке) (Tomlenov A. Théorie des déformations plastiques des métaux), Машгиз, 1951.
40. ФРИДМАН Я. Б. Механические свойства металлов (Fridman Y. Propriétés mécaniques des métaux), Оборонгиз, 1952.
41. ХРИСТИАНОВИЧ С. А., МИХЛИН С. Г., ДЕВИСОН Б. Б. Некоторые вопросы механики сплошных сред (Khristianovitch S., Mikhline S., Davisson B. Quelques problèmes de la mécanique des milieux continus), Изд. АН СССР, 1938.

42. ALFREY T. Mechanical Behavior of High Polymers, New York — London, 1948.
43. BOLEY B. A., WEINER J. H. Theory of Thermal Stresses, New York — London, John Wiley and Sons, Inc., 1960.
44. BRIDGMAN P. W. Studies in Large Plastic Flow and Fracture, New York, Toronto, London, 1952.
45. COURANT R., FRIEDRICHS K. O. Supersonic Flow and Shock Waves, New York — London, 1948.
46. FREUDENTHAL A. M., GEIRINGER H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, Berlin, 1958.
47. HILL R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford at the Clarendon Press, 1950.
48. HODGE P. G. Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York, 1959.
49. HOFFMANN O., SACHS G. Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers, New York, 1953.
50. KOLSKY H. Stress Waves in Solids, Oxford, 1953.
51. LOVE A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge at the University Press, 1927.
52. NADAÏ A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. I, New York, 1950.
53. NADAÏ A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. II, New York, 1963.
54. NEAL B. G. The Plastic Methods of Structural Analysis, London, 1956.
55. PERZYNA P., Teoria lepkoplastyczności, Warszawa, 1966.
56. PRAGER W. Probleme der Plastizitätstheorie, Basel and Stuttgart, 1955.
57. PRAGER W. Einführung in die Kontinuumsmechanik, Basel — Stuttgart, Birkäuser Verl., 1961.
58. PRAGER W., HODGE P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids, New York, 1951.
59. REINER M. Rheology, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
60. SOUTHWELL R. V. Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford Univ. Press, 1946.
61. THOMAS T. Y. Plastic Flow and Fracture in Solids, New York — London, Acad. Press, 1961.
62. THOMSEN E. G., YANG C. T., KOBAYASHI S. Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing, Mc Millan Co, New York, 1965.
63. ZIEGLER H. Some Extremum Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Continuum Mechanics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.

B. Ouvrages de synthèse

64. ЗВОЛИНСКИЙ Н. В., МАЛЫШЕВ Б. М., ШАПИРО Г. С. Динамика пластических сред (Zvolinski N., Malychev B., Chapiro G. Dynamique des milieux plastiques), Труды 2-го Всесоюзн. съезда по механике, вып. 3, 1966.
65. КАЧАНОВ Л. М. Вариационные методы в теории пластичности (Katchanov L. Méthodes variationnelles dans la théorie de la plasticité), Труды 2-го Всесоюзн. съезда по механике, вып. 3, 1966.
66. КЛЮШНИКОВ В. Д. О законах пластичности для материалов с упрочнением (Kliouchnikov V. Sur les lois de la plasticité pour les matériaux écrouis), ПММ, т. 22, в. 1, 1958.
67. РЕЙТМАН М. И., ШАПИРО Г. С. Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности. Итоги науки (Reitman M., Chapiro G. Théorie de l'étude optimale dans la mécanique des constructions, théorie de l'élasticité et de la plasticité. Bilan de la Science), Изд. ВИНИТИ, 1966.
68. ШАПИРО Г. С. О поведении пластинок и оболочек за пределом упругости (Chapiro G. Sur le comportement des plaques et enveloppes au-delà de la limite d'élasticité), Труды 2-го Всесоюзного съезда по механике, вып. 3, 1966.

69. BLAND D. R. The Theory of Linear Viscoelasticity, Pergamon Press, Oxford, 1960.
70. DAVIES R. M. Stress Waves in Solids, in Surveys in Mechanics. The G. I. Taylor 70th Anniversary, Vol. I, Cambridge, 1956.
71. HODGE P. G. Boundary Value Problems in Plasticity. Proceeding of the second Symposium on Naval Structural Mechanics (April 5-7, 1960), Edited by E. H. Lee, P. S. Symonds, 1960.
72. HODGE P. G., Jr. The Mathematical Theory of Plasticity in J. N. Goodier and P. G. Hodge, Jr. Elasticity and Plasticity (Surveys in Applied Mathematics, Vol. I), Wiley, New York; Chapman and Hall, London ; 1958.
73. HOFF N. J. Buckling and Stability, Journal of the royal Aeronautical society, 58 (5), 1954.
74. HOPKINS H. G. Dynamic Inelastic Deformations of Metals, Applied Mechanics Revs., 14 (6), 1961.
75. HORNE M. R. The Stability of Elastic-Plastic Structures, Progress in Solid Mechanics, Vol. II, 277-322, 1961.
76. HUNDY B. B. Plane Plasticity, Metallurgia, March, 1954.
77. KOITER W. T. General Theorems for Elastic-Plastic Solids, North-Holland, Publ. Co, Amsterdam, 1960.
78. NAGHDI P. M. Stress-strain Relations in Plasticity and Thermoplasticity, in « Plasticity » (Proc. 2nd Sympos. Naval Structural Mechanics, April 5-7, 1960, E. H. Lee and P. S. Symonds, eds.), Pergamon Press, Oxford, 1960.
79. OLSZAK W., MROZ Z., PERZYNA P. Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity, Pergamon Press, Oxford, 1963.
80. OLSZAK W., RYCHLEWSKI J., URBANOWSKI W. Plasticity under Nonhomogeneous Conditions, Academic Press, New York and London, 1962.
81. PERZYNA P. Fundamental Problems in Viscoplasticity, Advances in Appl. Mech., Vol. IX, 1966.
82. PRAGER W. The Theory of Plasticity — A Survey of Recent Achievements, Proc. Instn. Mech. Engrs., London, 1955.
83. SAWCZUK A., OLSZAK W. Problems of Inelastic Shells, Theory of Plates and Shells, Bratislava, 1966.

84. SZCZEPINSKI W. Обзор работ по несущей способности растягиваемых стержней с вырезами (Bilan des travaux relatifs à la portance des barres à entailles en traction), Mechan. teor. i stosow., 3 (3), Warszawa, 1965 (en polonais).

C. Articles

85. АГАМИРЗЯН Л. С. Решение задач статики сыпучей и пластической сред при помощи рядов метацилиндрических функций (Agamirzian L. Solution des problèmes de la statique des milieux pulvérulents et plastiques à l'aide de séries des fonctions métacylindriques), Инж. журн., т. 1, № 4, 1961; т. 2, № 2, 1962.
86. АРУТЮНЯН Р. А., ВАКУЛЕНКО А. А. О многократном нагружении упруго-пластической среды (Aroutiounian R., Vakoulenko A. Sur les chargements multiples des milieux élasto-plastiques), Изв. АН СССР, Мех., № 4, 1965.
87. БИРГЕР И. А. Некоторые общие методы решения задач пластичности (Birguer I. Certaines méthodes générales de solution des problèmes de la plasticité), ПММ, т. 15, в. 6, 1951 ; cf. également Изв. ОТН, Мех., № 1, 1963 ; № 2, 1965.
88. БИРГЕР И. А. Теория пластического течения при неизотермическом нагружении (Birguer I. Théorie de l'écoulement plastique au chargement non isothermique), Изв. АН СССР, Мех., № 3, 1964.
89. ВАКУЛЕНКО А. А. О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах, I, II (Vakoulenko A. Sur les liaisons entre les contraintes et les déformations dans les milieux non élastiques), сб. Исслед. по упруг. и пластичности, изд. ЛГУ, № 1, 1961 ; № 2, 1963.
90. ВАКУЛЕНКО А. А., ПАЛЛЕЙ И. З. К вопросу о теории пластичности для среды, испытывающей деформацию при переменных температурах (Vakoulenko A., Palleï I. Sur le problème de la théorie de la plasticité pour les milieux subissant une déformation aux températures variables), сб. Исслед. по упруг. и пластичности, изд. ЛГУ, № 5, 1966.
91. ГАЛИН Л. А. Плоская упруго-пластическая задача (Galine L. Problème plan élasto-plastique), ПММ, т. 10, в. 5-6, 1946.
92. ГАЛИН Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней (Galine L. Torsion élasto-plastique des barres prismatiques), ПММ, т. 13, в. 3, 1949.
93. ГАЛИН Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения (Galine L. Torsion élasto-plastique des barres prismatiques de section polygonale), ПММ, т. 8, в. 4, 1944.
94. ГОХФЕЛЬД Д. А. О применении теоремы Койтера к задачам приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел (Gokhfeld D. Sur l'application du théorème de Koiter aux problèmes d'adaptation des corps élasto-plastiques inégalement chauffés), Прикл. механ., № 4, 1967.
95. ГРИГОРЬЕВ А. С. Об изгибе круглой плиты за пределом упругости (Grigoriev A. Sur la flexion d'une plaque circulaire au-delà de la limite d'élasticité), ПММ, т. 16, в. 1, 1952.
96. ДАВИДЕНКОВ Н. Н., СПИРИДОНОВА Н. И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца (Davidenkov N., Spiridonova N. Analyse de l'état de contrainte dans le col d'une éprouvette tendue), Заводск. лабор., т. 11, № 6, 1945.
97. ДРУЯНОВ Б. А. Распределение напряжений под штампом с криволинейной подошвой (Drouianov B. Distribution des contraintes sous un pilon à semelle curviligne), ПМТФ, № 6, 1961.

98. ИВАНОВ Г. В. Об условиях пересечения линий разрыва напряжений (Ivanov G. Sur les conditions d'intersection des lignes de discontinuité des contraintes), ПМТФ, № 4, 1960.
99. ИЛЬЮШИН А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям (Iliouchine A. Problèmes de la théorie de l'écoulement du matériau plastique sur les surfaces), ПММ, т. 18, в. 3, 1954.
100. ИЛЬЮШИН А. А. Деформация вязко-пластического тела (Iliouchine A. Déformation du corps visco-plastique), Ученые записки МГУ, в. 39, М., 1940.
101. ИШЛИНСКИЙ А. Ю. Осесимметричная задача и проба Бринеля (Ichlinski A. Problème à symétrie axiale et essai de dureté de Brinell), ПММ, т. 8, в. 3, 1944.
102. ИШЛИНСКИЙ А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел (Ichlinski A. Sur les équations des déformations tridimensionnelles des corps imparfaitement élastiques et visco-plastiques), Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 3, 1945.
103. ИШЛИНСКИЙ А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением (Ichlinski A. Théorie générale de la plasticité avec écrouissage linéaire), Укр. матем. журн., № 3, 1954.
104. КАЧАНОВ Л. М. Упруго-пластическое состояние твердых тел (Katchanov L. Etat élasto-plastique des solides), ПММ, т. 5, в. 3, 1941.
105. КАЧАНОВ Л. М. Вариационные принципы для упруго-пластических сред (Katchanov L. Les principes variationnels pour les milieux élasto-plastiques), ПММ, т. 6, в. 2-3, 1942.
106. КАЧАНОВ Л. М. Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости (I, II, III) (Katchanov L. Stabilité de la flexion plane au-delà de la limite élastique), ПММ, т. 15, в. 2, 5, 6, 1951.
107. КАЧАНОВ Л. М. К задаче о деформации пластичного слоя (Katchanov L. Sur le problème de la déformation d'une couche plastique), Докл. АН СССР, т. XCVI, № 2, 1954 ; Изв. АН СССР, Мех., № 5, 1962.
108. КАЧАНОВ Л. М. К вопросу о сложном нагружении (Katchanov L. Sur le problème du chargement complexe), ПММ, т. 19, в. 3, 1954.
109. КАЧАНОВ Л. М. К устойчивости упруго-пластического равновесия (Katchanov L. Sur la stabilité de l'équilibre élasto-plastique), Вестник ЛГУ, № 19, 1956.
110. КАЧАНОВ Л. М. О вариационных методах решения задач пластичности (Katchanov L. Sur les méthodes variationnelles de solution des problèmes de la plasticité), ПММ, т. 23, в. 3, 1959.
111. КЛЮШНИКОВ В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория (Kliouchnikov V. Conceptions modernes dans la plasticité et la théorie des déformations), ПММ, т. 23, в. 4, 1959.
112. КЛЮШНИКОВ В. Д. Устойчивость процесса сжатия идеализированного упруго-пластического стержня (Kliouchnikov V. Stabilité des phénomènes de la compression d'une barre élasto-plastique idéalisée), Изв. АН СССР, Мех., № 6, 1964.
113. КЛЮШНИКОВ В. Д. Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки (Kliouchnikov V. Stabilité des phénomènes de la compression d'une plaque idéalisée), МТТ, № 4, 1966.
114. ЛУРЬЕ А. И. Обобщение теоремы Кастильяно (Lourié A. Généralisation du théorème de Castigliano), Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 1, 1946.
115. МАРКОВ А. А. О вариационных принципах в теории пластичности (Markov A. Sur les principes variationnels dans la théorie de la plasticité), ПММ, т. 11, в. 3, 1947.
116. МОСОЛОВ П. П., МЯСНИКОВ В. П. Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды (Mossolov P., Miasnikov V. Les

méthodes variationnelles dans la théorie de l'écoulement des milieux visco-plastiques), ПММ, т. 29, в. 3, 1965.
116a. НАЯР Е., РЫХЛЕВСКИЙ Я., ШАПИРО Г. С. К вопросу об упруго-пластическом состоянии бесконечного клина (Naïar E., Rykhlevski Y., Chapiro G. Sur le problème de l'état élasto-plastique d'un coin infini), Бюлл. Польск. АН, сер. техн. наук, т. 14, № 9, 1966.
117. НОВОЖИЛОВ В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения (Novogilov V. Sur l'expression physique des invariants de la contrainte), ПММ, т. 15, в. 2, 1951.
118. НОВОЖИЛОВ В. В. О формах связи между напряжениями и деформациями (Novogilov V. Sur les formes de liaison existant entre les contraintes et les déformations), ПММ, т. 27, в. 5, 1963.
119. НОВОЖИЛОВ В. В., КАДАШЕВИЧ Ю. И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения (Novogilov V., Kadachévitch Y. Théorie de la plasticité tenant compte des microcontraintes résiduelles), ПММ, т. 2, в. 1, 1958.
120. НОВОЖИЛОВ В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде (Novogilov V. Sur les liaisons existant entre les contraintes et les déformations dans le milieu élastique non linéaire), ПММ, т. 15, в. 2, 1951.
121. РАБОТНОВ Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределом упругости (Rabotnov Y. Sur l'équilibre des barres comprimées au-delà de la limite d'élasticité), Инж. сб., т. 11, 1952.
122. РАХМАТУЛИН Х. А. О распространении волны разгрузки (Rakhmatouline Kh. Sur la propagation de l'onde de décharge), ПММ, т. 9, в. 1, 1945.
123. РЖАНИЦЫН А. Р. Экстремальные свойства формы движения жестко-пластической системы (Rjanitsyn A. Les propriétés d'extremum des formes de mouvement d'un système rigide-plastique), Изв. АН СССР, Мех., № 2, 1959.
124. РОЗЕНБЛЮМ В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел (Rosenblum V. Sur la théorie d'adaptation des corps élasto-plastiques), Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1958; cf. également № 7, 1957.
125. РОЗЕНБЛЮМ В. И. К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел (Rosenblum V. Sur l'analyse de l'adaptation des corps élasto-plastiques inégalement chauffés), ПМТФ, № 5, 1965.
126. РОЗЕНБЛЮМ В. И. О пластических расчетах толстостенных цилиндров (Rosenblum V. Sur les calculs plastiques des cylindres à parois épaisses), МТТ, № 4, 1966.
127. СЕДОВ Л. И. К теории построения механических моделей сплошных сред (Sédov L. Sur la théorie de l'élaboration des modèles mécaniques des milieux continus), Вестн. АН СССР, № 7, 1960.
128. СЕДОВ Л. И. О понятиях простого нагружения и о возможных путях деформации (Sédov L. Sur les conceptions du chargement simple et les voies éventuelles de la déformation), ПММ, т. 23, в. 2, 1959.
129. СОКОЛОВСКИЙ В. В. Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях (Sokolovski V. Propagation des ondes élasto-visco-plastiques dans les barres), ПММ, т. 12, в. 3, 1948.
130. СОКОЛОВСКИЙ В. В. Построение полей напряжений и скоростей в задачах пластического течения (Sokolovski V. Construction des champs de contraintes et de vitesses dans les problèmes de l'écoulement plastique), Инж. журн., т. 1, в. 3, 1961.
131. ТАМУЖ В. П. Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела (Tamouj V. Sur un principe du minimum dans la dynamique du corps rigide-plastique), ПММ, т. 26, в. 4, 1962.

132. ФЕЙНБЕРГ С. М. Принцип предельной напряженности (Feinberg S. Le principe de la contrainte limite), ПММ, т. 12, в. 1, 1948.
133. ХРИСТИАНОВИЧ С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре (Khristianovitch S. Le problème plan de la théorie mathématique de la plasticité dans le cas de forces extérieures définies sur un contour fermé), Матем. сб., новая серия, т. 1 (43), в. 4, 1936.
134. ШАПИРО Г. С. Продольные колебания стержней (Chapiro G. Oscillations longitudinales des barres), ПММ, т. 10, в. 5-6, 1946.
135. ШАПИРО Г. С. Удар по кольцевой жестко-пластической пластинке (Chapiro G. Le choc sur une plaque circulaire rigide-plastique), ПММ, т. 23, № 1, 1959.
136. ШАПИРО Г. С. О предельном и упруго-пластическом состояниях конструкций (Chapiro G. Sur les états limite et élasto-plastique des constructions), Изв. АН СССР, Мех., № 4, 1963.
137. ЧЕРЕПАНОВ Г. П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации (Tchérépanov G. Le problème élasto-plastique dans les conditions de déformation antiplane), ПММ, т. 26, в. 4, 1962.
138. ЧЕРЕПАНОВ Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи (Tchérépanov G. Sur une méthode de solution du problème élasto-plastique), ПММ, т. 27, в. 3, 1963.

139. ALLEN G., SOPWITH D. The Stresses and Strains in a Partly Plastic Thick Tube, Proc. Roy. Soc., A, 205 (1080), 1951.
140. BATDORF S. B., BUDIANSKY B. A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, NACA Tech. Note N 1871, 1949.
141. BUDIANSKY B. A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity, Journal of Applied Mechanics, 26 (2), 259-264, 1959.
142. COX A., EASON G., HOPKINS H. Axially Symmetric Plastic Deformations, Phil. Trans. Roy. Soc., A, 254 (1036), 1961.
143. DRUCKER D. C. Variational Principles in the Mathematical Theory of Plasticity, Calculus of Variations and Its Applications, Proc. Symposia in Applied Mathematics, Vol. VIII, 1958.
144. DRUCKER D. C. Coulomb Friction, Plasticity and Limit Loads, Journal of Applied Mechanics, 21 (1), 71-74, 1954.
145. DRUCKER D. C., PRAGER W., GREENBERG H. J. Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, Quart. Appl. Math., 9 (4), 1952.
146. EDELMAN F., DRUCKER D. C. Some Extensions of Elementary Plasticity Theory, Journ. Franklin Inst., 251 (6), 1951.
146a. FOIGT W. Ueber die innere Reibung der festen körper insbesondere der Kristalle, Abh. d. Math. Klasse d. Königl. Ges. d. Wiss., t. 36, Göttingen, 1890, c. p. 1.
147. FORD H., LIANIS G., Plastic Yielding of Notched Strips under Conditions of Plane Stress, Zst. angew. Mathem. und Physik, 8 (5), 360-382, 1957.
148. GREEN A. P. The Plastic Yielding of Metal Junctions Due to Combined Shear and Pressure, J. Mech. and Phys. Solids., 2 (3), 1954.
149. GREEN A. P. A Theory of the Plastic Yielding Due to Bending of Cantilevers and Fixed-ended Beams, Part I, J. Mech. and Phys. Solids., 3 (1), 1954.
150. GREEN A. P. The Plastic Yielding of Notched Bars Due to Bending, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 6 (2), 1953.
151. GREENBERG H. J. Complementary Minimum Principles for an Elastic-plastic Material, Quart. Appl. Math., 7, 85, 1949.
152. HAAR A., VON KARMAN Th. Zur Theorie der Spannungszustände in

plastischen und Sandartigen Medien, Nachr. Gesellsch. Wissenoch., Göttingen, 1909.
153. HENCKY H. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern, Z.A.M.M., 3 (4), 241-251, 1923.
154. HENCKY H. Пространственная задача упругого и пластического равновесия (Problème spatial de l'équilibre élastique et plastique), Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 2, 1937.
155. HENCKY H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material herforgerufenen Nachspannungen, Z. angew. Math. und Mech., 4 (4), 323-334, 1924.
156. HENCKY H. Über langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen, Z. angew. Math. und Mech., 5 (2), 115-124, 1925.
157. HILL R. On the Problem of Uniqueness in the Theory of a Rigid-plastic Solid, I, II, III, J. Mech. and Phys. Solids, 4 (4), 247-255 (1956); 5 (1) 1-8 (1956) ; 5 (3), 153-161 (1957).
158. HILL R., SEWELL M. J. A General Theory of Inelastic Column Failure, I, II, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8 (2), 1960.
159. HILL R. New Horizons in the Mechanics of Solids, J. Mech. and Phys. Solids, 5 (1), 66-74, 1956.
160. HILL R. Constitutive Laws and Waves in Rigid-plastic Solids, J. Mech. and Phys. Solids, 10 (Apr.-June), 89-98, 1962.
161. HILL R. On Discontinuous Plastic States, with Special Reference to Localized Necking in Thin Sheets, JMPS, 1 (1), 1952.
162. HODGE P. G. On the Soap-film Sand-hill Analogy for Elastic-plastic Torsion, The Prager Anniversary Volume, N.Y., 1963.
163. HOPKINS H. G., PRAGER W. The Load Carrying Capacities of Circular Plates, J. Mech. and Phys. Solids, 2 (1), 1953.
164. HOPKINS H. G., PRAGER W. On the Dynamics of Plastic Circular Plates, Z. angew. Math. und Phys., 5 (4), 1954.
165. JOHNSON W., SOWERBY R. On the Collapse Load of Some Simple Structures, Intern. J. Mechan. Sci., 9 (7), 1967.
166. KARMAN T., DUWEZ P. The Propagation of Plastic Deformation in Solids, J. Appl. Phys., 21 (10), 1950.
167. KOBAJASHI SH., THOMSEN E. G. Upper-and Lower-bound Solutions to Axisymmetric Compression and Extrusion Problems, Int. J. Mechan. Sci., 7 (2), 1965.
168. KOITER W. T. Stress-strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-plastic Materials with a Singular Yield Surface, Quart. Appl. Math., 11 (3), 350-354, 1953.
169. KOOPMAN D. C., LANCE R. H. On Linear Programming and Plastic Limit Analysis. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13 (2), 77-87, 1965.
170. LEE E. H., TUPPER S. J. Analysis of Plastic Deformation in a Steel Cylinder Striking a Rigid Target, Journal of Applied Mechanics, 21 (1), 63-71, 1954.
171. LÊVY M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, Journ. math. pures et appl. Sér. II, 16, 369-372, 1871.
172. LÉVY M. Sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles, relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles, lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles, Comptes rendus, Acad. Sci., Paris, Sér. A, 73 (16), 1871.
173. LIPPMANN H. Principal Line Theory of Axially-symmetric Plastic Deformation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 10 (2), 111-122, 1962.

174. MARTIN J. B. Impulsive Loading Theorems for Rigid-plastic Continua. Journal of the Engineering of the American Society of Civil Engineer, 90 (EM5), 27-42, 1964.
175. MAXWELL J. On the Dynamical Theory of Gases, Philos. Trans., 157, 49-88, 1867.
176. MEYERHOF G. G., CHAPLIN T. K. The Compression and Bearing Capacity of Cohesive Layers. Brit. Journ. Appl. Phys., 4 (1), 20-26, 1953.
177. MISES R. von. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Physik, 1913.
178. NEAL B. The Lateral Instability of Yielded Mild Steel Beams of Rectangular Cross-section. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 242 (846), 1950.
179. PEARSON C. E. Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plates and Columns. Journal of the Aeronautical Sciences, 17 (7), 417-425, 1950.
180. PFLÜGER A. Zur plastischen Knickung gerader Stäbe, Ing. Arch., 20 (5), 291-301, 1952.
181. PHILIPS A. Variational Principles in the Theory of Finite Plastic Deformations, Quart. Appl. Mathem., 7 (1), 110-114, 1949.
182. PRAGER W. Mathematical Programming and Theory of Structures, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 13 (1), 312-332, 1965.
183. PRANDTL L. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, ZAMM, 1 (1), 15-20, 1921.
184. RYCHLEWSKI J. Sur l'écoulement initial plastique d'un demi-espace dû à une distribution donnée de la vitesse. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, sér. A, 263 (13), Paris, 1966.
185. SYMONDS P. S. Dynamic Load Characteristics in Plastic Bending of Beams., J. Appl. Mech., 20 (4), 475-481, 1953.
186. SYMONDS P. S. Large Plastic Deformations of Beams under Blast Type Loading. Proceeding of the second U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1954.
187. SAINT-VENANT B. Memoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, Journal de Math. pures et appl., sér. II, 16, 308-316, 1871.
188. SAINT-VENANT B. Complément aux Mémoires de B. de Saint-Venant et de M. Lévy sur les équations différentielles indéfinies du mouvement intérieur des solides ductiles, etc. ; — Equations définies ou relations aux limites de ces corps, Journal de Math. pures et appl., sér. II, 16, 373-382, 1871.
189. SHANLEY F. R. Inelastic Column Theory, Journal of the Aeronautical Sciences, 14 (5), 261-268, 1947.
190. SHIELD R. T. On the Plastic Flow of Metals under Conditions of Axial Symmetry, Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A, 233 (1193), 267-287, 1955.
191. TAYLOR G. I. The Testing of Materials at High Rates of Loading, Journ. Inst. of Civil. Eng., 26 (8), 486-519, 1946.
192. TEKINALP B. Elastic-plastic Bending of Built-in Circular Plate under a Uniformly Distributed Load. JMPS, 5 (2), 135-142, 1957.
193. THOMAS D. G. The autofrettage of Thick Tubes with Free Ends, JMPS, 1 (2), 1953.
194. YAMAMOTO Y. Variational Principles of Equilibrium of an Elasto-plastic Body, Quarterly of Applied Mathematics, 10 (3), 215-224, 1952.
195. ZIEGLER H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing. Archiv, 20 (1), 49-56, 1952.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III. ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE. PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE IV. TORSION

CHAPITRE V. DÉFORMATION PLANE

CHAPITRE VI. ÉTAT DE CONTRAINTE PLAN

CHAPITRE VII. DÉFORMATION À SYMÉTRIE AXIALE

CHAPITRE VIII. PRINCIPES D'EXTREMUM ET MÉTHODES DE SOLUTION ÉNERGÉTIQUES

CHAPITRE IX. THÉORIE DE L'ADAPTATION

CHAPITRE X. STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE

CHAPITRE XI. PROBLÈMES DYNAMIQUES

CHAPITRE XII. MILIEUX COMPLEXES. VISCO-PLASTICITÉ

APPENDICE

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:

Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

A PARAITRE:

LA MÉCANIQUE DU MILIEU CONTINU

par L. SÉDOV

Tome I

Cet ouvrage en deux volumes, s'adressant aux étudiants des Universités scientifiques, est dû à l'académicien Léonide Sédov, éminent savant soviétique. Ce livre associe d'une façon organique l'essence de la physique contemporaine au langage mathématique le plus rigoureux.

Une haute culture scientifique et la maîtrise du sujet ont permis à l'auteur de maintenir tout au long de son exposé le lien qui rattache la mécanique à la physique. Il n'a pas encore été écrit d'ouvrage traitant de façon aussi originale de la mécanique des milieux continus.

Le premier tome commence par un rappel de la thermo et électrodynamique, établit les équations générales de la physique, les relations auxiliaires des fortes ruptures, les conditions initiales et aux limites, etc., fournit les éléments du calcul approché.

A PARAÎTRE:

LA MÉCANIQUE DU MILIEU CONTINU

par L. SÉDOV

Tome II

Le second volume du remarquable ouvrage de l'académicien L. Sédov étudie les modèles concrets et les théories de l'hydrodynamique et de la dynamique des gaz, la théorie de l'élasticité, la théorie de la plasticité.

On y fournit la solution de problèmes types ne sortant pas du cadre de modèles classiques en établissant les lois qui régissent les mouvements et les processus d'un important groupe de phénomènes. Un chapitre spécial est consacré à la théorie générale des machines hydrauliques et à gaz.

Il s'adresse, comme le premier tome, aux étudiants des Universités scientifiques s'intéressant à la physique et aux mathématiques.